Opción A

Ejercicio A.1- Dado sistema $\begin{cases} (m-1)x+y+z=m \\ x+(m-1)y+z=0 \\ y+z=1 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro ***m***.
b) Resolverlo, si es posible, para los casos ***m* = 0** y ***m* = 3**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 2-m & m-2 & 0 \\ 1-m & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2-m & m-2 \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = (m-2)(1-m) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow$$

$$(m-2)(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-2=0 \Rightarrow m=2 \\ 1-m=0 \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{1\,,\,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$rang(A) = 2 \neq rang(A/B) = 3 \Rightarrow 0z = -68 \Rightarrow z = -\frac{68}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A/B) = 3 \Rightarrow 0z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$b)$

$m = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y + 0 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow -x + 1 + 0 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (1\,,1\,,0)$

Continuación del Problema A.1

$b)Continuación$

$m = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow -3\cdot(-2) - z = 3 \Rightarrow$$

$$z = 6 - 3 = 3 \Rightarrow x + 2\cdot(-2) + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,\ -2\ ,\ 3)$$

Ejercicio A.2.- Dados los puntos **A(-1 , 3 , 2)** , **B(2 , -1 , -1)** y **C(a – 2 , 7 , b)**
a) Determinar los valores de los parámetros a y b para que dichos puntos estén alineados.
b) Para los valores calculados en el apartado anterior, obtener la ecuación el plano que pasa por el punto **P(0 , -3 , 5)** y es perpendicular al vector **AC**.

a) Si los puntos estén alineados los vectores AB y AC son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\ ,-1\ ,-1) - (-1\ ,3\ ,2) = (3\ ,-4\ ,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (a-2\ ,7\ ,b) - (-1\ ,3\ ,2) = (a-1\ ,4\ ,b-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{a-1} = \frac{-4}{4} = \frac{-3}{b-2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a-1} = -1 \Rightarrow 3 = 1 - a \Rightarrow a = -2 \\ -1 = \dfrac{-3}{b-2} \Rightarrow -3 = 2 - b \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

b) El vector **AC** es el vector del plano π , ya que es perpendicular a él, y lo es también al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y por ello el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (0\ ,-3\ ,5) = (x\ ,\ y+3\ ,\ z-5) \\ \overrightarrow{AC} = (-4\ ,7\ ,5) - (-1\ ,3\ ,2) = (-3\ ,4\ ,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$(x\ ,\ y+3\ ,\ z-5)\cdot(-3\ ,4\ ,3) = 0 \Rightarrow -3x + 4(y+3) + 3(z-5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 4y - 3z + 3 = 0$$

Ejercicio A.3.- Dada la función ***f* (*x*) = x^3 + *A*x^2 + *Bx* + *C***
a) Hallar los valores de los parámetros ***A***, ***B*** y ***C*** para que la gráfica de ***f*** pase por el punto **(1 , 1),** tenga un máximo en ***x* = - 4** y una tangente horizontal para ***x* = 0**.
b) Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y dibujar la gráfica de la función.

$a)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow 3\cdot 0^2 + 2A\cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ f'(-4) = 0 \Rightarrow 3\cdot(-4)^2 + 2A\cdot(-4) + 0 = 0 \Rightarrow 48 - 8A = 0 \Rightarrow 8A = 48 \Rightarrow A = 6 \\ f(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + 6\cdot 1^2 + C = 1 \Rightarrow C = -6 \end{cases}$$

***f* (*x*) = x^3 + 6x^2 - 6**

Continuación del Ejercicio A.3

b)

