Resumen Unidad 5: Vectores en el espacio.

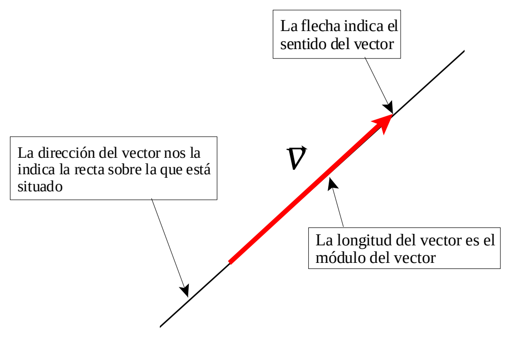
Preguntas 1 y 2: Vectores y operaciones con vectores.

En un vector $\vec{v}$ tenemos que distinguir:

Módulo: es la longitud del vector, se representa por $|\vec{v}|$

Dirección: es la dirección de la recta sobre la que está situado el vector.

Sentido: es el señalado por la punta de la flecha.



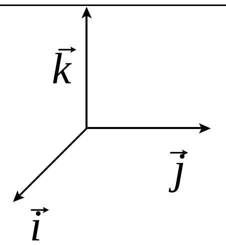
Vectores paralelos:
Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos si tienen la misma dirección, es decir si las rectas sobre la que están situados son rectas paralelas.

Cuando escribimos: $\vec{v} \,||\, \vec{w}$, queremos indicar que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dos vectores paralelos.

Vectores iguales: Diremos que dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Un vector lo podemos trasladar siempre que no se modifique el módulo, dirección y sentido. Podemos situar su origen en cualquier punto del espacio:

Base ortonormal: es un conjunto formado por tres vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ unitarios y perpendiculares dos a dos, matemáticamente:
$\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{j}$.
$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$



Dada una base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, cualquier vector $\vec{v}$, se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$$

Los números *a, b* y *c*, reciben el nombre de coordenadas respecto de la base.

Para abreviar escribimos el vector de la forma: $\vec{v} = (a, b, c)$, o bien $\vec{v}\ (a, b, c)$.

Operaciones con coordenadas:

Suma de vectores: Sean los vectores: $\vec{v}=(a,b,c)$ y $\vec{w}=(a',b',c')$, el vector suma es el vector: $\vec{v}+\vec{w}=(a,b,c)+(a',b',c')=(a+a',b+b',c+c')$

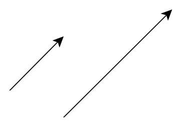
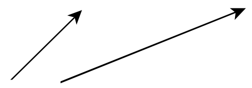
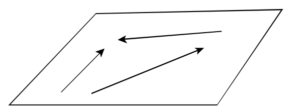
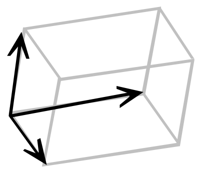
Se suma primera con primera, segunda con segunda y tercera con tercera.

Producto de un número por un vector: Sea el vector $\vec{v}=(a,b,c)$, y el número real k, entonces: $k\cdot\vec{v}=k\cdot(a,b,c)=(ka,kb,kc)$.

<u>Propiedades de las operaciones con vectores:</u>

Suma:		**Producto de un número por un vector:**	
Asociativa	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$	Asociativa	$a\cdot(b\cdot\vec{v})=(a\cdot b)\cdot\vec{v}$
Conmutativa	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$	Distributiva I	$(a+b)\cdot\vec{v}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{v}$
Vector nulo	$\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$	Distributiva II	$a\cdot(\vec{v}+\vec{w})=a\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{w}$
Vector opuesto	$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$	Producto por 1	$1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Pregunta 3: Rango de un conjunto de vectores. Interpretación geométrica.

	Significado geométrico.	
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente dependientes.	$\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos	
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes.	$\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos no paralelos	
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes y $\vec{w}$ es combinación lineal de ambos	Los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios.	
$\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes.	Los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son coplanarios.	

El rango de un conjunto de vectores es el número de vectores linealmente independientes.

Para estudiar la dependencia lineal o independencia lineal de un conjunto de vectores, hay que calcular el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores.

Se calcula, estudiando el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores:

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 1, 2), \vec{v} = (0,-1, 4), \vec{w} = (-2, 1, 8), \vec{t} = (0,-2, 8)$ el rango de los mismos es:

$$rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}) = rg\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \\ \vec{t} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{v} \\ \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{w} \\ \leftarrow \text{coordenadas de } \vec{t} \end{array}$$

	Interpretación gráfica
$rg(\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{w}) = 1$	Los vectores son todos paralelos.
$rg(\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{w}) = 2$	Los vectores son todos coplanarios.
$rg(\vec{u}, \vec{v}, \ldots, \vec{w}) = 3$	Los vectores no son coplanarios.

