SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2013 MODELO 1 (RESERVA 2)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

(2'5 puntos) Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

Solución

Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

"x" = Número de anillos primer tipo.
"y" = Número de anillos segundo tipo.

Función Objetivo **F(x,y) = 150x + 100y**. (los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 € el primero y 100 € el segundo)

Restricciones:

De "dispone de 48 g de oro, el primer tipo precisa 4 g de oro, el segundo necesita 3 g de oro", tenemos $\rightarrow$ $4x + 3y \le 48$

De "dispone de 20 g de plata, el primer tipo precisa 2 g de plata, el segundo necesita 1 g de plata", tenemos $\rightarrow$ $2x + y \le 20$

"Se fabrica algún anillo" $\rightarrow$ $x \ge 0$, $y \ge 0$

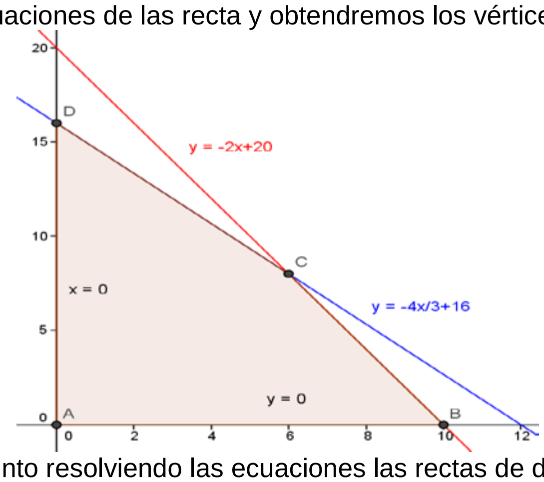
Resumiendo tenemos las desigualdades: $4x + 3y \le 48$, $2x + y \le 20$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Las desigualdades $4x + 3y \le 48$, $2x + y \le 20$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $4x + 3y = 48$, $2x + y = 20$, $x = 0$, $y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y", y tenemos:

$$y = -4x/3 + 16, \quad y = -2x + 20, \quad x = 0, \quad y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas, que es la región factible que sabemos es un polígono convexo. Resolveremos las ecuaciones de las recta y obtendremos los vértices de dicho polígono convexo.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, luego el vértice A es el punto A(0,0)

De $y = 0$ e $y = -2x + 20$, tenemos $0 = -2x + 20$, luego $x = 10$. El vértice B es el punto B(10,0).

De $y = -2x+20$ e $y = -4x/3+16$, tenemos $-2x+20 = -4x/3+16$, es decir $-6x+60 = -4x+48$, luego $12 = 2x$ por tanto $x = 6$ e $y = 8$. El vértice C es el punto C(6,8).

De $x = 0$ e $y = -4x/3 + 16$, tenemos $y = 16$. El vértice D es el punto D(0,16).

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16).

La región factible es el polígono convexo dibujado anteriormente con sus bordes y con vértices en los puntos

A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16).

Calculemos el mínimo de la función F(x,y) = 150x + 100y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(10,0), C(6,8) y D(0,16). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 150(0) + 100(0) = 0; F(10,0) = 150(10) + 100(0) = 1500;
F(6,8) = 150(6) + 100(8) = **1700**; F(0,16) = 150(0) + 100(16) = 1600
Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1700** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(6,8), es decir los ingresos máximos son de 1700 € y se alcanzan al producir 6 anillos del primer tipo y 8 del segundo tipo**.

EJERCICIO 2 (A)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ -2x + 11 & \text{si } 4 < x \le 5 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función f(x) en el punto de abscisa *x* = 4.
b) (1'5 puntos) Represente gráficamente la función f(x) e indique dónde alcanza su máximo y su mínimo absolutos. ¿Cuál es el valor del máximo? ¿Y del mínimo?

