



R. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y CÁLCULO MENTAL

R.1.- Introducción

R.2.- Estrategias didácticas

R.3.- Comprensión de los enunciados de los problemas

R.4.- Evaluación de los problemas

R.5. - Estrategias de cálculo mental

R.1.- INTRODUCCIÓN

Un problema es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y hay que poner a punto relaciones nuevas.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida, que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica.

R.2.- ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

a) Enseñar a resolver *problemas tipo*

Esta estrategia consiste en plantear a los alumnos algún problema que combina cierta información, de manera que su solución demanda el uso de algún procedimiento determinado o de una combinación de ellos.

Una vez que el problema se ha resuelto, se propone una serie de nuevos problemas que *conservan la misma estructura* que el problema inicial, de tal manera que sólo varían los datos y el contexto.

Con esta estrategia didáctica se contribuye al aprendizaje de modos de relación de información y de procedimientos, que pueden ser transferibles a nuevas situaciones.

Sin embargo, cuando se usa de manera exclusiva esta estrategia, cuando la ejercitación en los problemas tipo ocurre sin introducir prácticamente ninguna variación, el problema deja de ser tal, en tanto que deja de cumplirse la condición de que no sea posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad.

b) Inducir la reformulación verbal del problema

Consiste en propiciar que los alumnos (con la asistencia del profesor en la medida que resulte estrictamente necesario) reelaboren el enunciado del problema, utilizando para ello las palabras de uso familiar que les permitan precisar con mayor claridad cuál es la situación planteada en el problema, sin modificar su estructura original.

Esta estrategia propicia un primer nivel de análisis que facilita la comprensión del problema en cuestión; lo que posibilita salvar la dificultad para interpretar los términos que aparecen en el enunciado de un problema; permite descartar, en su caso, si una solución incorrecta tiene que ver con una inadecuada interpretación del lenguaje en el que está expresado el problema, o con otro tipo de razones y, en la medida en que los alumnos puedan realizar dicha reformulación sin ayuda del maestro, permitirá que el alumno desarrolle una estrategia de aprendizaje sumamente valiosa para emprender la resolución de problemas matemáticos.

c) Facilitar por medio de preguntas el análisis del enunciado del problema

En esta estrategia didáctica, el profesorado asume el papel de constructor de preguntas que faciliten a los alumnos identificar la información contenida de manera explícita o implícita en el enunciado del problema, descartar la que no sea relevante, descubrir si está presente toda la información necesaria para resolverlo



y percibir las relaciones que pueden establecerse a partir de la información detectada, todo esto antes de idear un plan de resolución del problema.

Esta estrategia puede ser útil para apoyar a los alumnos en el descubrimiento de qué tipo de elementos conviene analizar antes de elegir los procedimientos para la resolución de problemas y para impedir que de manera inmediata, después de una lectura superficial del problema, se lancen a la decisión de cuál o cuáles procedimientos de solución utilizar.

Como contrapartida, hay que hacer notar el riesgo de que origine en ellos cierta dependencia intelectual que finalmente les genere resistencia a un trabajo individual si no cuentan con la asistencia del docente cuando se les proponga resolver problemas matemáticos.

d) Facilitar la explicitación de los razonamientos presentes durante el proceso de solución del problema

Esta estrategia didáctica consiste en propiciar una especie de *pensamiento en voz alta*, ya sea durante la acción o después de ésta, que contribuya a que el alumno sea plenamente consciente de las razones por las que va tomando ciertas decisiones y concretándolas en la realización de algún procedimiento con la intención de resolver el problema.

se facilitan preguntas del tipo ¿cómo se te ocurrió esta forma de solución?, ¿qué pensaste cuando decidiste realizar tal operación?, ¿por qué decidiste este procedimiento y no otro?, ¿qué te ayudó a pensar de esa manera? etc.

El uso de esta estrategia didáctica tiene como propósito propiciar que el alumno llegue a desarrollar el pensamiento reflexivo, la capacidad de argumentar la toma de decisiones, controlar el sentido de sus acciones y el desarrollo de habilidades metacognitivas.

Sin embargo, en su utilización habrá que cuidar que todos los alumnos tengan o lleguen a tener una participación en esta reflexión compartida, pues sólo de esa manera se podrá evitar el riesgo de que algunos estudiantes únicamente se acojan a las respuestas de los que usualmente solicitan participar.