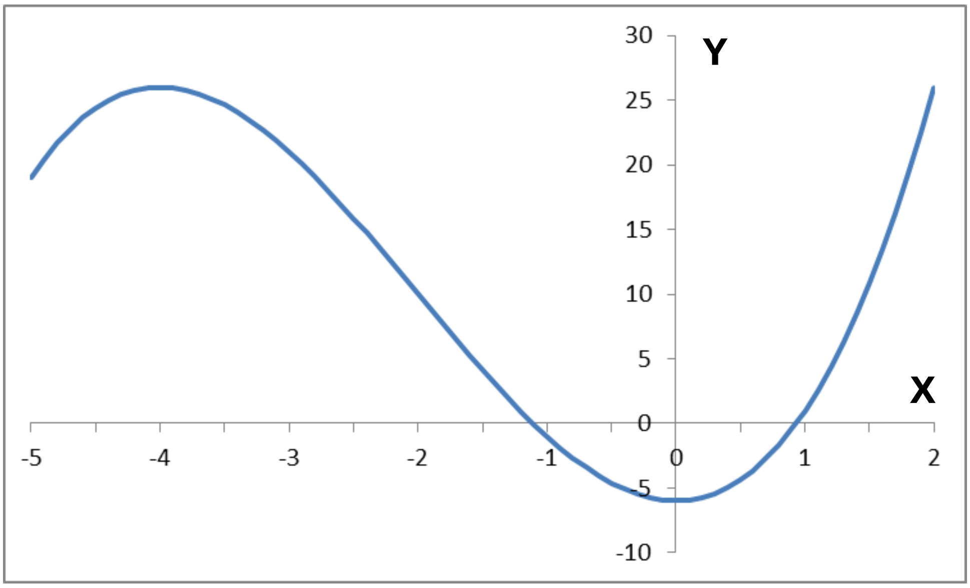
$$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x\,(x+4) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 3x\,(x+4) \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \end{cases}$$

	$-\infty$ a -4	-4 a 0	0 a ∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > -4	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (x < -4) \cup (x > 0)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / -4 < x < 0$

Máximo relativo en $x = -4 \Rightarrow f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 - 6 = -64 + 96 - 6 = 26$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 6 = -6$ de decrecimiento pasa a crecimiento



Ejercicio A.4.- Calcula la integral. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0$$

$$\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$$

$$A(x-2)+B(x+2)=5x-2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A(2-2)+B(2+2)=5\cdot 2-2 \Rightarrow 4B=8 \Rightarrow B=2 \\ x=-2 \Rightarrow A(-2-2)+B(-2+2)=5\cdot(-2)-2 \Rightarrow -4A=-12 \Rightarrow A=3 \end{cases}$$

$$\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2} \Rightarrow$$

$$I=\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx=3\int \frac{1}{x+2}\,dx+2\int \frac{1}{x-2}\,dx=3\int \frac{dt}{t}+2\int \frac{du}{4}=3\ln t+2\ln u=\ln\left(t^3u^2\right)$$

$$\begin{cases} x+2=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I=\ln\left[(x+2)^3(x-2)^2\right]+K$$

Ejercicio A.5.- Se llama número capicúa al número entero positivo que expresado en notación decimal se lee de igual forma de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, como por ejemplo los números 232 y 8778.
Determinar cuántos números capicúas hay menores que 100.000

$Capicuas\ de\ una\ cifra \Rightarrow V_9^1=9 \Rightarrow El\ cero\ no\ entra$

$Capicuas\ de\ dos\ cifras \Rightarrow VR_9^1=9^1=9 \Rightarrow El\ cero\ no\ entra \Rightarrow La\ segunda\ cifra\ es\ igual\ a\ la\ primera$

$Capicuas\ de\ tres\ cifras \Rightarrow VR_{10}^2-V_{10}^1=10^2-10=90 \Rightarrow Se\ forman\ todos\ los\ números\ de\ dos\ cifras\ y\ se\ le\ resta\ los\ que\ tienen\ el\ cero\ como\ primera\ cifra,\ la\ tercera\ cifra\ es\ igual\ a\ la\ primera$

$Capicuas\ de\ cuatro\ cifras \Rightarrow VR_{10}^2-V_{10}^1=10^2-10=90 \Rightarrow Se\ forman\ todos\ los\ números\ de\ dos\ cifras\ y\ se\ le\ resta\ los\ que\ tienen\ el\ cero\ como\ primera\ cifra,\ la\ tercera\ y\ cuarta\ cifra\ son\ iguales\ a\ la\ primera\ y\ segunda$

$Capicuas\ de\ cinco\ cifras \Rightarrow VR_{10}^3-VR_{10}^2=10^3-10^2=900 \Rightarrow Se\ forman\ todos\ los\ números\ de\ tres\ cifras\ y\ se\ le\ resta\ los\ que\ tienen\ el\ cero\ como\ primera\ cifra\ y\ que\ seran\ todas\ las\ posibilidades\ numéricas\ de\ dos\ cifras,\ la\ cuarta\ y\ qu\mathrm{int}a\ cifra\ son\ iguales\ a\ la\ primera\ y\ segunda$

