TEMA 7.- PROBABILIDAD


Blaise Pascal

El origen de la probabilidad es, sin duda, los juegos de azar. Un noble francés, el Caballero de Méré, amigo de Pascal, le propuso el siguiente problema:"*En el juego consistente en lanzar 24 veces un par de dados, ¿es lo mismo apostar la misma cantidad a favor o en contra de la aparición por lo menos de un seis doble en 24 tiradas?* Éste y otros problemas dan lugar a una correspondencia entre Pascal y Fermat en la que empiezan a formular los principios fundamentales del cálculo de probabilidades.
La correspondencia entre ambos inspiró al científico Huygen, quién publicó un breve tratado titulado *De ratiociniis in ludo aleae* (" Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados") en 1657.

1 Experimentos aleatorios

1.1. Experimentos aleatorios y sucesos

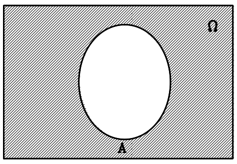
Un experimento es aleatorio cuando al repetirlo un determinado número de veces, en condiciones análogas, el resultado no puede predecirse, está sujeto al **azar**.
El conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral o espacio de posibilidades** y se designa genéricamente por **Ω**(o E).
Ejemplos: (a) Lanzar un dado . Ω={1,2,3,4,5,6} (b) Lanzar dos monedas . Ω={(C,C);(C,X);(X,C);(X,X)}

• **Suceso elemental:** Se llama suceso elemental a los posibles resultados de un experimento aleatorio que no se pueden descomponer en otros más sencillos; estos resultados son excluyentes entre sí.
Ejemplos: (a) {1}, {2}, {3}, {4},{5}, {6} (b) {(X,C)} ,{(C,X)} , {(X,X)} , {(C,C)}

• **Suceso:** Todo subconjunto del espacio muestral o, lo que es lo mismo, a la unión de cualquier número de sucesos elementales. Los sucesos se describen enumerando todos sus elementos o dando las condiciones que lo determinan.
Ejemplos: (a) A={ Obtener un nº par}={2,4,6}; (b) B={ Obtener al menos una cara}={(C,C);(C,X);(X,C)}

• **Suceso seguro:** Es el que se verifica siempre. El suceso seguro es Ω.

• **Suceso imposible:** El que nunca se verifica. Se equipara al conjunto vacío.∅



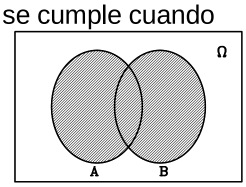
• **Suceso contrario de A:** Es el que se cumple cuando no se cumple A.
Equivale al complementario de A. Se denota por A^c o $\overline{A}$
Ejemplos: (a) A={ Obtener un nº par} A^c ={ Obtener un nº impar}={1,3,5}
(b) B={ Obtener al menos una cara} B^c={ (X,X)}

• **Suceso contenido en otro suceso:** El suceso A está contenido en el suceso B, y se designa por $A \subset B$, si todo suceso elemental de A lo es de B, es decir, siempre que se verifica el suceso A se verifica también el suceso B.
Ejemplos: (a) A = {2,4} ⊂ B = { Obtener un nº par} (b) A={ (C,C)} ⊂ B={ Obtener al menos una cara}

• **Espacio de sucesos:** El conjunto de todos los sucesos posibles de un experimento, es decir, es el conjunto de todos los subconjuntos del espacio muestral Ω. Se representa por S o *P(Ω).*El número de elementos de S es 2^n, siendo n el número de elementos del espacio muestral Ω.
Ejemplos: (a) S = { ∅, {1}, {2},...{1,2},{1,3},.....{2,3,6},....{1,4,5,6},......,{1,2,3,4,5,6}}
(b) S = {∅, {(C,C)},{(C,X)},.....{(C,C),(C,X)},....., Ω}

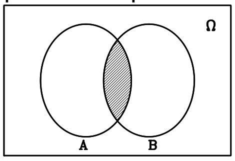
1.2. Álgebra de sucesos.

