TEMA 5: VECTORES EN EL ESPACIO.

RELACIÓN DE PROBLEMAS

Ejercicio 1.-

a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$, siendo $\vec{u}(2,\,0,\,-3)$, $\vec{v}(1,\,-2,\,0)$ y $\vec{w}(3,\,2,\,-6)$.

b) ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores?

Ejercicio 2.-

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4,\ 3,\ 7)$ respecto de la base

$B=\{(2,\,1,\,0),\ (1,\,0,\,-2),\ (0,\,0,\,3)\}$.

Ejercicio 3.-

Dados los vectores $\vec{a}(1,\,2,\,3)$, $\vec{b}(1,\,1,\,1)$, $\vec{c}(1,\,0,\,5)$ y $\vec{d}(-1,\,1,\,3)$:

Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Ejercicio 4.-

Dados los vectores $\vec{u}(2,\,-1,\,0)$ y $\vec{v}(3,\,2,\,-1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u}+3\vec{w}=\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

Ejercicio 5.-

Consideramos la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(0,2,-1)$ y $\vec{c}(3,0,1)$.

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4,\,-7,\,14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

Ejercicio 6.-

Sean u y v dos vectores que forman un Ángulo de 45^o y que tienen el mismo módulo,

$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2.$

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u}+\vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u}-\vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son perpendiculares.

Ejercicio 7.-

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

Ejercicio 8.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

Ejercicio 9.-

Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 2, -2)$ y $\vec{w}(1, 2, x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de $60°$.

Ejercicio 10.-

Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de m para que a y c sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y c.

Ejercicio 11.-

Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $u \times v$ y $u \times w$, siendo:

$\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(0, 1, -1)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$

Ejercicio 12.-

a) **Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, –1, 1) y a (1, –2, 0).**

b) **¿Es cierto que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$? Pon un ejemplo.**

Ejercicio 13.-

a) **Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:**

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$$

b) **Halla un vector perpendicular a $u(2, -1, 1)$ y a $v(3, 0, -1)$**

Ejercicio 14.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, 1)$:

a) **Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.**

b) **¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Ejercicio 15.-

Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}(2, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, m, 1)$ sea 2.

Ejercicio 16.-

a) **Demuestra que los vectores $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(k, 3, 2)$ y $\vec{w}(1, 0, 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.**

b) **¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?**

Ejercicio 17.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$ y $\vec{w}(1, \lambda, 5)$; halla el valor de λ para que:

a) Determinen un paralelepípedo de volumen 10.

b) Sean linealmente dependientes.

Ejercicio 18.-

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}(0, 1, 1)$, $\vec{v}(-2, 0, 1)$ y $\vec{w}(m, m-1, 1)$ sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2, 1, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

Ejercicio 19.-

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(3, 0, -2)$ y $\vec{w}(2, -3, 0)$.

b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?:

$[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}]$

Ejercicio 20.-

Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 2, -1)$ y $\vec{w}(2, -2, 1)$, se pide:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha, \alpha, -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES:

Ejercicio 1:

a) $x = -2\lambda, y = \lambda, z = \lambda$
b) Los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicio 2:

a) No.
b) $(3, -2, 1)$

Ejercicio 3:

$x = 2,\ \ y = -3,\ \ z = 0$

Ejercicio 4:

a) Si
b) $\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)$

Ejercicio 5:

a) $(5, -1, -2)$
b) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 6:

a) $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \approx 3{,}70$

$\left|\vec{u} - \vec{v}\right| = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}} \approx 1{,}53$

Ejercicio 7:

Hay dos soluciones: $x = 2, y = -1\ ; x = -2, y = 1$

Ejercicio 8:

a) Proyección: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ángulo: $\alpha = 45º$
b) $(0, b, 0)$, con $b \neq 0$

Ejercicio 9:

a) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{14} \approx 3{,}74$ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{24} \approx 4{,}90$ Ángulo: $\alpha = 90º$
b) $x = \sqrt{\frac{35}{11}}$

Ejercicio 10:

a) $m = -\frac{1}{2}$
b) $\alpha = 139º\ 27'\ 51''$

Ejercicio 11:

$\sqrt{24} \approx 4{,}90$

Ejercicio 12:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$; $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$
b) En general no es cierto.

Ejercicio 13:

b) (1,5,3)

Ejercicio 14:

a) Hay dos soluciones: $\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}\right)$ y $\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right)$

b) Área $= \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{35} \approx 5{,}92\ u^2$

Ejercicio 15:

m=0

Ejercicio 16:

Volumen = 12

Ejercicio 17:

a) Hay dos soluciones: $\lambda_1 = 8;\ \lambda_2 = -2$
b) $\lambda = 3$

Ejercicio 18:

a) $m \neq 4$
b) Si

Ejercicio 19:

a) Volumen = 17
b) $[2\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \cdot (-17) = -34$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}] = 0$ (el tercer vector depende linealmente de los dos primeros).

Ejercicio 20:

a) Volumen = 4
b) $\alpha = 4$