Solución

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ -2x + 11 & \text{si } 4 < x \le 5 \end{cases}$

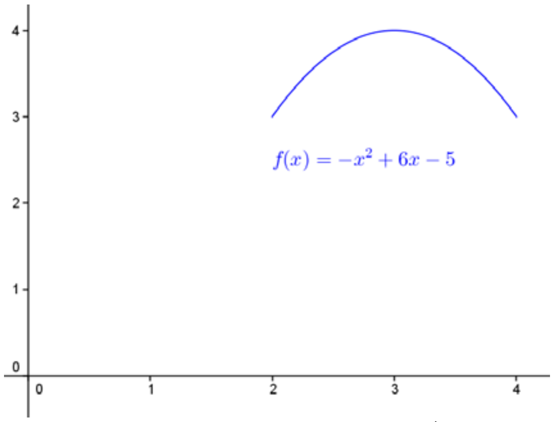
a)
Estudie la derivabilidad de la función f(x) en el punto de abscisa *x* = 4.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua. Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 4.
La función e^x es una función exponencial y es continua y derivable en R, en particular en x < 0.

f(x) es continua en x = 4 si $f(4) = \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^+} f(x)$.
$f(4) = \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} (-x^2 + 6x - 5) = -(4)^2 + 6(4) - 5 = 3$; $\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} (-2x + 11) = -2(4) + 11 = 3$, por tanto f(x) es continua en x = 4.

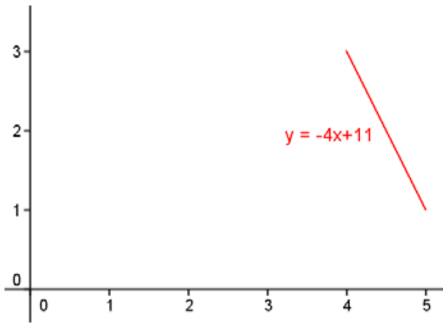
$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ -2x + 11 & \text{si } 4 < x \le 5 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -2 & \text{si } 4 < x < 5 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 4 si $\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to4^-} f'(x) = \lim_{x\to4^-} (-2x + 6) = -2(4) + 6 = -2$; $\lim_{x\to4^+} f'(x) = \lim_{x\to4^+} (-2) = -2$. Como los resultados son iguales, **f(x) es derivable en x = 4.**
b)
Represente gráficamente la función f(x) e indique dónde alcanza su máximo y su mínimo absolutos. ¿Cuál es el valor del máximo? ¿Y del mínimo?
$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ -2x + 11 & \text{si } 4 < x \le 5 \end{cases}$
Si $2 \le x \le 4$, $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, cuya gráfica es un trozo parábola, que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, con $f(2) = -(2)^2 + 6(2) - 5 = 3$, $f(4) = -(4)^2 + 6(4) - 5 = 3$, y con vértice en la abscisa en x = -6/-2 = 3, que sabemos es un máximo. El vértice es V(3,f(3)) = V(4,1).
La gráfica de la parábola, ente 2 y 4, es:

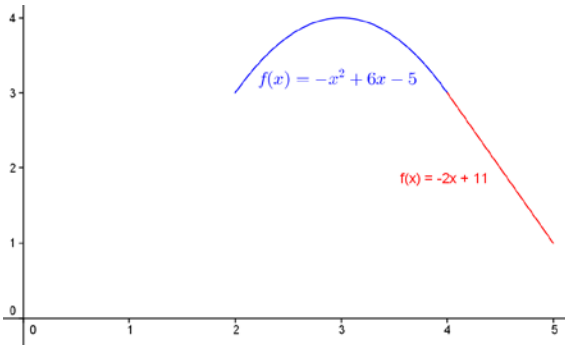


Si 4 < x ≤ 5, f(x) = -2x + 11, tiene por gráfica un segmento con $f(4^+)$ = 3 y f(5) = 1

Su gráfica es



Juntando ambas gráficas tenemos que la gráfica de f(x) es:



Observando la gráfica vemos que **el máximo absoluto coincide con el vértice de la rama parabólica V(3,4), es decir se alcanza en x = 3 y vale f(3) = 4 y el mínimo absoluto se alcanza en x = 5 y vale f(5) = 1**.