Unión de sucesos: Dados dos sucesos A y B, se define el suceso A∪B, como aquél que se cumple cuando se verifica A o se verifica B.
Ejemplos:
(a) A={ Obtener un nº par} B={ Obtener un nº menor que 3} A∪B={1,2,4,6}



(b) A={ Obtener al menos una cara} B={ Obtener resultados distintos en los lanzamientos} $A\cup B=\{(C,X);(X,C),(C,C)\}$

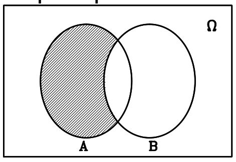
Intersección de sucesos: Se define la intersección de los sucesos A y B como el suceso que se cumple si tiene lugar A y B a la vez. Se verifican A y B simultáneamente.



Ejemplos:
(a) A={ Obtener un nº par} B={ Obtener un nº menor que 3} $A\cap B=\{2\}$
(b) A={ Obtener al menos una cara} B={ Obtener resultados distintos en los lanzamientos}
$A\cap B=\{(C,X);(X,C)\}$

Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible, se llaman **incompatibles o disjuntos**.
Ejemplos: (a) A= { Obtener un nº par } B= {1,3} $A\cap B=\varnothing$ (b) A={ (C,X)} B={(C,C);(X,X)} $A\cap B=\varnothing$

Diferencia de sucesos: Dados dos sucesos A y B, se define el suceso A \ B (o A-B), como aquel que se cumple cuando se cumple A, pero no B.
Fácilmente se ve que $A \setminus B = A\cap B^c$



Ejemplos:
(a) A={1,2,3,4} B={Obtener un nº impar} A-B={ 2,4}
(b) A={(C,X);(X,X)} B={ Los dos resultados sean iguales} A-B={(C,X)}

1.3. Propiedades de los sucesos.

Las operaciones de sucesos se basan en las operaciones con conjuntos; luego se pueden aplicar todas las propiedades de los conjuntos a los sucesos.

Propiedades	Operaciones	
	Unión	Intersección
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B) \cap C=A\cap(B\cap C)$
Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
	$A\cup\varnothing = A$ $A\cup A^c = \Omega$ $A\cup\Omega = \Omega$	$A\cap\varnothing=\varnothing$ $A\cap A^c = \varnothing$ $A\cap\Omega = A$
Distributivas	$A\cap(B\cup C)= (A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
Leyes de Morgan	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

2 Probabilidad de un suceso

2.1. Definición. Ley de los grandes números.

Si un experimento aleatorio se realiza n veces, llamamos:
Frecuencia de A (f_A) , al número de veces que se ha verificado A.
Frecuencia relativa de A, al cociente , f_A/n.
Ejemplo: Lanzar dos monedas 100 veces.

Suceso	(C,C)	(C,X)	(X,C)	(X,X)
Frecuencia	20	24	27	29
Frecuencia relativa	20/100	24/100	27/100	29/100

Cuando un experimento aleatorio se realiza innumerables veces, la frecuencia relativa de un suceso tiende a una constante, que se denomina **probabilidad de ese suceso.** Esta propiedad es conocida como **ley de los grandes números**, establecida por Jacob Bernouilli.

Esta definición presenta el inconveniente de tener que realizar el experimento un gran número de veces y además siempre obtendremos un valor aproximado de la probabilidad.

2.2. Definición axiomática

La definición axiomática de probabilidad se debe a Kolmogorov, quien consideró la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad cuando el número de veces que se realiza el experimento es muy grande.

Sea Ω el espacio muestral de cierto experimento aleatorio y S el correspondiente espacio de sucesos, llamaremos probabilidad a toda aplicación:

$$P : S \rightarrow [0,1] \text{ que verifica:}$$

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S$
2) Si $A \cap B = \varnothing \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3) $P(\Omega) = 1$

2.3. Definición de Laplace.

Si por razones de simetría pueden considerarse de igual probabilidad (equiprobables) los sucesos elementales de un determinado fenómeno aleatorio, la probabilidad de cada suceso puede establecerse a priori, de acuerdo con la llamada **Regla de Laplace**, que dice: " La probabilidad de un suceso A, se puede obtener dividiendo el número de casos favorables a la presencia del suceso A entre el número total de casos posibles ". Esto es:

$$\mathbf{P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables al suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}}$$

Ejemplo: Se lanzan dos dados al aire. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) {(2,3)}
b) {(2,1);(3,5);(2,6)}
c) La suma de los puntos sea 2.
d) La suma de los puntos sea 8.
e) Los resultados de los dos lanzamientos sean iguales.
f) La diferencia entre los puntos sea 3.