En total hay 9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098 números capicúas menores de 100000

Opción B

Ejercicio B.1- Sea **B** la matriz $B=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$ e **I** la matriz identidad $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar para qué valores de *m* se verifica que $\boldsymbol{B^2 = 2B + I}$.
b) Calcular la inversa de ***B*** para los valores de *m* del apartado anterior

$a)$

$$I = B^2 - 2B \Rightarrow I = B\,(B-2) \Rightarrow I = B\,(B-2I)$$

$$B-2I = \begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m-1 & 1\\ 1 & -1-m\end{pmatrix}$$

$$B\,(B-2I) = \begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m-1 & 1\\ 1 & -1-m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(m-1)(m+1)+1 & 1+m-1-m\\ m-1+1-m & 1+(-1-m)(1-m)\end{pmatrix} \Rightarrow$$ b) Existe

$$B\,(B-2I) = \begin{pmatrix}m^2-1+1 & 0\\ 0 & 1-\left(1-m^2\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m^2 & 0\\ 0 & m^2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$I = B\,(B-2I) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m^2 & 0\\ 0 & m^2\end{pmatrix} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m=-1\\ m=1\end{cases}$$

inversa cuando el determinante de la matriz no es nula

$Para\ m=-1$

$$B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot\left(adj\ B^t\right) \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ B^t = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$Para\ m=1$

$$B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot\left(adj\ B^t\right) \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ B^t = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Ejercicio B.2.- Se consideran los planos **3x + 4y + 5z = 0 , 2x + y + z = 0** y el punto **A(-1 , 2 , 1)**.
a) Halla el plano que pasa por el punto **A** y por la recta intersección de los planos anteriores.
b) Calcula un plano que pase por el punto **B(0 , 0 , -3)** y que sea paralelo al plano del apartado anterior.

a) Determinaremos en primer lugar la recta **r** intersección de los planos dados.

Para determinar el plano π contamos con el vector director de la recta hallada **r**, con el vector formado por un punto cualquiera **R** de esa recta (tomaremos el indicado en la ecuación que calculamos) y el punto dado **A**, y finalmente con el vector **AG**, siendo **G** el vector generador del plano
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **BG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} 3x+4y+5z=0 \\ -10x-5y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow -7x-y=0 \Rightarrow y=-7x \Rightarrow 2x+(-7x)+z=0 \Rightarrow -5x+z=0 \Rightarrow z=5x \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-7\lambda \Rightarrow R(0\ ,\ 0\ ,\ 0) \\ z=5\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\ ,-7\ ,5) \\ \overrightarrow{AR}=(0\ ,0\ ,0)-(-1\ ,2\ ,1)=(1\ ,-2\ ,-1)\equiv(-1\ ,2\ ,1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{AG}=(x\ ,\ y\ ,\ z)-(-1\ ,2\ ,1)=(x+1\ ,\ y-2\ ,\ z-1) \end{cases}$$

$$10\ (x+1)+(y-2)+7\ (z-1)-2\ (z-1)+7\ (x+1)+5\ (y-2)=0 \Rightarrow 17\ (x+1)+6\ (y-2)+5\ (z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 17x+6y+5z=0$$

b) El plano paralelo α tiene la misma estructura de ecuación que la del plano π hallado pero es igual a un valor D que hay que calcular sabiendo que pasa por el punto B

$$\alpha \equiv 17x+6y+5z=D \Rightarrow 17\cdot 0+6\cdot 0+5\cdot(-3)=D \Rightarrow D=-15 \Rightarrow \alpha \equiv 17x+6y+5z+15=0$$

Ejercicio B.3.- Una tienda vende aceite a 2 euros el litro. Al vender *x* litros los costes de todo tipo (expresados en euros) son **0,5*x* + *C* *x*²** . Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 litros. Encontrar el valor de *C* y el beneficio máximo obtenido.

