PROGRAMACIÓN LINEAL **EJERCICIO TIPO**

Una confitería se elaboran tartas de nata y de manzana. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos.

Sabiendo que los precios de venta son 12 euros las tartas de nata y 15 euros las tartas de manzana, calcula cuántas tartas de cada tipo se debe hacer para que los ingresos por su venta sean máximos.

En primer lugar voy a trasladar el enunciado a lenguaje matemático.

Me fijo en lo que me preguntan: a una variable la llamo "x " y a otra "y".

Me preguntan que cuántas tartas de cada tipo se debe hacer para que los ingresos por su venta sean máximos.

Por tanto:

"x"= número de tartas de nata e "y"= número de tartas de manzana .

Una vez fijadas las incógnitas volvemos a leer el problema, e intentamos traducirlo a lenguaje matemático poco a poco.

En el enunciado me hablan de tartas de nata y manzana, de kg de azúcar y número de huevos. Voy a elaborar una tabla de doble entrada:

	Kg de azúcar	huevos
Tartas de nata	0´5	8
Tartas de manzana	1	6

Para obtener las restricciones voy a plantear otra tabla de doble entrada, haciendo ahora intervenir a las incógnitas "x" e "y" y añadiendo una fila más con los totales:

	Kg de azúcar	huevos
Nº de Tartas de nata = x	$0'5 \cdot x$	$8 \cdot x$
Nº de Tartas de manzana = y	y	$6 \cdot y$
Totales	$0'5x + y$	$8x + 6y$

"En la despensa quedan 10 kg de azúcar", por ello el número de kilos de azúcar no debe sobrepasar los 10.

Es decir: $0'5 \cdot x + y \leq 10$

"En la despensa quedan 120 huevos", por tanto el número de huevos no debe sobrepasar los 120.

Es decir: $8x+6y \le 120$

"Los precios de venta son 12 euros las tartas de nata y 15 euros las de manzana"

Entonces los ingresos de la venta serán $12x+15y$.

La función objetivo es $F(x,y)=12x+15y$ Y las restricciones son: $\begin{cases} 0'5x+y \le 10 \\ 8x+6y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$	Ya tenemos el problema escrito en lenguaje matemático

He añadido las dos últimas restricciones ya que lógicamente el número de tartas de nata y de manzana tiene que ser mayor o igual que cero.

A continuación, una vez escrito en lenguaje matemático el problema voy a resolverlo.

En principio puedo simplificar algunas restricciones:

$$\begin{cases} 0'5x+y \le 10 \xrightarrow{\times 2} x+2y \le 20 \\ 8x+6y \le 120 \xrightarrow{\div 2} 4x+3y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+2y \le 20 \\ 4x+3y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Voy a representar gráficamente la región factible

Comienzo por la inecuación que me parezca más complicada, en este caso $4x+3y \le 60$

Hago una tabla de valores con dos puntos de la recta $4x+3y=60$, bien por tanteo o paso a paso.

Paso a paso: " Se despeja una incógnita y se le da valores a la otra"

$$4x+3y=60 \longrightarrow 3y=60-4x \longrightarrow y=\frac{60-4x}{3}.$$

Le damos a la "x" los valores $x=0$ y $x=9$

x	y
0	20
9	8

Hago otra tabla de valores con dos puntos de la recta $x+2y=20$

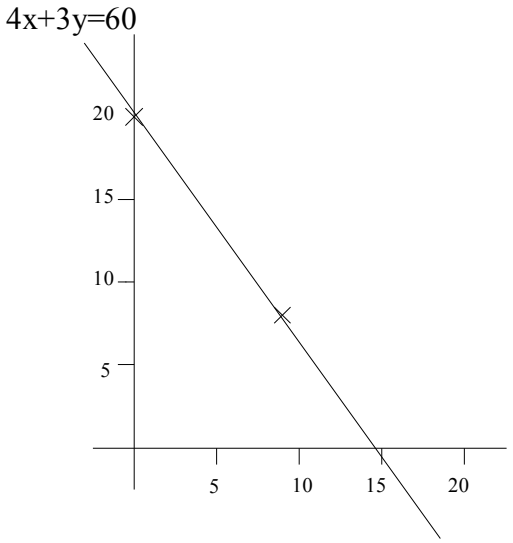
$x+2y=20 \longrightarrow x=20-2y$.

