LOS NÚMEROS.

ÍNDICE - ESQUEMA - GUION DE CONTENIDOS.

1. CONCEPTO DE NÚMERO.

El concepto de número es muy amplio, y puede tener muchos significados y usos. Veamos las más importantes:

- Es una **representación** (mental o escrita) **de una cantidad**, de un valor o de una magnitud (medida, precio…)
- En una **herramienta para realizar cálculos**, para jugar, para realizar comparaciones…
- Es una herramienta para resolver situaciones de la vida cotidiana y de las **distintas ciencias**: física, química, biología, astronomía…
- Es cualquier **operación o expresión matemática**. Efectivamente, cualquier operación (3x4…) en realidad representa a un valor, a una cantidad; por tanto, cualquier operación, en realidad es un número.
- Etc.

LOS NÚMEROS ESTÁN FORMADOS POR CIFRAS.

* **LOS NÚMEROS Y EL LENGUAJE**.

Los números no solo se utilizan en matemáticas, también en otras disciplinas, como por ejemplo, LA LENGUA. Los números están presentes en numerosos conceptos lingüísticos:

- Es un **determinante numeral, cardinal** (un/uno, dos, tres, cuatro…) **y ordinal** (primer/primero, segundo, tercero…), que nos permite comunicar lingüísticamente lo que pensamos.
- Admite morfemas flexivos: **género y número**, aunque no en todas sus formas. (*Por ejemplo*: "Tengo un balón. / Tengo una pelota. / Tengo dos balones. / Tengo dos pelotas.")
- Admite varios **sinónimos**: guarismo, cifra, cantidad, valor…
- Es una **palabra polisémica**, ya que tiene varios significados: es un concepto; también un signo escrito; también lo utilizamos para decir dónde vive alguien…
- Incluso, podemos realizar la siguiente analogía: **"al igual que una palabra está formada por letras, un número está formada por cifras arábigas o dígitos"**.

CUALQUIER "CUENTA" ES UN NÚMERO. *Ejemplo*: '56:7', en realidad es el número '8'.

CUALQUIER EXPRESIÓN MATEMÁTICA ES UN NÚMERO. *Ejemplo*: cualquier fracción, cualquier ecuación, polinomio, derivada, función matemática, igualdad…, en realidad. ES UN NÚMERO. UNA CANTIDAD.

Los números están formados por DÍGITOS o CIFRAS (ARÁBIGAS), al igual que las palabras están formadas por letras.

¡¡LOS NÚMEROS ESTÁN POR TODOS LADOS!!

2. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS.

Seguramente no te habías dado cuenta que los números guardan un sinfín de curiosidades divertidas:

► **Los números son infinitos, aunque infinito no es ningún número.** → '**Infinito**' es un concepto, y se representa con el símbolo ∞. Por muchos números que escribiésemos, nunca podríamos escribir todos los números, siempre se podría escribir más, por eso son infinitos.

► **Todos los números tienen un anterior y un posterior.** → Siempre podemos escribir un número que vaya antes y después de otro número. A veces, el **número anterior y posterior** a otro número es muy relativo. Por ejemplo, el anterior al número '5' es el número '4', pero sólo si estamos hablando de los números enteros, pero si incluimos a todos los números, el '4,9' es más cercano al '5', pero el '4,99' sería más cercano aún, y el '4,9999999' aún más cercano, y así sucesivamente, por lo que el anterior y posterior de un número, realmente no está definido, cualquier número tiene infinitos anteriores y posteriores. Todo esto implica que **LOS NÚMEROS ESTÁN ORDENADOS**.

¿Seguro que llevan números distintos?

► **Dos números distintos tienen números anteriores y posteriores distintos.** → Esto, realmente, se cumple sólo en los números enteros, como hemos visto en el apartado anterior. Si incluimos a los **números decimales o fraccionarios**, cualquier número tendría infinitos números anteriores y posteriores, por lo que sí podrían coincidir.

► **El '0' es un número, pero nos es sucesor de ningún número.** → Esta afirmación tiene bastante controversia entre los matemáticos, ya que unos consideran que el '0' es posterior al '-1', pero otros consideran al 'cero' como la ausencia de valor, por lo que no podría ir detrás de ningún número. De todas formas, cuando realizamos una recta numérica con números positivos y negativos, se coloca al '0' entre el '-1' y el '1'.

► **Entre dos números siempre existen infinitos números.** → Esta afirmación se deduce fácilmente con el siguiente ejemplo: entre el '2' y el '3' tenemos el '2,2', el '2,22', el '2,22222222222', y así sucesivamente, por muchos decimales que le añada, siempre podría añadirle alguno más.

► **Cualquier número (salvo los imaginarios), puede ser positivo y negativo.** → Aunque en la clasificación de los números vemos a los 'números enteros negativos', también hay números fraccionarios y decimales negativos, números irracionales negativos, e incluso números imaginarios negativos.

► **Cualquier expresión matemática representa en realidad un número.** → Cualquier operación, cualquier ecuación, cualquier expresión matemática, cualquier fórmula…, siempre expresa un valor, una medida o una cantidad, o lo que es lo mismo, siempre expresa un número. Por eso, cuando realizas cálculos, utilizas el signo '='. Por ejemplo, cuando escribes: "39 + 12 = 51", estás diciendo que ambas cosas (la suma y el resultado), son lo mismo, son iguales.

► **Cualquier número se puede expresar como una operación, al menos, de suma, resta, multiplicación y división.** → Veámoslo con ejemplos sencillos, a partir del número '24':

→ 24 = 20 + 0 = 20 + 4 = 12 + 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3 = …
→ 24 = 20 – 0 = 30 – 6 = 48 – 24 = 25 – 1 = 100 – 75 = …
→ 24 = 24 x 1 = 12 x 2 = 6 x 4 = 4 x 6 = 2 x 12 = 1 x 24 = 8 x 3 = 2,4 x 10 = …
→ 24 = 24 : 1 = 48 : 2 = 72 : 3 = 96 : 4 = 120 : 5 = …

► **Cualquier número se puede sumar, restar, multiplicar o dividir con otro número cualquiera.** → Todos los números, por complejos que sean, pueden realizar las operaciones básicas, y sus derivadas (potencias…), entre sí.

► **Los números 'decimales' se denominan en matemáticas números fraccionarios, pero en realidad son lo mismo.** → Esto es porque cualquier número decimal se puede expresar en forma de fracción. Es más, hay números que es más fácil expresarlos en forma de fracción que de número decimal. Por ejemplo: es más fácil expresar $\frac{17}{31}$ que el número decimal que le corresponde: 0,5483870967741935…

* Para saber qué número corresponde a una fracción, sólo hay que hacer la división → 17 : 31 = 0,5483870967741935…

En definitiva:

LOS NÚMEROS SON INFINITOS Y SE PUEDEN EXPRESAR DE INFINITAS FORMAS DISTINTAS.

3. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS.

En el siguiente esquema te mostramos como se clasifican los números:

Fíjate que muchos de los tipos de números tienen un símbolo para identificarlos.

NÚMEROS COMPLEJOS
$\mathbb{C}$
Son todos los números y expresiones matemáticas existentes.

NÚMEROS REALES
$\mathbb{R}$
Expresan números reales.
Ej.: π, ¾, 875. 4'39…

NÚMEROS RACIONALES
$\mathbb{Q}$
Son aquellos números que se pueden expresaren forma de fracciones.
Ej.: 592. 75'08…

NÚMEROS ENTEROS
$\mathbb{Z}$
Sin decimales.
Ej.: 8, 25, 9876…

NÚMEROS NATURALES.
N
Son todos los números **enteros positivos**.
Ej.: 9, 325…

PRIMOS.
COMPUESTOS.
'UNO' (1).

Cero.

NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS.

NÚMEROS FRACCIONARIOS ("decimales").
Tienen decimales. Se pueden expresar en forma de fracción o número decimal.
Ej.: 7'98 – 65'33333…

Exactos.
Tienen un número finito de decimales.
Ej.: 94'85…

Periódicos.
Tienen infinitos decimales pero repetidos.
Ej.: 34'96666666666…

PUROS.
MIXTOS.

NÚMEROS IRRACIONALES
$\mathbb{I}$
No se pueden expresar como fracción.
Ej.: π, e, $\sqrt{7}$ …

Algebraicos

Trascendentes

NÚMEROS IMAGINARIOS 'i'
Solo existen de forma matemática. Todos se forman a partir del número "$i = \sqrt{-1}$".

ACLARACIONES:

- En realidad, TODOS LOS NÚMEROS PUEDES SER POSITIVOS o NEGATIVOS.
- Los NÚMEROS DECIMALES, en realidad se llaman, NÚMEROS FRACCIONARIOS.
- Los NÚMEROS NATURALES también se conocen como "NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS" o simplemente "NÚMEROS POSITIVOS". Se llaman naturales porque se considera que son los únicos que existen en la naturaleza.
- Los NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS, a veces se les nombra, simplemente, como "NÚMEROS NEGATIVOS".

Vamos a analizar las distintas clasificaciones de números explicando cada tipo y sus divisiones:

NÚMEROS COMPLEJOS. ($\mathbb{C}$)

Su símbolo 'C' o '$\mathbb{C}$' le viene del francés 'complexe', en inglés 'complex', en español 'complejo'...

Cualquier CÁLCULO o EXPRESIÓN MATEMÁTICA, en realidad REPRESENTA A UN NÚMERO sea de un tipo u otro.

Este conjunto engloba a todos los números, ya sean números expresados como tales o cualquier expresión matemática.

Un número complejo está compuesto de una parte real y otra imaginaria. Cuando la parte imaginaria es 0, tenemos los números reales; cuando la parte imaginaria tiene un valor (**i**), tenemos los números imaginarios.

* En matemáticas avanzadas (geometría en varias dimensiones, vectores, matrices…), se contemplan extensiones de los números complejos, en grupos llamados: NÚMEROS HIPERCOMPLEJOS (cuaterniones, octoniones…)

NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$

NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$ | **NÚMEROS IMAGINARIOS 'i'**

I. NÚMEROS REALES. ($\mathbb{R}$)

Su símbolo 'R' o '$\mathbb{R}$' le viene del francés 'réel', en inglés 'real', en español 'real'...

Son **todos los números que no tienen parte imaginaria, solo real,** por tanto, expresan situaciones matemáticas que podemos considerar "reales". O sea, cualquier expresión matemática que represente a un número entero o decimal, con finitas o infinitas cifras decimales, periódicas o no, como *por ejemplo*: π; log2; $\sqrt[3]{31}$; 43; $6/7$; etc.

Algunos autores han creado grupos de números que van más allá de los reales:

- Números HIPERREALES ($^*\mathbb{R}$): permiten realizar operaciones con conceptos de números que va más allá de cifras infinitas e infinitesimales. Un ejemplo sencillo para entenderlo sería "un número infinito al que sumamos uno".
- Números SUPERREALES: son una extensión de los números hiperreales aplicados a campos matemáticos concretos y complejos.
- Números SUBREALES: son una extensión de los números hiperreales e incluso de los números superreales, que se centra en el estudio de conceptos numéricos infinitamente pequeños (para entenderlo mejor: "imagina un número, luego imagina dividirlo entre dos infinitas veces, nunca sería exactamente 0, pero sería un número infinitamente pequeño".

II. NÚMEROS IMAGINARIOS. ($\mathbb{i}$)

Son **números complejos que sí tienen parte imaginaria** (tienen la forma "b·i", donde 'b' es un número real e 'i' = $\sqrt{-1}$). Normalmente se utilizan para expresar cálculos que contengan raíces cuadradas de números negativos.

Cualquier raíz de un número negativo se puede expresar a partir de:

$$i = \sqrt{-1}).$$

Ejemplo: $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3 \cdot \sqrt{-1} = 3i.$

Su símbolo 'i' se lo puso Leonhard Euler en 1777, pues aunque lo descubrió pesó que su existencia era imposible. En francés 'imaginaire', en inglés 'imaginary', en español 'imaginario'...

Los números imaginarios fueron propuestos por diversos matemáticos a lo largo de la historia, aunque los primeros cálculos importantes fueron realizados por **Rafael Bombelli** (s. XVI), aunque no fue hasta el s. XVII cuando **Leonhard EULER** los desarrolló. Posteriormente, **Jean-Robert Argand** (s. XIX) amplió su estudio (plano de Argand).

*Algunos autores los llaman también IRREALES. **En ingeniería se denota con 'j', para no confundirlo con la 'i' de intensidad eléctrica.***

NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$

NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$ | **NÚMEROS IRRACIONALES $\mathbb{I}$**

I.A. NÚMEROS RACIONALES. ($\mathbb{Q}$)

Son todos los números que **SÍ se pueden expresar como fracciones de números enteros.**

O sea, **son números reales sin cifras decimales o bien con cifras decimales finitas o infinitas periódicas,** como *por ejemplo*: $\frac{3}{11}$; **8,456**; **-7,5**; **4,666666…**; etc.

I.B. NÚMEROS IRRACIONALES. ($\mathbb{I}$)

Son todos los números que **NO pueden ser expresados como fracciones de números enteros** (denominador distinto a 0). O sea, son **números reales con infinitas cifras decimales no periódicas**, como *por ejemplo*, la raíz cuadrada de un número primo y otras muchas raíces: $\sqrt{7}$ **= 2,645751311…**; **π** (pi); **número e**; **logaritmos**; etc.

NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$: **NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$** | **NÚMEROS FRACCIONARIOS**

NÚMEROS IRRACIONALES $\mathbb{I}$: **IRRACIONALES ALGEBRAICOS** | **TRASCENDENTES**

I.A.1. NÚMEROS ENTEROS. ($\mathbb{Z}$)

Son todos **los números sin decimales,** hasta el infinito, contando el ‘0’ y los números ‘negativos’ y ‘positivos’. Se pueden expresar en forma de fracción si se quiere.

Ejemplos: **5, 324, -8624, 87.463.520.152**…

I.A.2. NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Son todos **los números decimales que pueden ser expresados en forma de fracción.** Pueden tener decimales finitos o infinitos pero periódicos. *Ejemplos*: 4,85; $\frac{4}{9}$; $^{2}/_{3}$; 0,325; $^{3}/_{5}$…

Hay muchos tipos de clasificaciones de **FRACCIONES**, pero la más aceptada las divide en **PROPIAS** e **IMPROPIAS**.

I.B.1. NÚMEROS IRRACIONALES ALGEBRAICOS.

Son los números irracionales que **pueden obtenerse mediante cálculos algebraicos, son solución a una ecuación polinómica de números reales**.

Otra definición sería la siguiente: **“Son todos los números reales o complejos que son solución de una ecuación algebraica de la forma”:** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ (‘n’ ≠ 0; ‘a’ representa a números reales).

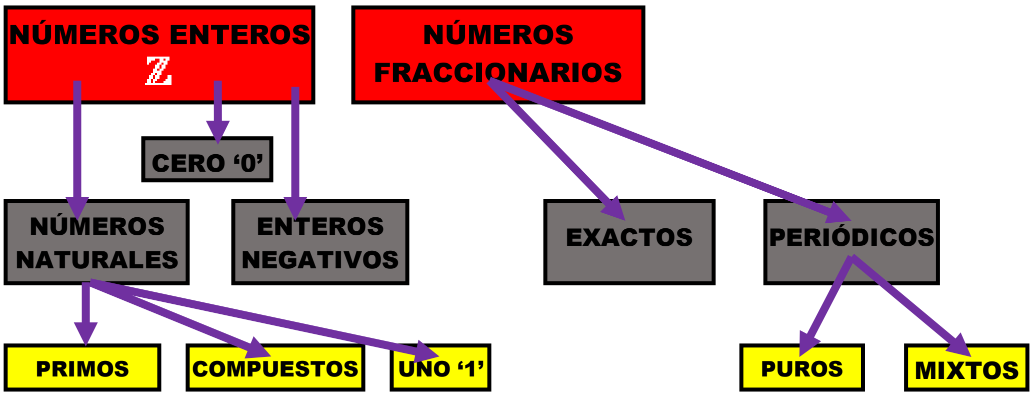
Ejemplos: $\sqrt{2}$ (ya que es la solución a la ecuación “$\mathbf{x^2 - 2 = 0}$” y tiene infinitos ‘decimales’ no periódicos); $\sqrt{3}$ (“$\mathbf{x^3 - 3 = 0}$”); $\sqrt{5}$ (“$\mathbf{x^5 - 5 = 0}$”); y así multitud de raíces. También ‘otro tipo de números’: $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ (“$\mathbf{8x^3 - 3 = 0}$”)…

1.B.2. NÚMEROS TRASCENDENTES (o trascendentales).

Sería el caso contrario a los algebraicos, o sea, **no se pueden obtener mediante cálculos algebraicos o ecuaciones polinómicas (polinomios)**. Los matemáticos no han llegado aún a una fórmula definitiva que los defina, por lo que, aunque los números trascendentes deben ser infinitos, en comparación con los irracionales algebraicos hay relativamente pocos números trascendentes conocidos, y algunos de ellos no están demostrados.

Ejemplos: **π**; **e**; $\mathbf{e^{\pi}}$, $\mathbf{\pi^{e}}$ (aunque aún no está demostrado); $\mathbf{i^{i}}$…

*** Es muy importante diferenciar entre números racionales algebraicos y números irracionales algebraicos. Debes tener en cuenta que un número algebraico es cualquier número complejo o real que se pueda expresar como una función polinómica. Así pues, un número real puede ser algebraico, también un número imaginario, o un número racional, o como en este caso, un número irracional.**



Algunos autores incluyen el '0' en los números naturales, ya que estos sirven para contar los elementos de un conjunto y pueden existir conjuntos vacíos, y se contaría su valor con '0'.

I.A.1.a. Números NATURALES ("enteros positivos"). (ℕ)

Son todos **los números enteros (sin decimales) comprendidos entre el 'uno' y el 'infinito'**.

Ejemplos: 1, 4, 7, 374, 346.820.981.846…

Los podemos dividir de varias formas. La más usual es (según sus divisores):

- **UNO: solo tiene un divisor, él mismo (el '1').**
- **PRIMOS: solo tienen dos divisores, el '1' y ellos mismos.** *Ejemplos*: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41…
- **COMPUESTOS: tienen tres o más divisores, el '1', ellos mismos y al menos un número más. .** *Ejemplos*: 4, 6, 8…

I.A.1.b. El cero.

El '0' es un número muy especial, pues según muchos autores representa a la ausencia de valor numérico, y debe tratarse como grupo independiente, y para otros, debe ser considerado como la suma de un número entero positivo y su opuesto negativo. Otros lo clasifican dentro de los números enteros positivos.

I.A.1.c. Números enteros NEGATIVOS.

Son todos **los números enteros (sin decimales) menores que 0**. Al igual que los "enteros positivos", los "enteros negativos" llegan hasta el **infinito**.

Ejemplos: -1, -345, -4.975, -867.986.092.456.834.004…

**** En realidad se considera que cualquier número podría ser positivo o negativo, al menos en teoría.***

1.A.2.a. Números fraccionarios EXACTOS.

Son todos **los números fraccionarios con cifras decimales finitas**. Se pueden expresar de manera exacta matemática, tanto en forma de fracción como en forma numérica.

Ejemplos: $3{,}5 = \frac{7}{2}$; $3{,}865 = \frac{773}{200}$; $\frac{456}{1000} = 0{,}456$ …

I.A.2.b. Números fraccionarios PERIÓDICOS.