Ω = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) }

a) P({(2,3)}= 1/36
b) P({(2,1);(3,5);(2,6)})=3/36=1/12
c) P(La suma de los puntos sea 2)=P({(1,1)})=1/36
d) P(La suma de los puntos sea 8)=P({(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)}=5/36
e) P(Los resultados de los dos lanzamientos sean iguales)=P({(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)})=6/36=1/6
f) P(La diferencia entre los puntos sea 3)=P({(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)}=6/36=1/6

Podíamos haber realizado el ejercicio sin describir en detalle cada uno de los sucesos y el espacio de posibilidades .

2.4 Propiedades de la probabilidad.

1) $P(A^c) = 1 - P(A)$
2) $P(\varnothing) = 0$
3) Si A y B son dos sucesos tales que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
4) Si A_1 , A_2,...., A_k son sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$) , entonces:
   $P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_k)$
5) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
   Si A y B son disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) entonces tenemos $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$
6) $P(B) = P(B \cap A) + P(B-A) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$

Ejemplos:

1.- En una comarca hay 2 periódicos: El Progresista y el Liberal. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee El Progresista (P), el 40% lee EL Liberal (L) y el 25% no lee ninguno de ellos.

Expresa en función de P y L los siguientes sucesos:

a) Leer los 2 periódicos. b) Leer sólo el Liberal. c) Leer sólo El Progresista. d) Leer alguno de los dos periódicos.
e) No leer ninguno de los dos. f) Leer sólo uno de los dos.
g) Calcula las probabilidades de los sucesos P,L,$P \cup L$,$P \cap L$,L-P, P-L

Sol: a) ,$P \cap L$ b) $L \cap P^c = L \setminus P$ c) $P \cap L^c$ d) $P \cup L$ e) $P^c \cap L^c$ f)) $(L \cap P^c) \cup (P \cap L^c)$

g) Sabemos P(P) = 0'55, P(L)=0'4 y $P(P^c \cap L^c) = 0'25$ y los contrarios $P(P^c) = 1-0'55 = 0'45$, $P(L^c) = 0'6$ y $P((P^c \cap L^c)^c) = 0'75$ pero por las Leyes de Morgan, sabemos que $(P^c \cap L^c)^c = P \cup L \Rightarrow P(P \cup L) = 0'75$

Como $P(P\cup L) = P(P) + P(L) - P(P\cap L)) \Rightarrow P(P\cap L) = P(P) + P(L) - P(P\cup L)) = 0'55 + 0'4 - 0'75 = 0'2$
$L-P = L\cap P^c$ y se tiene que $P(L) = P(L\cap P) + P(L\cap P^c)$ de donde $P(L\cap P^c) = P(L) - P(L\cap P) = 0'4 - 0'2 = 0'2$.
Análogamente $P(P-L) = (P\cap L^c) \Rightarrow P(P\cap L^c) = P(P) - P(P\cap L)) = 0'55 - 0'2 = 0'35$
También, podíamos haber hecho de otra forma el ejercicio, construyendo una tabla:

	P	P^c	
L	20	20	**40**
L^c	35	**25**	60
	55	45	**100**

Y con esta tabla podemos contestar a todos los apartados. En negrilla están los datos del problema y a partir de ellos rellenamos los restantes.

2.- Se sabe que A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 1/2$, $P(B^c)=5/8$, $P(A\cup B)=3/4$.
Halla las probabilidades de los sucesos $A\cap B$, $A^c\cap B^c$, $A^c\cup B^c$ y $A^c\cap B$.
$P(B^c) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = 3/8$; $P(A\cup B) = P(A) + P(B) + P(A\cap B) \Rightarrow 3/4 = 1/2 + 3/8 + P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 1/8$
$P(A^c\cap B^c) = \{\text{ley de Morgan}\} = P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 3/4 = 1/4$
$P(A^c\cup B^c) = \{\text{ley de Morgan}\} = P((A\cap B)^c) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 1/8 = 7/8$
$P(B) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) \Rightarrow 3/8 = 1/8 + P(A\cap B^c) \Rightarrow P(A\cap B^c) = 2/8 = 1/4$

3 Probabilidad condicionada

3.1. Definición de probabilidad condicionada.

Sean A y B dos sucesos del espacio de sucesos S tal que $P(A) \neq 0$, se llama probabilidad de B condicionada a A , P(B/A), a la probabilidad de que ocurra B tomando como espacio muestral A, es decir, la probabilidad de que ocurra B dado que ha sucedido A.