Le damos a la "y" los valores $y=0$ e $y=10$

x	y
20	0
0	10

Posteriormente represento primero las rectas y en segundo lugar cada uno de los semiplanos asociados a cada inecuación.

Represento $4x+3y=60$



Una vez representada la recta $4x+3y=60$ tengo que señalar el semiplano que es solución de la inecuación: $4x+3y \leq 60$.

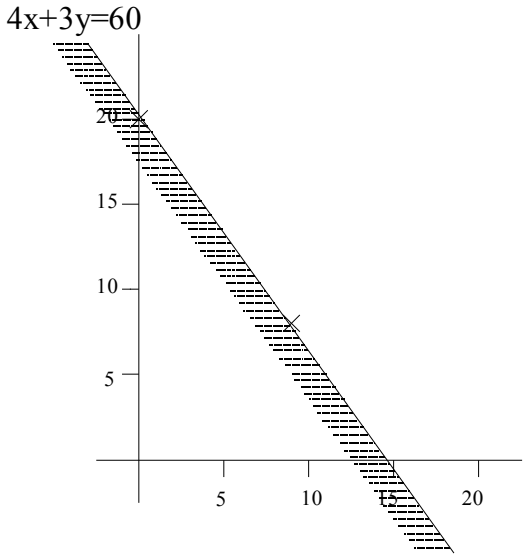
Para ello tomo un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo $(0,0)$ y lo sustituyo en la inecuación..

Si la inecuación se verifica entonces señalo el semiplano a donde pertenece el punto.

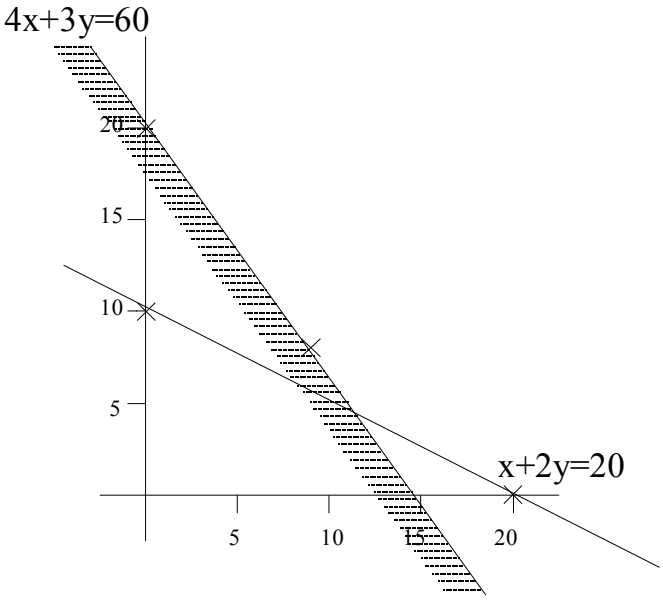
Si la inecuación no se verifica señalo el semiplano donde no se encuentre el punto.