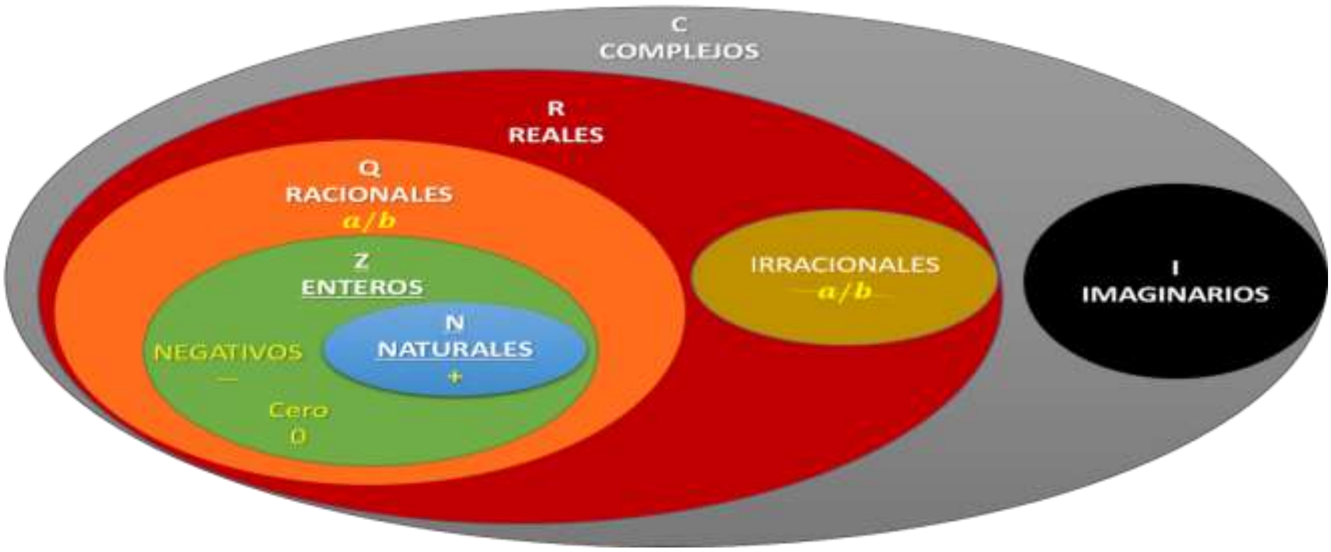
Son todos **los números fraccionarios con cifras decimales infinitas pero que siguen una regla periódica**. Se pueden expresar en forma de fracción (exacto) y en forma numérica pero con la ayuda del símbolo ⌒.

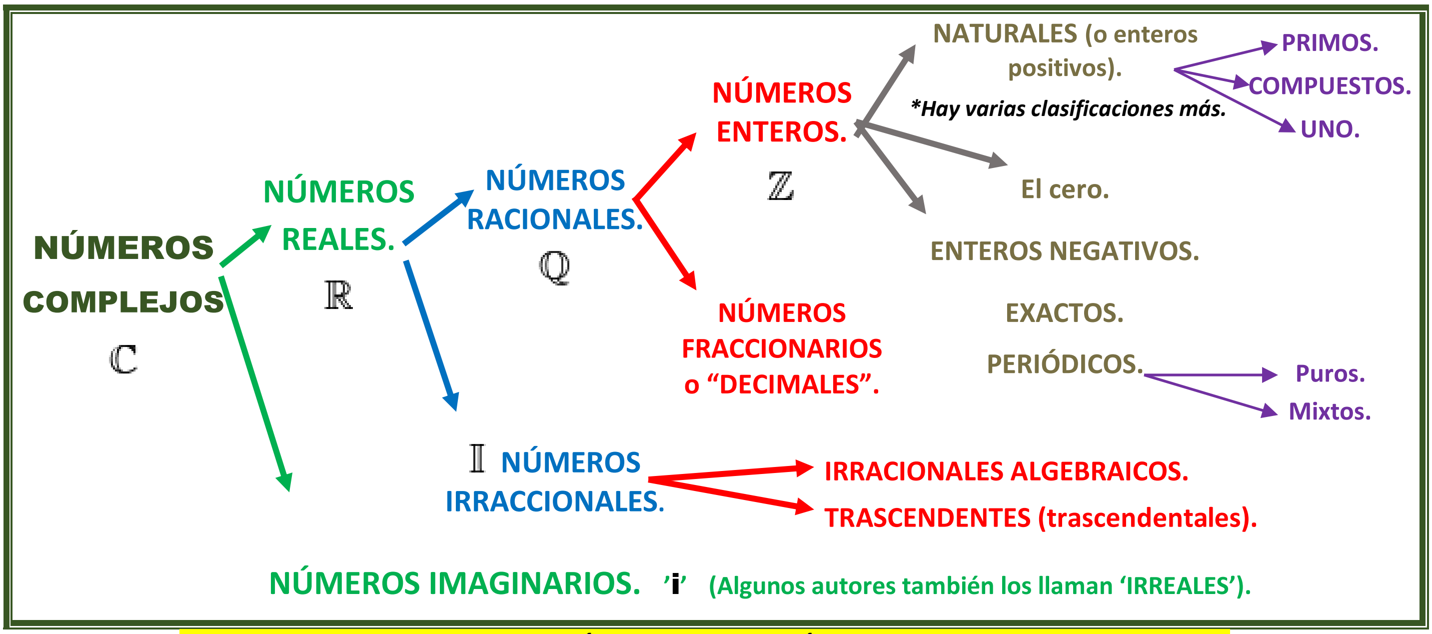
- **PURO: la parte decimal periódica comienza justos después de la 'coma'.** *Ejemplo*: $\frac{2}{3}$ **= 0,6666666… →** $\frac{2}{3} = 0'\overset{\frown}{6}$
- **MIXTO: entre la parte decimal y la periódica hay una parte decimal que no se repite, llamada *anteperiodo*.**

Ejemplo: $\frac{7}{15}$ = 0,46666666… → $0{,}4\overset{\frown}{6}$

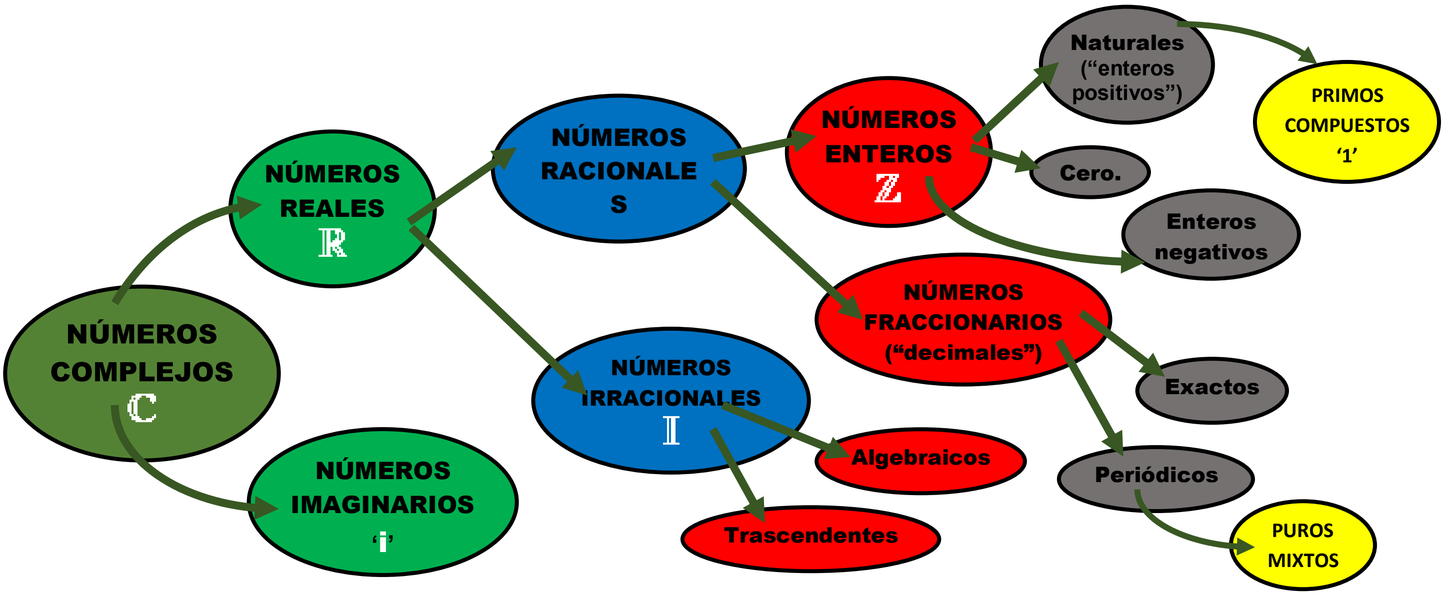
OTROS 'ESQUEMAS' SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS.