Resulta fundamental tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) • Cada una de las estrategias didácticas tiene su función en un momento dado, unas en el primer análisis del problema, otras en el proceso de solución o en el de evaluación de la respuesta; no se trata de que se conviertan en un apoyo permanente. Es fundamental que el docente intuya cuándo es conveniente que deje de usarlas con el mismo alumno o grupo de alumnos.
- b) • El objetivo de mayor alcance al usar las estrategias didácticas mencionadas es que el alumno llegue a interiorizarlas como propias, convirtiéndolas en estrategias de aprendizaje que le posibiliten la resolución de problemas matemáticos.
- c) • El uso de estas estrategias didácticas demanda del docente planificación cuidadosa, tiempo, esfuerzo y creatividad, trabajo con todo el grupo y acercamiento con los estudiantes uno a uno; pero los avances que percibirá, sin duda le llevarán a la certeza de que vale la pena ese esfuerzo.

Criterios para resolución de problemas

1. Proponer al alumno situaciones problemáticas surgidas de contextos reales y que exijan planificar la acción, controlar y supervisar lo que hace y piensa, así como evaluar lo que ha obtenido.
2. Evitar proponer problemas matemáticos simples que conserven un mismo tipo de estructura y que demanden de manera reiterada y única un determinado tipo de respuesta
3. Expresar los problemas con términos que pongan la situación del problema en un contexto casi real acorde con su entorno, edad y experiencias previas de aprendizaje. Ya que los niños entienden más fácilmente los problemas si están incorporados en un contexto significativo para ellos que si les plantean en un contexto arbitrario y abstracto alejado de la realidad.
4. Proponer problemas que estimulen la reflexión y que ayuden a comprender a fondo las matemáticas. Hay que tener en cuenta que meditar lleva tiempo y por tanto habrá que hacer lo posible para que los alumnos dispongan del tiempo necesario para que lo hagan, no agobiándolos con demasiados problemas y recomendarles que no se apresuren en responder, sino que tengan calma y reflexionen



5. Seleccionar cuidadosamente los problemas centrando la atención en unos pocos en lugar de intentar abarcar un gran número de problemas. Cuando se abarcan muchos problemas, tiende a repetirse el mismo contenido matemático. Cuando se plantean menos problemas, queda tiempo para el tipo de debate que transforma la solución de los problemas de algo que hay que memorizar en algo que se entiende. E
6. Los problemas harán referencia a los contenidos curriculares, de acuerdo con los estándares de rendimiento del área de Matemáticas. Es decir, además de los problemas aritméticos, se trabajarán también los problemas geométricos, de razonamiento lógico y de recuento sistemático y se iniciará la resolución de los problemas de azar y de estadística.

De acuerdo con los estándares de rendimiento del área de matemáticas se trabajarán los siguientes problemas en cada uno de los ciclos de la etapa.

Primer ciclo de Educación Primaria:

- Problemas aditivo-sustractivos de cambio, de unión, de comparación y de igualación, teniendo en cuenta que la mayor dificultad estará en los problemas de igualación, y en aquellos casos de cambio o combinación en los que se parte de los resultados y se pregunta por la cantidad inicial o por la modificación habida.
- Es necesario introducir en este ciclo situaciones problema que contribuyan a que los alumnos/as otorguen un cierto significado a la multiplicación y división. Aunque el alumno en este momento no conoce los algoritmos convencionales para el cálculo de estas operaciones, se pueden ensayar soluciones a problemas planteados sirviéndose de la suma y la resta.

Segundo ciclo de Educación Primaria:

- Problemas simples (dos datos y una pregunta) aditivo-sustractivos de *cambio*, de *unión*, de *comparación* y de *igualación*, siguiendo los pasos del proceso de resolución.
- Problemas simples (dos datos y una pregunta) de multiplicar/dividir relacionados con *repartos equitativos*, con *factores numéricos de comparación*, con *combinaciones cartesianas* y con *magnitudes intensivas*, siguiendo los pasos del proceso de resolución.
- *Problemas combinados simples* (no fraccionados) cuya resolución requiere realizar varias operaciones, todas sumas o restas, en un cierto orden.
- *Problemas combinados simples* (no fraccionados) cuya resolución requiere realizar varias operaciones, todas multiplicaciones o divisiones, en un cierto orden.
- *Problemas combinados mixtos* cuya resolución requiere realizar, en un cierto orden, varias operaciones distintas, sumas o restas y multiplicaciones o divisiones.
- Problemas sencillos de recuento sistemático. (Estos problemas tienen varias soluciones y hay que hallarlas todas. Todas las soluciones deben respetar ciertas condiciones que impone el problema.)