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}}$$

El cálculo directo de las probabilidades condicionadas es posible muy a menudo; en tal caso, la fórmula de la definición anterior puede usarse en sentido inverso:

$$P(A\cap B)=\cdot P(A/B).P(B)$$

Ejemplos:
1.- Si en el experimento de "lanzar un dado al aire" se nos pide la probabilidad de obtener un 3 sabiendo que ha salido un número impar:

Definimos B = { sacar 3} A = {sacar nº impar} ={1,3,5} ; entonces, P(B/A) = 1/3 puesto que si sabemos que ha salido un nº impar; los casos posibles ahora son 3 y los favorables al suceso al suceso A sólo 1.
2.- Un recaudador de impuestos del ayuntamiento controla tres edificios A, B y C, con un total de 125 pisos. Un año, el número de pisos con la contribución pagada y no pagada es:

Edificio	A	B	C
Pagadas (S)	23	30	32
No pagadas	18	12	10

Halla la probabilidad de que un piso, elegido al azar:

a) sea de la casa A
b) haya pagado la contribución sabiendo que es de la casa A
c) haya pagado la contribución y sea de la casa A.

Para empezar, lo más aconsejable es nombrar todos los sucesos que intervienen en el problema :
A = { es de la casa A} S = { ha pogado }
a) P(A) = nº de pisos del edificio A /nº de pisos = (23 + 18) / 125 = 41/125
b) P(haya pagado sabiendo que es de la casa A} = P(S/A) =
= nº de pisos que han pagado en A/ nº de pisos del edificio A = 23/ (23 + 18) = 23/41
c) P(haya pagado y sea de la casa A) = $P(S\cap A)$ = nº de pisos pagados en A/nº de pisos = 23/125
Observa que $P(S/A) = P(S\cap A) / P(A)$

3.2. Independencia de sucesos.

Dos sucesos A y B son **independientes** cuando el cumplimiento de uno no influye en la probabilidad de verificación del otro. En caso contrario, los sucesos son **dependientes,** también podemos decir que un suceso está condicionado por el otro.

Ejemplo: Si de una urna con 4 bolas rojas y 4 bolas negras extraemos dos bolas consecutivas (**sin reemplazamiento**), la probabilidad de que la primera sea roja es 4/8 ; la probabilidad de que la segunda vuelva a ser roja es 3/7. Los sucesos " primera roja " y "segunda roja" son dependientes, sus probabilidades son diferentes.
Si ahora extraemos las bolas **con reemplazamiento** (volvemos a poner la que sacamos), la probabilidad de que la primera sea roja es 4/8; la probabilidad de que la segunda vuelva a ser roja es 4/8. En este nuevo experimento los sucesos "primera roja" y "segunda roja" son independientes.

Dos sucesos A y B son **independientes** si: $P(B)=P(B/A)$ y $P(A)=P(A/B)$
En consecuencia, dos sucesos son independientes si se verifica que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
Este resultado es de gran utilidad si se repite varias veces el mismo experimento aleatorio.

Ejemplo: Si lanzamos una moneda al aire 6 veces, la probabilidad de que salgan seis caras es
$P(\text{6 caras}) = =0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=(0{,}5)^6$, ya que al lanzar la moneda cada vez la probabilidad de que salga cara es siempre 0,5.

3.3. Teorema de probabilidad total

Si B_1 , B_2 ,..., B_n son sucesos del experimento Ω ,disjuntos dos a dos, y tales que $B_1\cup B_2\cup ...\cup B_n = \Omega$, entonces para cualquier suceso A se verifica:

$P(A) = \{A\cap\Omega = A\} = P(A\cap\Omega) = \{B_1\cup B_2\cup ...\cup B_n = \Omega\} = P(A\cap(B_1\cup B_2\cup ...\cup B_n) = \{$*propiedad distributiva de los sucesos*$\}$ $= P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup \ldots\ldots\cup(A\cap B_n)) == \{A\cap B_i$ y $A\cap B_j$ son sucesos disjuntos y por la propiedad 4 de la probabilidad$\} == P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \ldots\ldots + P(A\cap B_n) = \{$definición de probabilidad condicionada$\}=$ $P(A/B_1)xP(B_1) + P(A/B_2)xP(B_2) +\ldots+ P(A/B_n)xP(B_n)$
En definitiva:

$$\mathbf{P(A) = P(A/B_1)xP(B_1) + P(A/B_2)xP(B_2) +\ldots+ P(A/B_n)xP(B_n)}$$

que es la **fórmula de la probabilidad total**, donde en todos los casos suponemos que la probabilidad de los B_k es distinta de 0.