También nos ha gustado mucho esta forma de clasificar los números:





***Nota*: EN CUALQUIER CLASIFICACIÓN PUEDE HABER NÚMEROS "POSITIVOS" o "NEGATIVOS".**



4. TIPOS DE NÚMEROS.

Las matemáticas son más curiosas de lo que parece. Muchas personas se han dedicado a encontrar curiosidades y reglas que cumplen los números. Aunque al principio parece dificultoso, en realidad es un número fascinante. Según ello, podemos distinguir los siguientes tipos de números.

4.A. OTRAS CLASIFICACIONES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Con los números enteros se pueden realizar distintas clasificaciones. Algunas de ellas abarcarían a los números positivos y negativos (todos los enteros) y otras salo a los positivos (números naturales). Veamos las principales:

➢ PARES / IMPARES.

Es muy fácil distinguirlos. Te lo mostramos en el siguiente cuadro para que lo visualices mejor:

	Definición.	¿Cuáles son?
NÚMEROS PARES	**Son los números enteros que son divisibles entre dos.** Al dividirlos entre ‘2’, su división es exacta (sin decimales, y el resto = ‘0’). Esto lo cumplen todos los números que acaban en cifra par: 0, 2, 4, 6 y 8.	**“Los que acaban en cifra par: 0, 2, 4, 6 y 8”.**  NÚMEROS PARES
NÚMEROS IMPARES	**Son los números enteros que no son divisibles entre dos.** Al dividirlos entre ‘2’, su división es inexacta (sin decimales, y el resto = ‘1’). Esto lo cumplen todos los números que acaban en cifra impar: 1, 3, 5, 7 y 9.	**“Los que acaban en cifra impar: 1, 3, 5, 7 y 9”.**  NÚMEROS IMPARES

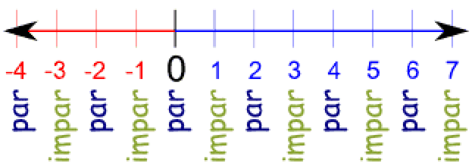
Algunas curiosidades:

► **¿El ‘0’ es un número par?** → Dependiendo si lo consideramos dentro de los números naturales o no. Si lo consideramos como número natural, entonces sería par.

► **¿Los números negativos pueden ser pares e impares?** → Por supuesto, el concepto de par e impar se aplica a todos los números

► **¿Y los números ‘decimales’, también pueden ser pares e impares?** → No. Para que un número sea par debe ser divisible entre 2, y si es decimal ya no lo es. Sólo los números enteros pueden ser pares o impares.

► **¿Por qué sólo los números enteros pueden ser pares o impares?** → Porque para que un número sea par debe ser divisible entre 2. Esto implica que al dividirlo entre 2, debe ser una división exacta. Si dividimos un número decimal entre dos, nunca será una división exacta.



► **¿Qué hay, más números pares o más números impares?** → En teoría, hay los mismos, si un número es par, el siguiente es impar, el siguiente par, y así sucesivamente. Podríamos decir que la mitad de los números enteros que existieran (son infinitos) serían pares, y la otra mitad, impares.

El anterior y posterior de un número par son números impares; el anterior y el posterior de un impar son números pares.

MÁS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PARES E IMPARES.

► Todos los **números primos** son **impares**, pero solo algunos números impares son primos.

► El único **número primo** que es **par** es el ‘2’.

► Todos los **números perfectos** son **pares** *(ver números perfectos más adelante).*

► Si multiplico **dos** números **pares** obtengo un número **par**.
Si multiplico **un** número **par y otro impar** obtengo un número **par**.
Si multiplico **dos** números **impares** obtengo un número **impar**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

** En blanco, números pares; en azul, los impares.*

PRIMOS / COMPUESTOS / ‘UNO’.

Los números naturales se clasifican en:

NÚMEROS PRIMOS.
Son todos aquellos números naturales que tienen solo dos divisores: el ‘1’ y él mismo.

UNO.
Solo tiene un divisor, ya que él mismo y el ‘1’ son el mismo número.

NÚMEROS COMPUESTOS.
Son todos aquellos números naturales que tienen al menos tres divisores: el ‘1’, él mismo y otro número natural.

ALGUNAS CURIOSIDADES y PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS y COMPUESTOS.

► Esta cita famosa resume su importancia: **“Los matemáticos consideran a los números primos los números más importantes de todos, porque son los átomos de la matemática. Los números primos son los bloques de la construcción numérica, porque todos los otros números pueden ser creados multiplicando combinaciones de números primos”.** Así es, cualquier número se calcula multiplicando números primos.

Hueso de Ishango, hallado en Congo.

► Los números primos son muy estudiados desde la antigüedad. Los registros más antiguos datan de hace unos 20.000 años, del llamado “hueso de Ishango”. Hay numerosos datos sobre los números primos en todas las culturas antiguas: sumerios, babilonios, asirios, persas, egipcios, griegos, indios, chinos, aztecas, mayas, incas…

► Son muy utilizados en numerosas ciencias: matemáticas, física, química, ingeniería, aeronáutica, arquitectura, biología, economía, informática, seguridad…

► **Hasta el siglo XIX se consideraba al ‘1’ primo**, pues es divisible entre ‘1’ y él mismo.

► **Los únicos números compuestos que tienen 3 divisores son los cuadrados de los números primos** ($2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $5^2 = 25$; $7^2 = 49$; $11^2 = 121$…). El resto de números compuestos, tienen, al menos, 4 divisores.

►**Todos los números primos que existen son impares, salvo el ‘2’**. Ello implica que cualquier número primo, salvo el ‘2’ y el ’5’ poseen una de estas cifras: ‘1’, ‘3’, ‘7’ o ‘9’.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

En relieve, los primos hasta el 100.
Hay 25 números primos hasta el 100.