Valor de la venta 2x
Beneficio = Valor de la venta - Costes

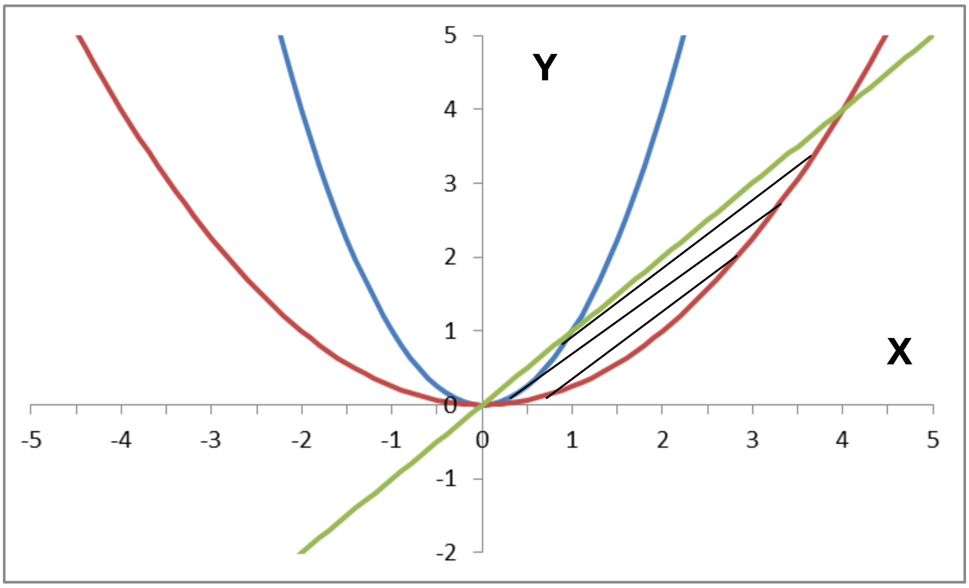
$$B=2x-\left(0{,}5x+Cx^2\right)=2x-0{,}5x-Cx^2 \Rightarrow B'=\frac{dB}{dx}=2-0{,}5-2Cx=1{,}5-2Cx \Rightarrow$$

$$B'=0 \Rightarrow 1{,}5-2Cx=0 \Rightarrow 1{,}5=2Cx \Rightarrow C=\frac{1{,}5}{2x} \Rightarrow Si\ x=750 \Rightarrow C=\frac{1{,}5}{2\cdot 750}=\frac{1{,}5}{1500}=\frac{15}{15000}=\frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$B=2\cdot 750-0{,}5\cdot 750-\frac{1}{1000}\cdot 750^2=1{,}5\cdot 750-\frac{75^2\cdot 100}{1000}=1125-\frac{5625}{10}=1125-562{,}5=562{,}5\ euros$$

Ejercicio B.4.- Dadas las tres funciones: ***f* (*x*) = *x*** ; ***g*(*x*) = *x*²** ; ***h*(*x*) =** $\frac{x^2}{4}$ **:**

a) Dibuja el recinto finito limitado por las gráficas de las tres funciones,
b) Calcula el área de dicho recinto.



$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2 = x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \\ \dfrac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx + \int_1^4 x\,dx - \int_1^4 \frac{x^2}{4}\,dx = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^4 x^2 dx + \int_1^4 x\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^4 + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^4$$

$$A = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) - \frac{1}{12}\left(4^3 - 0^3\right) + \frac{1}{2}\left(4^2 - 1^3\right) = \frac{1}{3} - \frac{64}{12} + \frac{15}{2} = \frac{1}{3} - \frac{16}{3} + \frac{15}{2} = \frac{15}{2} - \frac{15}{3} = \frac{45-30}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}\,u^2$$

Ejercicio B.5.- Si en la sucesión de números naturales: **1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11,12, 13,14,…**se suprimen los cuarenta primeros múltiplos de 5 queda una nueva sucesión.
Calcula la suma de los 160 primeros términos de la nueva sucesión.

Múltiplos de 5: 5, 10, 15, ……a_{40}
La serie natural tendrá 160 terminos más 40 que hemos suprimido, por lo tanto 200 términos

$$\begin{cases} a_{40} = 5 + (40-1)\cdot 5 = 40.5 = 200 \\ b_{160+40} = 1 + (200-1)\cdot 1 = 200.1 = 200 \end{cases} \Rightarrow S = S_b - S_a = \frac{(1+200)\,200}{2} - \frac{(5+200)\,40}{2} = 201\cdot 100 - 205\cdot 20$$

$$S = 20100 - 4100 = 16000$$