Ejemplos:
1.- Se dispone de tres monedas: dos de ellas son legales y una tercera moneda está trucada, ya que tiene dos caras. Si se elige al azar una moneda y se lanza al aire, calcula la probabilidad de obtener cara.
Para empezar, lo más aconsejable es nombrar todos los sucesos que intervienen en el problema:
C = {obtener cara} M1 = { la moneda elegida es la 1} M2 ={la moneda elegida es la 2}
M3 = { la moneda elegida es la 3} . Es evidente que : P(M1) =P(M2) =P(M3) = 1/3
Observemos que los sucesos M1, M2 y M3 son incompatibles dos a dos (ya que se elige una sola moneda), y además $M1\cup M2\cup M3 = \Omega$. Podemos aplicar el teorema de la probabilidad total:
P(C) = P(C/M1)xP(M1) + P(C/M2)xP(M2) + P(C/M3)xP(M3) = (1/3)x(1/2) + (1/3)x(1/2) + (1/3)x1 = 2/3
Estos problemas se pueden hacer también con un diagrama de árbol

2.- Una fábrica de coches tiene tres cadenas distintas de producción que fabrican, respectivamente, 50%, 25%, 25% del total de los coches producidos. La probabilidad de que un coche sea defectuoso es: para la primera cadena 1/2 , para la segunda 1/4 y para la tercera 1/6. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea defectuoso?
I={ el coche es de la 1ª cadena} II={ el coche es de la 2ª cadena} III = { el coche es de la cadena 3ª}
Estos sucesos son incompatibles dos a dos: cada coche procede de una única cadena.
De las cuotas de producción se deduce que : P(I) =0.50 , P(II) = 0.25 , P(III)=0.25
D= { el coche es defectuoso}
Podemos aplicar el teorema de probabilidad total:
P(D) = P(D/I)xP(I) + P(D/II)xP(II) + P(D/III)xP(III) = (1/2)x0.50 + (1/4)x0.25 + (1/6)x0.25 = 17/48

3.4. Teorema de Bayes

Nos permite calcular las probabilidades a posteriori.

Si B_1 , B_2 ,..., B_n son sucesos de probabilidad positiva del experimento Ω ,disjuntos dos a dos, y tales que $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, entonces para cualquier suceso A de probabilidad positiva, de acuerdo con la definición, se verifica:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A / B_i) x P(B_i)}{P(A)}$$

lo cual, combinado con la fórmula de las probabilidades totales, da

$$\mathbf{P(B_i/A)= \frac{P(A/B_i)xP(B_i)}{P(A/B_1)xP(B_1) + P(A/B_2)xP(B_2) + \ldots + P(A/B_n)xP(B_n)}}$$

<u>Ejemplos:</u>

1.- Tenemos tres urnas: U1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U1?

Llamamos R al suceso "sacar bola roja" y N al suceso "sacar bola negra". De los datos del problema se deduce:

P(R/U1) = 3/8   P(R/U2) = 2/3   P(R/U3) = 2/5   P(U1)=P(U2)=P(U3)=1/3

La probabilidad pedida es P(U1/R). Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(U1/R) = \frac{P(U1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R/U1)xP(R)}{P(R/U1)xP(U1) + P(R/U2)xP(U2) + P(R/U3)xP(U3)} =$$

$$= \frac{(1/3)x(3/8)}{(1/3)x(3/8) + (1/3)x(2/3) + (1/3)x(2/5)} = \frac{45}{173} = 0.260$$

Al igual que con la probabilidad total, podemos hacer también diagramas de árbol

2.- En el ejemplo de la fábrica de coches del apartado anterior: Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la primera cadena?