►**Hay infinitos números primos**. El primero en demostrar esta afirmación fue **Euclides**, hace unos 2300 años. Él partió de los números primos conocidos, y demostró que se pueden añadir infinitos números a esa lista. Si se multiplican entre sí todos los números primos de una lista y se le suma ‘1’, se obtiene un nuevo número, que bien es primo o si no es primo, tiene que ser divisible por un número primo, que no puede ser ninguno de los de la lista utilizada, ya que le hemos sumado ‘1’. Por tanto, obtenemos siempre, de una forma u otra, un nuevo número primo.

La fórmula correspondiente es: **“Qa = (P1 x P2 x P3 x … x Pn) + 1”**

Leonhard Euler (gran matemático del s. XVIII), averiguó algo increíble que demostraba de forma más fácil la infinidad de números primos, y permitió descubrir miles de ellos: “Todo número primo mayor que ‘2’ se puede calcular multiplicando un número natural por ‘4’ y sumándole o restándole ‘1’”. (Fórmula: $4n + 1$ o bien $4n - 1$).

Esta propiedad quiere decir que un número primo se puede expresar con esta fórmula, pero no que con esta fórmula siempre obtengamos un número primo. Además, demostró que todos los números primos que sean de la forma ‘4n-1’, se pueden expresar como la suma de cuadrados perfectos. Por ejemplo: “$13 = 2^2 + 3^2$”.

►Teorema fundamental de la aritmética. Es muy aplicado en matemáticas y dice que “cualquier número natural, o es primo, o se puede expresar como el producto de números primos”. Esto se aplica en la **DESCOMPOSICIÓN o FACTORIZACIÓN EN NÚMEROS PRIMOS**. ***Por ejemplo***, el número ‘20’ se puede expresar como: “2 x 2 x 5”.

►LA CONJETURA DE GOLDBACH. Christian Goldbach (1690-1764, Prusia), matemático e historiador de la Academia Imperial rusa, tutor de Pedro el Grande…, descubrió que: “Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos”. Esta afirmación no solo no se ha podido confirmar, sino que se considera una de las más difíciles de comprobar. De todas formas, tranquilo, se cumple para todos los números hasta los trillones (10^{18}).

Curioso: en el año 2000, Tony Faber ofreció un millón de dólares a quien demostrase esta conjetura. Nadie lo consiguió.

También descubrió que: “Todos los números impares se pueden obtener sumando tres números primos (salvo ‘3’ y ‘5’)” (Igualmente está por demostrar que se cumple siempre). Esta conjetura se realizó antes de excluir al ‘1’ como número primo. Con el ‘1’ podríamos obtener al ‘3’ y al ‘5’. ***Ejemplo***: “13 = 5 + 5 + 3”.

Los números primos hasta el 100.

►Lema de Euclides. Si multiplicamos dos números enteros entre sí y un número primo es divisor de ese resultado, entonces ese número primos también es divisor de, al menos, uno de los números originales. (Así se redacta: "**Si *p* es un número primo y divisor del producto de números enteros *ab*, entonces *p* es divisor de *a* o de *b***").

►Pequeño teorema de Fermat. Si elevamos un número natural a un número cualquiera primos, y le restamos el mismo número natural, el resultado es divisible entre dicho número primo. (Así se redacta: "**Si *p* es primo y *a* es algún número natural diferente de 1, entonces a^p - *a* es divisible por *p*"**).

►Existen más propiedades: '**Teorema de Wilson', 'Primer teorema de Sylow', 'Teorema de Cauchy', 'constante de Copeland-Erdős', 'El valor de la función zeta de Riemann', 'Diferencia entre dos números primos consecutivos', 'Hipótesis de Riemann', 'Postulado de Bertrand', numerosas aportaciones de Euler…**


Cicada faraona (*Magicicada septendecim*)

"¡HASTA LOS INSECTOS USAN LOS NÚMEROS PRIMOS!"

Hay muchas cigarras llamadas "periódicas", que quiere decir que permanecen como ninfas varios años esperando a convertirse en adultas. La **cicada faraona (Magicicada septendecim)**, nativa de Estados Unidos y Canadá, tiene el ciclo vital más largo de los insectos. Sus ninfas esperan **17 años** bajo tierra esperando salir. Cuando salen en forma de cigarras adultas, lo invaden todo, y en unas semanas ponen los huevos y mueren. Los zoólogos, intrigados, estudiaron el porqué de un ciclo vital tan largo. Otra especie, la **Magicicada tredecim** tiene el ciclo vital de **13 años**.

Si te has fijado, ambos son números primos, ¿casualidad? No. Se cree que lo hacen así para evitar a los parásitos que las matarían. Si estos parásitos tienen un ciclo vital de 2 años, solo coincidirían con ellas cada 34 años (17x2=34). Pero si los parásitos tuvieran un ciclo de 5 años, coincidirían con ellas cada ¡85 años! Esto permite que la especie se multiplique y sobreviva a posibles ataques masivos de parásitos.

Incluso si los parásitos tuvieran un ciclo vital anual, solo podrían infectarlas cada 17 años, por lo que no se "acostumbrarían" a alimentarse de ellas.


Magicicada tredecim

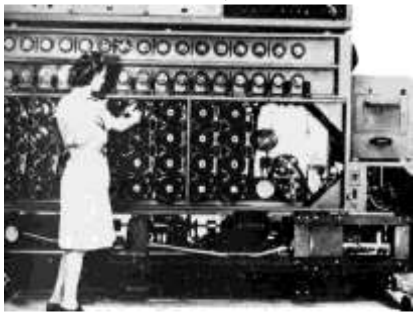
¿SABÍAS QUE…?

- **Se utilizan para cifrar códigos**: lo utilizan desde los espías hasta los bancos para sus sistemas de seguridad y hasta para tus compras por internet. Se basan en distintas propiedades de los números primos, especialmente en su FACTORIZACIÓN. Descomponer un número muy grande en factores primos no es fácil. Por ejemplo, para compras en internet, crean un código (a modo de "cerradura") con un número enorme, y para "abrirlo" se necesita los factores primos de ese número ("llave").

La clave está en coger dos números primos muy grandes, multiplicarlos y obtener un número compuesto. Aunque se sepa el número compuesto, obtener los dos factores primos que lo han generado es muy, pero que muy difícil. Se necesitaría más de un año para que potentes ordenadores la encontrarán. Por eso, si tenemos un código con la clave (esos dos números primos tan largos), es muy difícil que nos la copien. Este sistema se utiliza en internet, cuentas bancarias… Se cambia periódicamente.


Máquina 'Enigma'.