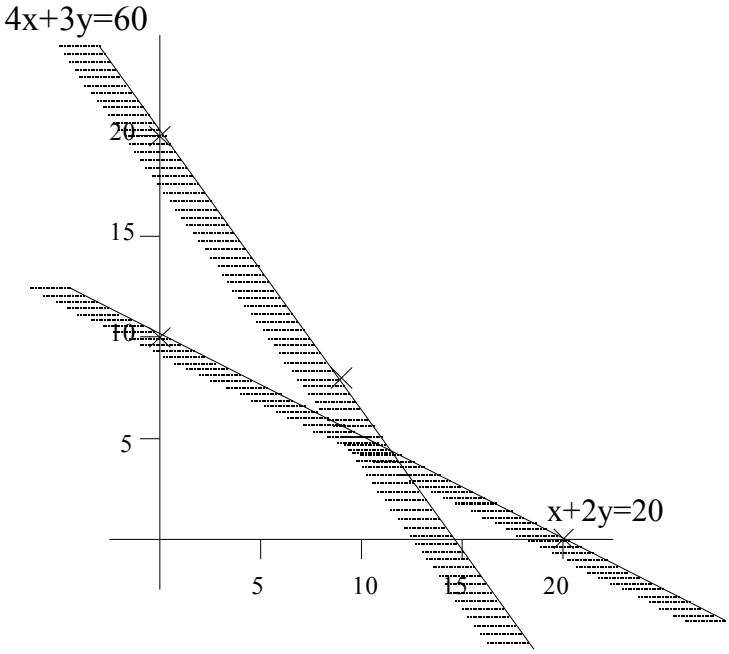
Tomo $(0,0)$ lo sustituyo en $4x+3y \leq 60$, obtengo $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 60 \longrightarrow 0 \leq 60$

Como es cierto que cero es menor o igual que sesenta tengo que señalar el semiplano al que pertenece el $(0,0)$:

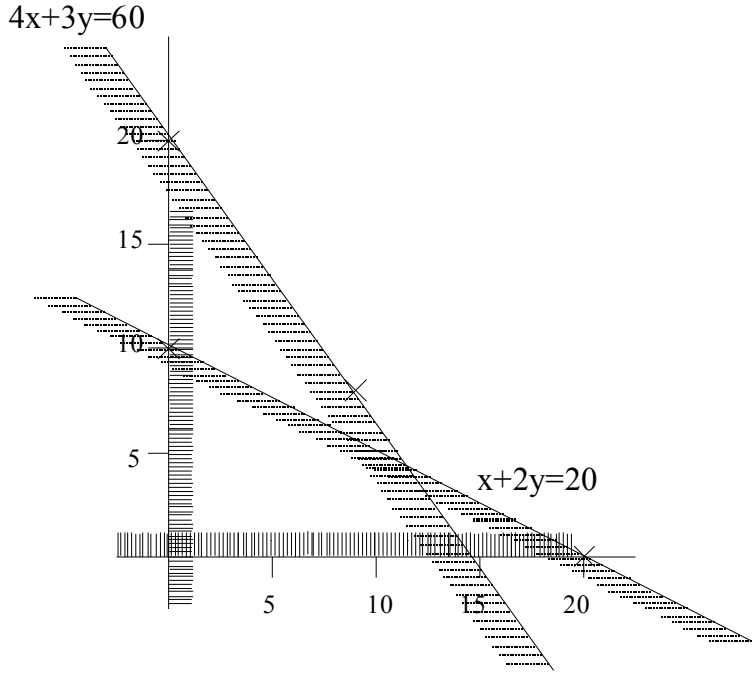


Posteriormente represento la recta $x+2y=20$

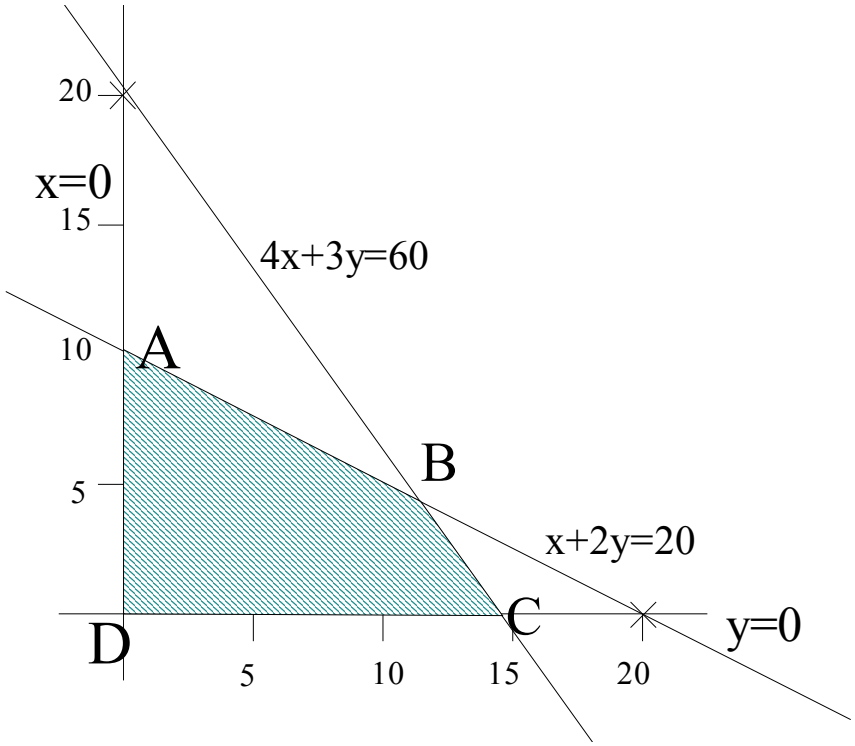
	Una vez representada la recta $x+2y=20$ tengo que señalar el semiplano que es solución de la inecuación: $x+2y \leq 20$. Tomo, por ejemplo el punto $(5,5)$ que no pertenece a la recta. Sustituyo las coordenadas en la inecuación: $5+2\cdot 5 \leq 20 \longrightarrow 15 \leq 20$ Como es cierto que quince es menor que veinte, selecciono el semiplano donde está el punto $(5,5)$



Señalamos en el plano los semiplanos determinados por las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$



Señalamos la región factible y calculamos sus vértices:



Posteriormente calculo sus vértices. Para ello por cada vértice tengo que resolver un sistema de ecuaciones formado por las dos rectas a las que pertenece el vértice.

Para calcular A resolvemos el sistema: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 20 \longrightarrow 2y = 20 \rightarrow y = \dfrac{20}{2} = 10 \end{cases}$

Luego las coordenadas del punto A son $(0,10)$

Calculamos las coordenadas de B: $\begin{cases} x+2y=20 \\ 4x+3y=60 \end{cases}$, lo hago por reducción:

$$\begin{cases} x+2y=20 \xrightarrow{\times(-4)} -4x-8y=-80 \\ 4x+3y=60 \qquad\qquad 4x+3y=60 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro: $-5y=-20 \longrightarrow y=\dfrac{-20}{-5}=4$

Sustituyo en la 1ª ecuación para hallar "x":

$x+2y=20 \rightarrow x+8=20 \rightarrow x=20-8 \rightarrow x=12$

Las coordenadas del vértice B son $(12,4)$.

Calculo las coordenadas de C: $\begin{cases} y=0 \\ 4x+3y=60 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=0 \\ 4x+3y=60 \longrightarrow 4x=60 \longrightarrow x=\dfrac{60}{4}=15 \end{cases}$$

Por tanto las coordenadas de C son: $(15,0)$.

Me faltan las coordenadas de D: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, por tanto D: $(0,0)$

Calculo el valor que toma la función objetivo, $F(x,y)=12x+15y$, en cada uno de los vértices:

A: $(0,10)$ $\quad F(0,10)=12\cdot 0+15\cdot 10=150$
B: $(12,4)$ $\quad F(12,4)=12\cdot 12+15\cdot 4=144+60=204 \quad \leftarrow$ Máximo
C: $(15,0)$ $\quad F(15,0)=12\cdot 15+15\cdot 0=180$
D: $(0,0)$ $\quad F(15,0)=12\cdot 0+15\cdot 0=0$

Por tanto el máximo se alcanza en el punto B: $(12,4)$, cuando $x=12$ e $y=4$.

En definitiva para obtener las mayores ganancias se debería de elaborar:

12 tartas de nata y 4 tartas de manzana. Los ingresos que se obtendrían serían 204 euros.