La probabilidad pedida es $P(I/D^c)$. Hemos visto que P(D) = 17/48 $\Rightarrow$ $P(D^c)$ = 1 – 17/48 = 31/48.

Si P(D/I) = 1/2 entonces $P(D^c/I)$ = 1 – P(D/I) = 1/2 . De la misma forma $P(D^c/II)$ =3/4 y $P(D^c/III)$ = 5/6

Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(I/D^C) = \frac{P(I \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{P(D^C/I)xP(I)}{P(D^C)} = \frac{(1/2)x(1/2)}{31/48} = \frac{12}{41}$$

Actividades resueltas

1 Se extraen sucesivamente tres bolas de una urna que contiene blancas y negras. Describir el espacio de posibilidades que corresponde a este experimento y los sucesos siguientes:

Ω={BBB,BBN,BNB,BNN,NNN,NNB,NBN,NBB}

a) "obtener más bolas blancas que negras" {BBB,BBN,BNB,NBB}

b) "la primera y la última bolas son negras" {NBN,NNN}

c) "la primera y la última bolas son blancas" {BBB,BNB}

d) "las dos primeras bolas son iguales" {BBB,BBN,NNN,NNB}

e) el contrario de "alguna bola es blanca" {NNN}

2 En una carrera participan los caballos A,B,C y D. Se estima que la probabilidad de que gane A es el doble la probabilidad de que gane uno de los otros tres. Hallar la probabilidad de que gane B o C.

A={gane el caballo A}   B={gane el caballo B}   C={gane el caballo C}   D={gane el caballo D}

P(A)=2x P(B)=P(C)=P(D)=x

P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 $\Rightarrow$ 2x+x+x+x=1 $\Rightarrow$ x=1/5 $\Rightarrow$ P(A)=2/5 y P(B)=P(C)=P(D)=1/5

A,B,C y D son sucesos disjuntos (no pueden ganar dos caballos)

$P(B \cup C)=P(B)+P(C)-P(B \cap C)=P(B)+P(C)-P(\emptyset)=1/5+1/5-0=$**2/5**

3 Regularmente, el 37% de la población va al cine, el 11% al teatro y el 6% a ambas cosas. Hallar la proporción de personas que asisten regularmente a uno o otro tipo de espectáculo.

C={asistir al cine}   T={asistir al teatro}   P(C)=0,37   P(T)=0,11 $P(C \cap T)$=0,06

$P(C \cup T)$=P(C) + P(T) - $P(C \cap T)$= 0,37 + 0,11 - 0,06 = 0,42   **Un 42% de la población**

4 La probabilidad de que un hombre y una mujer de 40 años vivan hasta los 75 son 0,49 y 0,53, respectivamente. Halla la probabilidad de que:

a) los dos cumplan 75 años;

M={la mujer cumple 75 años} H={el hombre cumple 75 años} , M y H son sucesos independientes

$P(M)=0{,}53 \Rightarrow P(M^c)=0{,}47$ $P(H)=0{,}49 \Rightarrow P(H^c)=0{,}51$

P({los dos cumplan 75 años})=$P(M\cap H)=P(M)\cdot P(H)=0{,}53\cdot 0{,}49=$**0,2597**

b) alguno de los dos llegue a los 75 años;

P({alguno de los dos llegue a los 75 años})=$P(M\cup H)=P(M)+P(H)-P(M\cap H)=0{,}53+0{,}49-0{,}2597=$**0,7603**

c) ninguno llegue;

P({ninguno llegue})=$P(M^c\cap H^c)=0{,}47\cdot 0{,}51=$**0,2397**

d) sólo la mujer llegue a cumplir los 75 años.

P({sólo la mujer llegue a cumplir los 75 años})=$P(M\cap H^c)=0{,}53\cdot 0{,}51=$**0,2703**

5 Un estudiante de bioquímica busca una fórmula que necesita para un trabajo en tres manuales de bioquímica. Las probabilidades de que la encuentre en el primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0,5; 0,6 y 0,7. Hallar la probabilidad de que se encuentre:

a) Solamente en un manual

M_i={encontrar la fórmula en el manual i-ésimo} $P(M_1)=0{,}5$; $P(M_2)=0{,}6$; $P(M_3)=0{,}7$

M_1 , M_2 y M_3 son sucesos independientes.