- **Para ganar la 2ª Guerra Mundial**. Una de las claves conocidas para la victoria contra los nazis fue crear la **máquina ('Ultra')**que consiguió descifrar los mensajes alemanes de su **máquina 'Enigma'**. Tanto para cifrar los mensajes, como para descifrarlos, eran imprescindibles los números primos. El polaco **Marian Rejewski**dio los primeros pasos a partir de una máquina Enigma interceptada. En 1940,un grupo de matemáticos y otros expertos relacionados con la criptografía, encabezados por **Alan Turing,** consiguieron crear la máquina 'Ultra', una especie de ordenador básico que consiguió descifrar mensajes alemanes, pero que mantuvieron en secreto. Esto fue decisivo para poder ganar la guerra.


Máquina 'Ultra'.

- **¿CUÁL ES EL NÚMERO PRIMO MÁS GRANDE QUE SE CONOCE?** Hoy día, los potentes ordenadores permiten encontrar números primos enormes. Utilizan, principalmente, la fórmula de los '**Primos de Mersenne**' (forma 2^p-1, donde *p* es primo). Si bien, todos los números obtenidos con esta fórmula no son primos, se tienen muchas opciones de encontrarlos. Obtener números es fácil, lo complicado es comprobar si son primos o no. A fecha, marzo de 206, el número primo más grande conocido es 274207281, menos '1'. Este número tiene más 22 millones de cifras (22.338.618 exactamente).

¿Te has fijado que los números primos** (casi) **siempre están 'al lado' de un múltiplo de '6'?

Más información en el documento sobre "MÚLTIPLOS Y DIVISORES. mcm y MCD. Criterios de divisibilidad. NÚMEROS PRIMOS.

NÚMEROS DEFECTIVOS Y ABUNDANTES.

Durante muchos años, los números naturales se dividían en defectivos o abundantes, o eran de un tipo o eran de otro. Con el paso del tiempo, esta clasificación ha caído en desuso, y hoy día, se utiliza principalmente la división en números primos, compuestos y 'uno'.

NÚMEROS DEFECTIVOS.

La suma de sus divisores propios es MENOR que dicho número.

***Ejemplo*: '10'.** Sus divisores propios son: 1, 2, 5. Si los sumamos nos da '8', y como '8' es menor que '10', entonces '10' es un número defectivo.

Si sus divisores propios son iguales a dicho número, se llama…

NÚMERO PERFECTO.

Solo se conocen 6 números perfectos.

NÚMEROS ABUNDANTES.

La suma de sus divisores propios es MAYOR que dicho número.

***Ejemplo*: '12'.** Sus divisores propios son: 1, 2, 3, 4 y 6. Si los sumamos nos da '16', y como '16' es menor que '12', entonces '12' es un número abundante.

**** Los números defectivos también se llaman DEFICIENTES, y los abundantes, también se llaman EXCESIVOS.***

**** Los divisores propios de un número son todos sus divisores menos él mismo.***

CARACTERÍSTICAS Y CURIOSIDADES.

1. NÚMEROS DEFECTIVOS:

► **Todos los números primos son defectivos**. Ya que el único divisor propio que tiene un número primo es el '1'.

► **Cualquier potencia de un número primo sigue siendo un número defectivo**. En este caso, sus divisores propios serían el '1' y las potencias del número original menos '1'. ***Ejemplo***: $5^4 = 625$. Sus divisores propios son: 1 (5^0), 5 (5^1), 25 (5^2) y 125 (5^3). La suma de todos ellos sigue siendo inferior a 625

► **Cualquier divisor propio de un número defectivo también es defectivo**. Por ejemplo, si el número '32' es defectivo (divisores propios 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31), cualquiera de sus divisores propios también es defectivo: 1, 2, 4, 8 y 16.

► **Cualquier divisor propio de un número perfecto**. Pasa algo similar al ejemplo anterior.

► **Aproximadamente, 4/5 de los números son defectivos**. Si cogiésemos una muestra de números amplia, aproximadamente 4 de cada 5 de ellos sería defectivo, y solo 1 de cada 5 abundante. Por tanto, podríamos decir que **hay aproximadamente el cuádruple de números defectivos que de abundantes**.

► **Hay infinitos números defectivos**. Los números naturales son infinitos, y van surgiendo continuamente en su orden hasta el infinito. Por tanto, es de lógica que son infinitos.

2. NÚMEROS ABUNDANTES:

► **El número impar abundantes más pequeño es el 945**. Por tanto, la inmensa mayoría de números abundantes son pares.

► **Cualquier múltiplo de un número perfecto es abundante**. En este caso, sus divisores propios serían el '1' y las potencias del número original menos '1'. Ejemplo: $5^4 = 625$. Sus divisores propios son: 1 (5^0), 5 (5^1), 25 (5^2) y 125 (5^3). La suma de todos ellos sigue siendo inferior ► **Cualquier múltiplo de un número abundantes es abundante**. Esto nos lleva a calcular fácilmente **infinitos números abundantes** a partir de uno dado. Por ejemplo, el primer número abundante es el '12', pues multiplicándolo por '2', por '3', por '4', por '5' y así sucesivamente, obtendré infinitos números abundantes.

► **Cualquier número entero mayor que 20.161 puede ser escrito como la suma de dos números abundantes**.

► **Un número abundante que no es un número semiperfecto se llama NÚMERO EXTRAÑO**. Se cumple en pocos números: 70, 836, 4030…

► **Un número abundante con abundancia 1 se llama NÚMERO CASI PERFECTO**. La "abundancia" en los números abundantes se calcula restando a la suma de sus divisores propios el número dado. Por ejemplo, la abundancia de '16' sería: divisores propios (1, 2, 4 y 8). Su suma sería 1 + 2 + 4 + 8 = 15. Si restamos; 16 – 15 = 1, nos da 'abundancia 1'. Por tanto, 16 es casi perfecto (quasiperfecto).

NÚMERO SEMIPERFECTO (o imperfecto). Números naturales iguales a la suma de algunos de sus divisores propios. *Ejemplos*: 12, 18, 24, 28, 30, 36 …	**NÚMERO CASI PERFECTO (o cuasiperfecto).** Números naturales iguales a la suma de sus divisores propios menos '1'. *Ejemplos*: solo las potencias de '2': 4, 8, 16…	**NÚMERO EXTRAÑO.** Números naturales que son abundantes, pero no son semiperfectos. *Ejemplos*: 70, 836, 4030, 5830…

La primera clasificación de los números naturales fue realizada por Nicómaco de Gerasa (sobre el año 100). Los clasificó en deficientes, perfectos o abundantes.

LISTA DE NÚMEROS ABUNDANTES: **12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102…**

➢ NÚMEROS CARDINALES Y ORDINALES.

Realmente no es una clasificación de los números naturales, sino una forma de expresarlos según su uso.

NÚMEROS CARDINALES: indican la cantidad.

NÚMEROS ORDINALES: indican el orden.