EJERCICIO 3 (A)

En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0'68, la de que ocurra otro suceso B es 0'2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0'27. Halle la probabilidad de que:
a) (1 punto) Ocurran los dos a la vez.
b) (0'75 puntos) Ocurra B pero no A.
c) (0'75 puntos) Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

Solución

En un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra un suceso A es 0'68, la de que ocurra otro suceso B es 0'2, y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0'27. Halle la probabilidad de que:
a)
Ocurran los dos a la vez.

Del problema tenemos: p(A) = 0'68, p(B) = 0'2 y p(ninguno) = p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ = 0'27.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$;
$p(B) = 1 - p(B^C)$; $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$.

Me piden p(los dos a la vez) = p(A y B) = $p(A\cap B)$.

De $p(A^C\cap B^C) = 0'27$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$, tenemos $p(A\cup B)$ =
= 1- 0'27 = 0'73.
Tenemos $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, es decir $0'73 = 0'68 + 0'2 - p(A\cap B)$, **luego $p(A\cap B) = 0'15$.**
b)
Ocurra B pero no A.

Me piden p(B pero no A) = p(B y noA) = **$p(B\cap A^C)$** = $p(B) - p(A\cap B) = 0'2 – 0'15 =$ **0'05.**
c)
Ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.

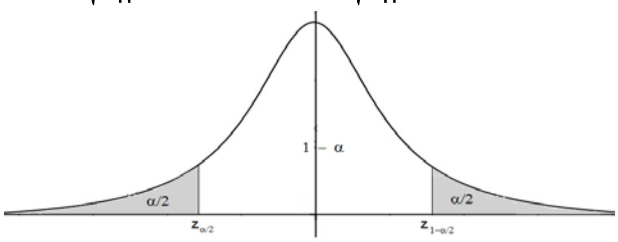
Me piden p(B, sabiendo que no ha ocurrido A) = **$p(B/A^C)$** = $\dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)} = \dfrac{0'05}{0'32}$ = **0'15625.**

EJERCICIO 4 (A)

Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.
a) (1'75 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 98'5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil.
b) (0'75 puntos) Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1- \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.
El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n > \dfrac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.
a)
Determine un intervalo de confianza, al 98'5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil.

Datos del problema: $\hat{p} = 240/400 = 0'6$, $\hat{q} = 1 - 0'6 = 0'4$, n = 400, nivel de confianza $1 - \alpha = 98'5\% =$
$= 0'985$, de donde $\alpha = 0'015 = 1'5\%$ como *nivel de significación*. De $\alpha = 0'015$ tenemos $\alpha/2 = 0'0075$

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'0075 = 0'9925$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'9925 viene en la tabla y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'43$. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'6 - 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{400}}, 0'6 + 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{400}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'540477; 0'659623)**

b)

Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza.

Observamos que en la fórmula del intervalo de confianza, el tamaño "n" se encuentra en el denominador de una raíz cuadrada. El cociente $\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}$ es un nº entre 0 y 1. **Cuanto más grande sea "n",** más pequeño será el cociente $\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}$, por tanto **el intervalo** tendrá un radio menor y **será más pequeño**.

Al contrario cuanto más pequeño sea "n", mas grande será el cociente $\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}$, por tanto el intervalo tendrá un radio mayor, y será más grande. Veámoslo aumentando y disminuyendo "n".

Para n = 400 teníamos $\left(0'6 - 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{400}}, 0'6 + 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{400}}\right) \cong$ **(0'540477; 0'659623)**

Para n = 1000 tendríamos $\left(0'6 - 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{1000}}, 0'6 + 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{1000}}\right) \cong$ **(0'562355; 0'63765) (menor)**

Para n = 100 tendríamos $\left(0'6 - 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{100}}, 0'6 + 2'43\cdot\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{100}}\right) \cong$ **(0'480955; 0'719045) (mayor)**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (B)

a) (1 punto) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son A(2,-1), B(-1,2), C(1,4) y D(5,0). La función objetivo es la función f (x,y) = 2x + 3y + k, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

b) (1'5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B\cdot A + 2X = C$.