P({Solamente en un manual})=$P(M_1\cap M^c_2\cap M^c_3)+P(M^c_1\cap M_2\cap M^c_3)+P(M^c_1\cap M^c_2\cap M_3)=$

$=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7=$**0,29**

b) Únicamente en dos manuales

P({Únicamente en dos manuales})=$P(M_1\cap M_2\cap M^c_3)+P(M_1\cap M^c_2\cap M_3)+P(M^c_1\cap M_2\cap M_3)=$

$=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=$**0,44**

c) En los tres manuales

P({En los tres manuales})=$P(M_1\cap M_2\cap M_3)=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=$**0,21**

6 Un avión tiene cinco bombas. Desea destruir un puente. La probabilidad de destruirlo de un bombazo es 1/5. ¿Cuál es la probabilidad de que destruya el puente?

D_i ={destruir el puente con la bomba i-ésima} D_i^C ={no destruir el puente con la bomba i-ésima}

Los D_i son sucesos independientes.

$P(D_i)=1/5=0{,}2$ $P(D_i^C)=4/5=0{,}8$

P({destruir el puente})=1 - P({no se destruye})= 1 - P({todas las bombas fallan})=

$= 1 - P(D_1^C\cap D_2^C\cap D_3^C\cap D_4^C\cap D_5^C)= 1 - 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=1 - 0{,}32768 =$ **0,67232**

7 Cada recién nacido tiene probabilidad 0,51 de ser varón. Si en una clínica se han producido cinco nacimientos durante la noche, ¿qué probabilidad hay de que haya al menos una niña?

P({al menos una niña})=1 - P({todos son varones})=$1 - 0{,}51\cdot 0{,}51\cdot 0{,}51\cdot 0{,}51\cdot 0{,}51=1 - 0{,}0345=$**0,9655**

8 En un centro escolar, los alumnos de Bachillerato pueden optar por cursar como lengua extranjera entre inglés o francés. En un determinado curso, el 90% estudia inglés, y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son varones y de los que estudian francés son chicos el 40%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

I={estudiar inglés} F={estudiar francés} V={ser varón} H={ser hembra}

$P(I)=0{,}90$ $P(F)=0{,}10$

$P(V/I)=0{,}30 \Rightarrow P(H/I)=0{,}70$ $P(V/F)=0{,}40 \Rightarrow P(H/F)=0{,}60$

$P(H)=P(H/I)\times P(I)+P(H/F)\times P(F)=0{,}70\times 0{,}90+0{,}60\times 0{,}10=$ **0,69**.

9 Una caja contiene tres monedas P,S,T, la primera normal, la segunda tiene cara por los dos lados y la tercera está trucada de forma que la probabilidad de salir cara es 1/3. Se elige una moneda al azar y se tira; hallar la probabilidad de que se obtenga cara.

P={elegir la moneda P} S={elegir la moneda S} T={elegir la moneda T}

Suponemos que los sucesos P, S y T son equiprobables, por tanto: $P(P)=P(S)=P(T)=1/3$

C={salir cara} X={salir cruz}

$P(C/P)=1/2$ $P(C/S)=1$ $P(C/T)=1/3$

$P(C)=P(C/P)\cdot P(P) + P(C/S)\cdot P(S) + P(C/T)\cdot P(T)= (1/2)\cdot(1/3) + (1)\cdot(1/3) + (1/3)\cdot(1/3)=$ **11/18**

10 De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 negras, se extraen dos sucesivamente. Hallar la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda blanca; y la probabilidad de que sea blanca la segunda, condicionado porque ha sido negra la primera.

B_2 ={la bola segunda es blanca} N_1 ={la bola primera es negra}

La primera bola puede ser cualquiera de las 8, y la segunda ha de ser de las 7 restantes, por tanto, tenemos 8x7 extracciones posibles. Para que la primera sea negra tenemos 3 bolas, y para la segunda blanca 5 bolas, es decir, en 3x5 casos la primera es negra y la segunda blanca.