Tercer ciclo de Educación Primaria:

- Problemas combinados (no fraccionados) cuya resolución requiere realizar varias operaciones de distinto campo conceptual, sumas/restas y multiplicaciones / divisiones, en un cierto orden.
- Problemas de recuento sistemático.
- Problemas con datos fraccionarios o porcentuales.
- Problemas de inducción (generalización).
- Situaciones y problemas lógico-argumentativos. (Con estos problemas se pretende desarrollar la capacidad de razonamiento y sobre todo la capacidad para dar explicaciones de forma clara y precisa).

R.3.- COMPRENSIÓN DE LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS

Una de las medidas del plan de mejora consiste en emplear diez minutos de las sesiones dedicadas a la resolución de problemas a trabajar la lectura comprensiva de sus enunciados. Muchos errores en la resolución de problemas tienen su origen en una falta de comprensión lectora.

1. Los enunciados de los problemas y la tipología textual

Resulta difícil vincular a una tipología determinada el texto de un problema dada la diversidad de estructuras y modalidades de problemas que existen. Sería interesante saber a qué tipo de texto se puede asimilar el enunciado de un problema porque cada tipo de texto (narrativo, expositivo, descriptivo, instructivo, etc) se trabaja con unas determinadas estrategias que se concretan en actividades docentes. Vamos a hacer un intento para extraer algunas conclusiones prácticas que nos permitan trabajar la lectura comprensiva de los enunciados de los problemas.



a) El enunciado como “*texto descriptivo*”.

Por ejemplo: Luis tiene quince manzanas.... Hay dieciocho cajas y en cada caja hay 8 juguetes, etc. Este tipo de texto describe la realidad física, natural, social, psicológica, etc. Son como los cuadros o las fotografías en palabras. Al igual que cuando miramos un cuadro nos fijamos en distintos aspectos que enriquecen nuestra percepción del mismo modo, cuando leemos una descripción, nos formamos una imagen mental de la realidad descrita verbalmente.

Por lo tanto, serán de utilidad aquellas actividades que lleven al alumno a formarse esta imagen. Por ejemplo: dibujar las situaciones, decir si son verdaderas o falsas algunas proposiciones, completar frases, etc.

b) El enunciado como “*texto narrativo*”.

También puede considerarse el enunciado o parte del mismo como un texto narrativo, ya que suele haber una pequeña narración de acciones que dan lugar a situaciones modificadas respecto a las situaciones de partida. El factor tiempo es muy importante en este tipo de textos porque las cosas ocurren en orden cronológico, unas antes y otras después, y suele haber relación entre lo posterior y lo anterior.

Los textos narrativos se trabajan mediante estrategias que tienen como fin propiciar una imagen dinámica de lo que acontece, es decir del argumento. Por lo tanto, aquellas actividades que lleven al alumno a formarse un cuadro mental en el que aparezcan los personajes, sus acciones y repercusiones serán igualmente útiles. Por ejemplo: vincular acciones a personajes, analizar transformaciones (antes y después de una acción), elaborar mapas conceptuales, esquemas, etc.

c) Otros tipos de textos.

Los enunciados de los problemas también se podrían vincular a otros tipos de texto por ejemplo a los textos expositivos en cuanto que, a veces, articulan conceptos y aspectos más o menos teóricos con un cierto nivel de abstracción.

2. La comprensión literal e inferencial

De todo lo anterior podemos deducir que podrían distinguirse dos tipos de comprensión de los enunciados: la comprensión literal y la comprensión inferencial, ambas necesarias y complementarias. En primer lugar, la parte del enunciado de carácter expositiva requiere una comprensión literal y exacta de todos y cada uno de los datos. En segundo lugar, la parte interrogativa del enunciado nos lleva a volver a leer de nuevo la primera parte del enunciado con una lectura inferencial, es decir, deduciendo las operaciones que deben realizarse.