Solución

a)

En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son A(2,-1), B(-1,2), C(1,4) y D(5,0). La función objetivo es la función f(x,y) = 2x + 3y + k, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos f en los puntos anteriores A(2,-1), B(-1,2), C(1,4) y D(5,0). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

f(2,-1) = 2(2) + 3(-1) + k = 1 + k; f(-1,2) = 2(-1) + 3(2) + k = 4 + k;
f(1,4) = 2(1) + 3(4) + k = 14 + k; f(5,0) = 2(5) + 3(0) + k = 10 + k.
Si igualásemos las cuatro expresiones al máximo 19, observaríamos que "k" siempre es un número positivo. Por tanto el máximo se alcanza en el vértice (1,4) que tiene el valor mas alto de todos + "k" que es positivo,

sea cual sea el nº "k", con lo cual f(1,4) = 2(1) + 3(4) + k = 14 + k = 19, de donde **k = 5.**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función f en la región es 19** (el mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(1,4) y el mínimo absoluto de la función f en la región es 5** (el menor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(2,-1).**

b)

Sean las matrices A = (1 -2 3), $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial B·A + 2X = C.

De B·A + 2X = C, tenemos $2X = C - B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. La solución es **X =** $(1/2)\cdot(C - B\cdot A) = (1/2)\cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 5/2 & -1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 3$.

a) (1 punto) Determine sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Consideremos la función g(x) = f´(x). Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g(x), en el punto de abscisa x = 2.

c) (0'5 puntos) Dibuje la gráfica de g(x) y de la recta tangente calculada en b).

Solución

Sea la función $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 2x + 3$.

a)

Determine sus máximos y mínimos relativos.

Recordamos que los extremos relativos anulan la piemra derivada, f'(x).
Si f'(a) = 0 y f''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo y vale f(a).
Si f'(a) = 0 y f''(a) < 0, x = a es un máximo relativo y vale f(a).

Calculamos f'(x) y resolvemos la ecuación f'(x) = 0.
$f'(x) = x^2 + x - 2$.
De $f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$, cuyas so9luciones son x = -2 y x = 1, que serán los posibles extremos relativos.
$f'(x) = x^2 + x - 2$; $f''(x) = 2x + 1$

Como f'(-2) = 0 y f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0, **x = -2 es un máximo relativo y vale f(-2) = 19/3.**
Como f'(1) = 0 y f''(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0, **x = 1 es un mínimo relativo y vale f(1) = 11/6.**

b)

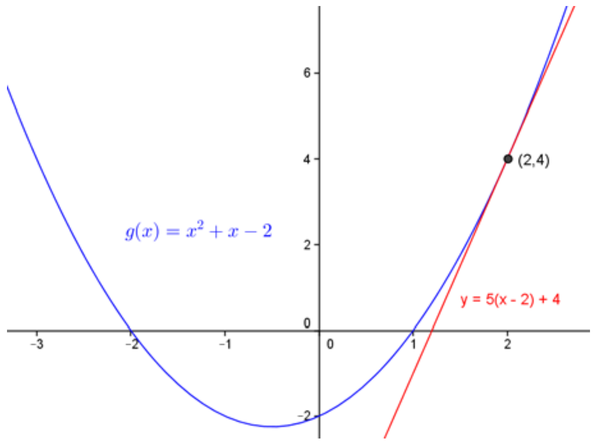
Consideremos la función g(x) = f´(x). Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g(x), en el punto de abscisa x = 2.

Tenemos que $g(x) = f'(x) = x^2 + x - 2$
La recta tangente a la gráfica de g en x = 2 es y – g(2) = g'(2)(x – 2).
$g(x) = f'(x) = x^2 + x - 2$, luego g(2) = 4
g'(x) = f''(x) = 2x + 1, luego g'(2) = 5
La recta tangente pedida es **y – 4 = 5·(x – 2).**

c)