$P(N_1 \cap B_2)=(3 \cdot 5)/(8 \cdot 7)=\mathbf{0,2678}$ $P(B_2/N_1)=P(N_1 \cap B_2)/P(N_1)=[(3 \cdot 5)/(8 \cdot 7)]/(3/8)=5/7=\mathbf{0,7142}$

El problema resulta más simple si contestamos primero a la segunda cuestión:

$P(B_2/N_1)=5/7=\mathbf{0,7142}$ $P(N_1 \cap B_2)=P(B_2/N_1) \cdot P(N_1)=(5/7) \cdot (3/8)=(3 \cdot 5)/(8 \cdot 7)=\mathbf{0,2678}$

11 En un montón hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor es de 0,95; mientras para el rifle sin visor es de 0,65. Halla la probabilidad de hacer blanco cogiendo un rifle al azar.

Si el tirador ha hecho blanco, ¿qué es más probable: que haya disparado con un rifle con visor o sin él?

V={elegir un rifle con visor} V^c={elegir un rifle sin visor}

B={dar en el blanco} B^c={no dar en el blanco}

$P(V)=4/10=2/5=0,4$ $P(V^c)=6/10=3/5=0,6$

$P(B/V)=0,95 \Rightarrow P(B^c/V)=0,05$ $P(B/V^c)=0,65 \Rightarrow P(B^c/V^c)=0,35$

$P(B)=P(B/V) \cdot P(V)+P(B/V^c) \cdot P(V^c)=0,95 \cdot 0,4+0,65 \cdot 0,6=\mathbf{0,77}$

$(V/B)=P(V \cap B)/P(B)=[P(B/V) \cdot P(V)]/P(B)=[0,95 \cdot 0,4]/0,77=\mathbf{0,493} \Rightarrow P(V^c/B)=\mathbf{0,507}$.

Con visor ("por poco")

12 En un hotel hay 100 clientes, 40 españoles y 60 alemanes. De los españoles 35 son morenos y 5 rubios; en cambio, entre los alemanes hay 45 rubios y 15 morenos. Si llega un cliente, ¿qué probabilidad hay de que sea moreno ? ¿Y de que sea alemán? Si es alemán, ¿qué probabilidad hay de que sea moreno? Si es moreno, ¿qué probabilidad hay de que sea alemán?

E={español} A={alemán} ; M={moreno} R={rubio}

$P(M)=(35+15)/100=\mathbf{1/2}$ $P(A)=60/100=\mathbf{3/5}$ $P(M/A)=15/60=\mathbf{1/4}$

$P(A/M)=P(A \cap M)/P(M)=(15/100)/(50/100)=15/50=\mathbf{3/10}$

13 Una enfermedad puede ser producida por tres virus, A, B y C. En un laboratorio se tienen tres tubos con virus A, dos con virus B y cinco con virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3; que la produzca el virus B es 2/3, y que la produzca el virus C es 1/7. Se inocula al azar un virus a un animal y contrae la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus que se le inoculó fuera de tipo C?

A={elegir el virus tipo A} B={elegir el virus tipo B} C={elegir el virus tipo C}

E={producir la enfermedad}

Del tipo A hay 3 tubos de un total de 10, por tanto: P(A)=3/10

Del tipo B hay 2 tubos de un total de 10, por tanto: P(B)=2/10=1/5

Del tipo C hay 5 tubos de un total de 10, por tanto: P(C)=5/10=1/2

$P(E/A)=1/3$ $P(E/B)=2/3$ $P(E/C)=1/7$

$$P(C/E)=\frac{P(E/C)xP(C)}{P(E/A)xP(A)+P(E/B)xP(B)+P(E/C)xP(C)}=\frac{\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}}=\mathbf{0.234}$$

14 En una ciudad el 60% de los días son soleados, el 30% llueve y el 10% hay niebla. Se ha comprobado que la probabilidad de sufrir un accidente de tráfico en un día soleado es 0,0001, en un día lluvioso 0,001 y en un día con niebla 0,01. Si un amigo, residente en la ciudad, ha sufrido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que hubiese niebla?

S={soleado} LL={lluvioso} N={con niebla} A={sufrir un accidente}

$P(S)=0,60$ $P(LL)=0,30$ $P(N)=0,10$

$P(A/S)=0,0001$ $P(A/LL)=0,001$ $P(A/N)=0,01$

$$P(N/A)=\frac{P(A/N)xP(N)}{P(A/S)xP(S)+P(A/LL)xP(LL)+P(A/N)xP(N)}=\frac{0.01\times0.10}{0.0001\times0.6+0.001\times0.3+0.01\times0.10}=\mathbf{0.735}$$