3. Sobre el trabajo y la evaluación

Es evidente que el enunciado de los problemas debe trabajarse como cualquier otro tipo de texto utilizado en otra materia, desde un punto de vista estrictamente lingüístico y con las estrategias y metodologías propias de la clase de Lengua.

Así pues, se pueden aplicar los criterios lingüísticos a la hora de evaluar la comprensión del enunciado y el razonamiento matemático. Esto puede parecer artificial, y posiblemente lo sea, porque los procesos mentales son únicos pero organizar el trabajo desde esta doble perspectiva puede ayudar a aquellos alumnos que tienen dificultades para resolver problemas porque no comprenden lo que leen.

4. Algunos ejemplos

A continuación se presentan algunos casos prácticos de enunciados de problemas planteados desde el punto de vista lingüístico para trabajar la comprensión, según los principios y criterios expuestos anteriormente.



Ejemplo 1

Mis padres han comprado un coche de 12.600 euros. En el momento de firmar entregan 3.600 euros y el resto deben pagarlo en 36 mensualidades ¿Cuántos euros tienen que pagar cada mes?

Algunas posibles actividades de comprensión que pueden hacer de forma oral o escrita:

- a) ¿qué significa pagar por mensualidades?
- b) ¿han pagado al contado mis padres el coche?
- c) ¿Cómo lo van a pagar?
- d) ¿qué hacen en cada momento mis padres?

e) Completa:

12.6000 euros, es el dinero que.....

3.600 euros es el dinero que.....

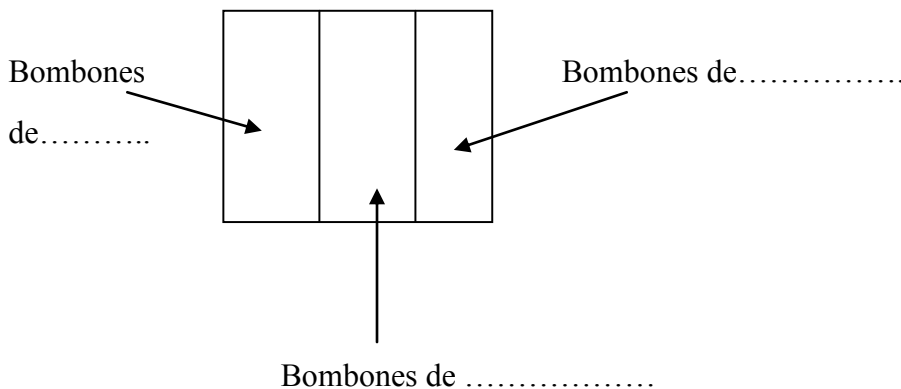
36 son para pagar.....

Ejemplo 2

En una bombonería se han preparado 25 cajas de bombones. En cada una han puesto 18 bombones rellenos de avellana, 24 rellenos de almendra y 6 de licor. ¿Cuántos bombones se han empleado?

Algunas posibles actividades de comprensión que pueden hacer de forma oral o escrita:

- a) Pon las cantidades dentro de cada recuadro:
- b) Completa:

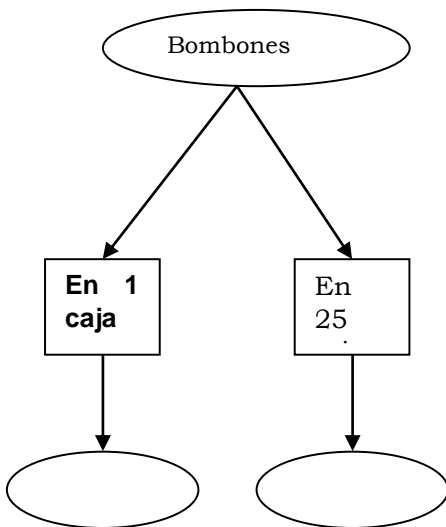


- c) Coloca en cada rectángulo el nº de bombones que debe haber.
- d) Une con flechas:



- 25
- 18 Bombones
- 24 Cajas.
- 6

e) Completa el gráfico:



Ejemplo 3

Ayer Miren tenía 72 cromos. Hoy tiene 101 cromos. ¿Cuántos cromos ha conseguido hoy?

- ¿Cuántos cromos tenía ayer Miren?
- ¿Cuántos cromos tiene hoy Miren?
- ¿Por qué te parece que Miren tiene hoy más cromos?