Para expresar un vector como combinación lineal de otro, hay que resolver un sistema de ecuaciones lineales:

Ejemplo: expresar el vector $\vec{u} = (-1,3,4)$, como combinación lineal de $\vec{v} = (1,6,3)$ y $\vec{w} = (-3,2,5)$.

Hay que calcular "*a*" y "*b*" tales que: $\vec{u} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$,

$$(-1,3,4) = a \cdot (1,6,3) + b(-3,2,5) \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{identificando} \\ \text{coordenadas} \rightarrow \end{array} \quad \begin{cases} a - 3b = -1 \\ 6a + 2b = 3 \\ 3a + 5b = 4 \end{cases}$$

Se trata de resolverlo

Expresión analítica del módulo de un vector:

Si $\vec{u} = (x, y, z)$, entonces $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Para obtener un vector unitario paralelo a $\vec{u}$ basta dividir por su módulo: $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Expresión analítica del coseno del ángulo que forman dos vectores.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Producto escalar.

Definición y cálculo:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Propiedades:

Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

Asociativa: $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$

Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

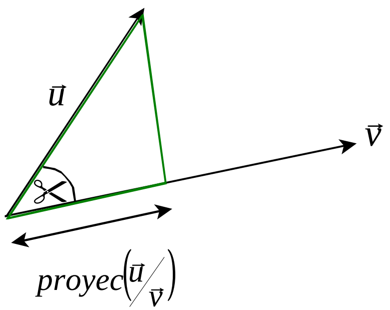
Relación con el módulo: $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$

Si $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{0}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$

Interpretación gráfica:

$$proyec\left(\vec{u}/\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



Producto vectorial.

Definición y cálculo: $\vec{u}\times\vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sentido el de avance de un sacacorchos que va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$, y su módulo:

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\vec{u},\vec{v})$

$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$

Propiedades:

No Conmutativa: $\vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v}$

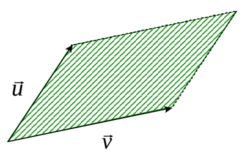
No Asociativa: $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

Distributiva: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

Si $\vec{u}\parallel\vec{v} \rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \vec{0} = (0, 0, 0)$

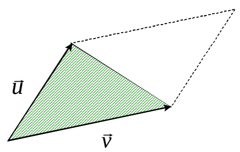
$\vec{0}\times\vec{u} = \vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}$

Interpretación gráfica:



Área del rectángulo:

$Área = |\vec{u}\times\vec{v}|$



Área del triángulo:

$Área = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2}$

Producto mixto.

Definición y cálculo:

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)\\ \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)\end{array}\right\} \rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

Propiedades:

No conmutativa: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$

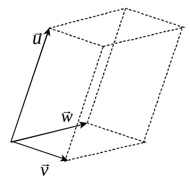
$[a\cdot\vec{u}, b\cdot\vec{v}, c\cdot\vec{w}] = a\cdot b\cdot c\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Distributiva: $[\vec{u}+\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{0}] = [\vec{u},\vec{0},\vec{v}] = [\vec{0},\vec{u},\vec{v}]$

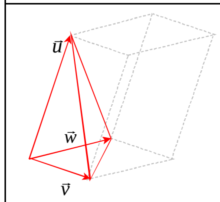
Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son coplanarios $\rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$

Interpretación gráfica:



Volumen del paralelepípedo:

$V = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$



Volumen del tetraedro:

$V = \frac{1}{6}\cdot|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$

Vectores paralelos y vectores perpendiculares.

Condición de paralelismo:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \parallel \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \leftrightarrow rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \leftrightarrow$ Las coordenadas son proporcionales: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ si $x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0,\ z_2 \neq 0$

Para obtener vectores paralelos a $\vec{u} = (x, y, z)$, basta considerar cualquier vector de la forma $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot x,\ \lambda \cdot y,\ \lambda \cdot z)$, donde λ es cualquier número real.

Condición de perpendicularidad:

Sean dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ no nulos:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \perp \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

Pero hay una forma muy sencilla de obtener rápidamente un vector perpendicular a otro:
Cambiar dos coordenadas de lugar, cambiando una de ellas de signo, y haciendo cero la otra coordenada:

$\vec{u} = (1,\ 2,\ 4)$ $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 0)$	En general: $\vec{u} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ $\vec{v} = (-\beta,\ \alpha,\ 0)$
$\vec{u} \perp \vec{v}$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = -2 + 2 = 0$	$\vec{u} \perp \vec{v}$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (-\beta) + \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot 0 = -\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha = 0$

Para obtener un vector perpendicular a dos vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ basta hacer el producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

La condición para que tres vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ sean coplanarios es :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$