Dibuje la gráfica de g(x) y de la recta tangente calculada en b).
La gráfica de $g(x) = x^2 + x - 2$, es un parábola, que tiene las ramas hacia arriba (∪), porque el nº que multiplica a x^2 es positivo, con vértice en la abscisa en x = -1/2, que sabemos es un mínimo. El vértice es el punto V(-1/2,f(-1/2)) = V(-1/2,-9/4) = V(-0'5,-2'25). Corta al eje de ordenadas OY en el punto (0,-2) y al eje de abscisas en los puntos (-2,0) y (1,0), puesto que x = -2 y x = 1 eran las soluciones de $x^2 + x - 2 = 0$.
Como la recta y – 4 = 5·(x – 2) es la recta tangente en el punto (2,g(2)) = (2,4), la dibujamos sabiendo que es la recta tangente. (También podríamos darle otro valor, pues con dos puntos podemos dibujar una recta).

Un es bozo de las gráficas de g y de la recta tangente en x = 2 es:



EJERCICIO 3 (B)

Una encuesta realizada en un banco indica que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y un 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco:

a) (1'25 puntos) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

b) (1'25 puntos) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal.

Solución

Una encuesta realizada en un banco indica que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y un 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco:

a)

Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

Llamamos A y B a los sucesos "cliente con un préstamo hipotecario" y "cliente con un préstamo personal".

Del problema tenemos: p(A) = 60% = 0'6, p(B) = 50% = 0'5 y p(ambos) = $p(A\cap B)$ = 20% = 0'2.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden p(no tenga ninguno)= p(noA y noB) = $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario}= = $1 - p(A\cup B)$.

Calculamos $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'6 + 0'5 – 0'2 = 0'9, por tanto:

p(no tenga ninguno) = $p(A^C\cap B^C)$ = $1 - p(A\cup B)$ = 1 – 0'9 **= 0'1**.

b)

Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal.

Me piden p(un préstamo hipotecario sabiendo que no tiene préstamo personal) = **$p(A/B^C)$** =

$$= \frac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \frac{p(A) - p(A\cap B)}{0'25} = \frac{0'6 - 0'2}{1 - 0'5}$$ = 0'4/0'5 **= 0'8.**

EJERCICIO 4 (B)

a) (1'25 puntos) Una población de 6000 personas se ha dividido en 3 estratos, uno con 1000 personas, otro con 3500 y otro con 1500. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 15 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) (1'25 puntos) Dada la población {1,4,7}, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que puedan formarse mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas esas muestras.

Solución

a)

Una población de 6000 personas se ha dividido en 3 estratos, uno con 1000 personas, otro con 3500 y otro con 1500. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 15 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{1000} = \frac{n_2}{3500} = \frac{15}{1500} = \frac{n}{6000}$

De $\frac{15}{1500} = \frac{n}{6000}$, tenemos $n = \frac{6000 \cdot 15}{1500} = 60$, luego **el tamaño de la muestra es n = 60 personas.**

De $\frac{n_1}{1000} = \frac{15}{1500}$, tenemos $n_1 = \frac{1000 \cdot 15}{1500} = 10$, luego **hay n_1 = 10 personas del primer estrato.**

De $\frac{n_2}{3500} = \frac{15}{1500}$, tenemos $n_2 = \frac{3500 \cdot 15}{1500} = 35$, luego **hay n_2 = 35 personas del segundo estrato**.

El problema me había dicho que **había 15 personas del tercer estrato**.

b)

Dada la población {1,4,7}, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que puedan formarse mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas esas muestras.

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 9 muestra con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

MUESTRAS									
Elementos	1 1	1 4	1 7	4 1	4 4	4 7	7 1	7 4	7 7
Media de la muestra $\bar{x}_i$	1	2'5	4	2'5	4	5'5	4	5'5	7

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot (x_i)^2$
1	1	1	1
2'5	2	5	12'5
4	3	12	48
5'5	2	11	60'5
7	1	7	49
$\sum$	**N =9**	**36**	**171**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es:

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{36}{9} = 4.$$

La desviación típica de la distribución muestral de medias es:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot (x_i)^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{171}{9} - (4)^2} = \sqrt{3} \cong 1'732051 = \sigma / \sqrt{n}$$, siendo **n** el tamaño de la muestra **(n = 2).**