R.4.- EVALUACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Se utilizarán los mecanismos necesarios que permitan la evaluación continua de las sesiones dedicadas a la resolución de problemas (la observación directa del alumno en clase, la corrección de los cuadernos, los controles, etc.).

Conviene aclarar, en primer lugar, que la resolución de problemas se puede evaluar tanto por observación directa de la ejecución del alumno, como mediante pruebas escritas diseñadas para la evaluación. Por otro lado las preguntas de las pruebas escritas pueden ser:

- preguntas de respuestas cerradas, de tipo test,



Ej: Una clase va a dar un concierto y los 28 alumnos de la clase tienen que vender 7 entradas cada uno. Para hallar el número total de entradas, hay que:

- Dividir 28 entre 7
- Multiplicar 28 por 7
- Sumar 7 a 28
- Restar 7 a 28

b) preguntas abiertas en las que haya que construir la respuesta:

Ej: Una clase va a dar un concierto y los 28 alumnos de la clase tienen que vender 7 entradas cada uno. Hallar el número total de entradas que deben vender.

Criterios de puntuación

Criterios generales a todos los niveles para la evaluación de los problemas:

Puntuación máxima:

- Si se resuelve el problema correctamente mostrando datos, operaciones y dando la solución

Puntuación intermedia:

- Si se razona el problema aunque no se llegue a resolverlo
- o
- Si sólo se da la solución sin mostrar datos ni operaciones

Ninguna puntuación:

- Si el planteamiento es erróneo desde su inicio

R.5.- ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL

El cálculo mental consiste en realizar cálculos matemáticos utilizando sólo el cerebro sin ayudas de otros instrumentos como calculadoras o incluso lápiz y papel. Las operaciones escritas tienen una forma de hacerse, bien determinada y siempre igual, con independencia de los números que entren en juego. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el plano mental. Una operación aritmética efectuada mentalmente no tiene, por lo general, una única vía de cálculo. A poco que se reflexione, sorprende la variedad de enfoques posibles. Explorarlos, inspeccionar todas las posibilidades, optar por una de ellas, determinar el orden de actuación, estudiar las transformaciones más apropiadas, valorar el resultado, etc., convierte al cálculo a secas en cálculo pensado.

Por ejemplo, aquí aparecen varias formas de multiplicar $25 \cdot 48$:

$$25 \cdot 48 = 50 \cdot 24 = 100 \cdot 12 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 30 \cdot 40 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 25 \cdot (50 - 2) = 25 \cdot 50 - 25 \cdot 2 = 1250 - 50 = 1200$$

$$25 \cdot 48 = 25 \cdot (40 + 8) = 25 \cdot 40 + 25 \cdot 8 = 1000 + 200 = 1200$$



A continuación se recogen algunas técnicas y estrategias que nos pueden ser útiles al realizar cálculos mentales sencillos, puesto que para cálculos más complejo se dispone de otras estrategias en el cálculo escrito o de potentes herramientas de cálculo como son las calculadoras y ordenadores

1.- SUMAS

1.1. Aplicar la propiedad conmutativa:

$$8 + 31 = 31 + 8 = 39$$

1.2. Recuentos o conteos:

$$7 + 6 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$$

1.3. Series ascendentes:

$$7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 13$$

1.4. Doblar:

$$6 + 8 = 7 + 7 = 14$$

$$7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 15$$

1.5. Descomposición:

$$25 + 18 = 20 + 5 + 10 + 8 = 30 + 13 = 43$$

$$28 + 35 = 28 + 10 + 10 + 10 + 5 = 63$$

1.6. Redondeo y compenso:

$$58 + 19 = 58 + 20 - 1 = 78 - 1 = 77$$

2.- RESTAS

2.1. Recuentos o conteos:

A la hora de restar dos cantidades, podemos pensar en la idea de descontar para ver lo que no queda, pero en ocasiones será más sencillo utilizar la prueba de la resta para buscar el resultado, es decir, partiendo del sustraendo contar hasta llegar al minuendo.

$$37 - 25 = \text{¿?} \quad 25 + \text{¿?} = 37 \quad \text{¿?} = 12$$

2.2. Descomposición



$$\begin{array}{r} 96 - 42 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 90 - 40 = 50 \\ 6 - 2 = 4 \\ \hline 54 \end{array}$$

3.- MULTIPLICACIONES

3.1 Aplicar la propiedad conmutativa

$$25 \times 13 \times 4 = 25 \times 4 \times 13 = 100 \cdot 13 = 1300$$

3.2. Reducir a la suma

$$215 \times 2 = 215 + 215 = 430$$

3.3. Descomponer y utilizar la propiedad distributiva

$$42 \times 12 = 42 \times (10 + 2) = 420 + 84 = 504$$

3.4. Factorización

$$18 \times 15 = 9 \times 2 \times 3 \times 5 = 27 \times 10 = 270$$

3.5. Multiplicar doblando y dividiendo por 2

$$14 \times 16 = 28 \times 8 = 56 \times 4 = 112 \times 2 = 224 \times 1 = 224$$

3.6. Multiplicar por 9, 99, 999...

$$15 \times 9 = 15 \times 10 - 15 = 150 - 15 = 135$$

**3.7.- Multiplicar por 11**

$$15 \times 11 = 15 \times 10 + 15 = 150 + 15 = 165$$

3.8. Multiplica por 0,1 0,001 es lo mismo que dividir entre 10, 100...

$$28 \times 0,1 = 2,8$$

3.9. Multiplicar por 1,50 2,50 3,50

$$15 \times 1,50 = 15 \times 1 + 15 \times 0,50 \text{ (mitad de 15)} = 15 + 7,50 = 22,50$$

$$15 \times 2,50 = 15 \times 2 + 15 \times 0,5 \text{ (mitad de 15)} = 30 + 7,5 = 37,5$$

3.10 Multiplicar por 1,25 2,25 3,25...

$$12 \times 1,25 = 12 \times 1 + \text{Cuarta parte de 12 (3)} = 15$$

3.11.- Multiplicar por 10 o potencias de 10

$$25 \cdot 10 = 250$$

$$12 \cdot 100 = 12 \cdot 10_2 = 1200$$

$$37,9 \cdot 1000 = 37,9 \cdot 10_3 = 37900$$

3.12.- Multiplicar por 5, por 25 y por 50

Multiplicar por 5 es lo mismo que multiplicar por 10 y dividir entre 2

$$12 \times 5 = 12 \times 10 = 120 : 2 = 60$$

Multiplicar por 25 es lo mismo que multiplicar por 100 y dividir entre 4

$$70 \times 25 = 70 \times 100 = 7000 : 4 = 1750$$

Multiplicar por 50 es lo mismo que multiplicar por 100 y dividir entre 2

$$27 \times 50 = 27 \times 100 = 2700 : 2 = 1350$$



3.13.- Multiplicar por 12

Para multiplicar un nº por 12 podemos multiplicarlo por 10 (añadir un cero) y sumar el doble de ese número.

$$15 \times 12 = 15 \times 10 + 30 = 150 + 30 = 180$$

$$18 \times 12 = 18 \times 10 + 36 = 180 + 36 = 216$$

4.- DIVISIÓN

4.1.- Dividir entre 10 o potencias de 10

Por cada potencia de 10 quitaremos un cero al dividendo ó desplazaremos la coma hacia la izquierda si no hay ceros.

$$250 : 10 = 25$$

$$234 : 100 = 2,34$$

4.2.- Dividir entre 5 y 25

Dividir un nº entre 5 equivaldrá a multiplicarlo por 2 y dividirlo entre 10:

$$18 : 5 = 18 \times 2 = 36 : 10 = 3,6$$

Dividir un número entre 25 equivaldrá a multiplicarlo por 4 y dividirlo entre 100 :

$$600 : 25 = 600 \times 4 = 2400 : 100 = 24$$

4.3.- Dividir por descomposición del divisor en factores

$$440 : 4 = (440 : 2) : 2 = 220 : 2 = 110$$

4.4.- Dividir entre 0,1 0,01 0,001

Dividir entre 0,1 0,001 es lo mismo que multiplicar por 10 , 100, 100 ...

$$28 : 0,1 = 28 \times 10 = 280$$

**4.5. Dividir entre 0,5**

Equivale a multiplicar por 2 ó calcular el doble.

$$70 \times 0,5 = 70 \times 2 = 140$$

4.6.- Dividir entre 0,25 equivale a multiplicar por 4

$$70 : 0,25 = 70 \times 4 = 280$$