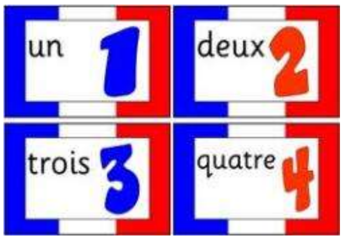


TABLA DE LOS NÚMEROS ORDINALES (se presentan en masculino/femenino y singular).

ESPAÑOL		INGLÉS		FRANCÉS	
1º	Primero/ra, primer	1^{st}	First	1^{er}	Premier/ère
2º	Segundo/da	2^{nd}	Second	2^{eme}	Deuxième / Second
3º	Tercero/ra, tercer	3^{rd}	Third	3^{eme}	Troisième
4º	Cuarto/ta	4^{th}	Fourth	4^{eme}	Quatrième
5º	Quinto/ta	5^{th}	Fifth	5^{eme}	Cinquième
6º	Sexto/ta	6^{th}	Sixth	6^{eme}	Sixième
7º	Séptimo/ma (sétimo/ma)	7^{th}	Seventh	7^{eme}	Septième
8º	Octavo/va	8^{th}	Eighth	8^{eme}	Huitième
9º	Noveno/na (nono/na)	9^{th}	Ninth	9^{eme}	Neuvième
10º	Décimo/ma	10^{th}	Tenth	10^{eme}	Dixième
A partir de 10º, se construyen uniendo la parte de centenas, decenas y unidades de forma ordinal.		*Se añade “st”, “nd” y “rd” en los números acabados en ‘1’, ‘2’ y ‘3’ respectivamente, salvo en ‘10^{th}’, ‘11^{th}’ y ‘12^{th}’.*		*Se añade “ème” siempre salvo en ‘1’. Para decir ‘70’ se utiliza la regla ‘60+10’, para ‘80’: ‘4 veces 20’ y ‘90’ sería ‘80+10’.*	
11º	Decimoprimero/ra, décimo primero/ra, decimoprimer, décimo primer, undécimo/ma	11^{th}	Eleventh	11^{eme}	Onzième
12º	Decimosegundo/da, décimo segundo/da, duodécimo/ma	12^{th}	Twelth	12^{eme}	Douzième
13º	Decimotercero/ra, décimo tercero/ra, decimotercer, décimo tercer	13^{th}	Thirteenth	13^{eme}	Treizième
14º	Decimocuarto/ta, décimo cuarto/ta	14^{th}	Fourteenth	14^{eme}	Quatorzième
15º	Decimoquinto/ta, décimo quinto/ta	15^{th}	Fifteenth	15^{eme}	Quinzième
16º	Decimosexto/ta, décimo sexto/ta	16^{th}	Sixteenth	16^{eme}	Seizième
17º	Decimoséptimo/ma, décimo séptimo/ma (también con sétimo/ma)	17^{th}	Seventeenth	17^{eme}	Dix-septième
18º	Decimoctavo/va, décimo octavo/va	18^{th}	Eighteenth	18^{eme}	Dix-huitième
19º	Decimonoveno/na, décimo noveno/na	19^{th}	Nineteenth	19^{eme}	Dix-neuvième
20º	Vigésimo/ma	20^{th}	Twentieth	20^{eme}	Vingtième
21º	Vigésimo primero/ra	21^{st}	Twenty first	21^{eme}	Vingt et unième
22º	Vigésimo segundo/da	22^{nd}	Twenty two	22^{eme}	Vingt-deuxième
30º	Trigésimo/ma	30^{th}	Thirtieth	30^{eme}	Trentième
40º	Cuadragésimo/ma	40^{th}	Fortieth	40^{eme}	Quarantième
50º	Quincuagésimo/ma	50^{th}	Fiftieth	50^{eme}	Cinquantième
60º	Sexagésimo/ma	60^{th}	Sixtieth	60^{eme}	Soixantième
70º	Septuagésimo/ma	70^{th}	Seventieth	70^{eme}	Soixante-dixième
71º	Septuagésimo/ma primero/ra	71^{st}	Seventieth first	71^{eme}	Soixante-onzième

80º	Octogésimo/ma	80^{th}	Eightieth	80^{eme}	Quatre-vingtième
90º	Nonagésimo/ma	90^{th}	Ninetieth	90^{eme}	Quatre-vingt-dixième
100º	Centésimo/ma	100^{th}	Hundredth	100^{eme}	Cintième
101º	Centésimo/ma primero/ma	101^{th}	Hundred and first	101^{eme}	Cintième et unième
200º	Ducentésimo/ma	200^{th}	Two hundredth	200^{eme}	Deux-centième
216º	ducentésimo/ma decimosexto/ta	216^{th}	Two hundredth and sixteenth	216^{eme}	Deux-cent-seizième
300º	Tricentésimo/ma	300^{th}	Three hundredth	300^{eme}	Trois-centième
400º	Cuadrigentésimo/ma	400^{th}	Four hundredth	400^{eme}	Quatre-centième
500º	Quingentésimo/ma	500^{th}	Five hundredth	500^{eme}	Cinq-centième
600º	Sexcentésimo/ma	600^{th}	Six hundredth	600^{eme}	Six-centième
700º	Septingentésimo/ma	700^{th}	Seven hundredth	700^{eme}	Sept-centième
800º	Octingentésimo/ma	800^{th}	Eight hundredth	800^{eme}	Huit-centième
900º	Noningentésimo/ma	900^{th}	Nine hundredth	900^{eme}	Neuf-centième
1.000º	Milésimo/ma	1.000^{th}	Thousandth	1.000^{eme}	Millième
1.001º	Milésimo/ma primero/ra - primer	1.001^{th}	Thousandth and first	1.001^{eme}	Mille et unième
1.427º	Milésimo cuadrigentésimo vigésimo/ma séptimo/ma	1.427^{th}	Thousandth fourhundreth and twemtieth-seventh	1.427^{eme}	Mille quatre cents vingt septième
2.000º	Dumilésimo/ma	2.000^{th}	Two thousandth	2.000^{eme}	Deux-millième
3.000º	Trimilésimo/ma	3.000^{th}	Three thousandth	3.000^{eme}	Trois- millième
10.000º	Diezmilésimo/ma	10.000^{th}	Ten thousandth	10.000^{eme}	Dix-millième
20.000º	Veintemilésimo/ma	20.000^{th}	Twenty thousandth	20.000^{eme}	Vingt-millième
100.000º	Cienmilésimo/ma	100.000^{th}	One hundred thousandth	100.000^{eme}	Cent-millième
200.000º	Doscientosmilésimo/ma	200.000^{th}	Two hundred thousandth	200.000^{eme}	Deux cents-millième
1.000.000º	Millonésimo/ma	$1.000.000^{th}$	One millionth	$1.000.000^{eme}$	Un millionième
2.000.000º	Dosmillonésimo/ma	$2.000.000^{th}$	Two millionth	$2.000.000^{eme}$	Deux millionième

**** Tanto los números cardinales como ordinales se pueden escribir tanto en masculino, femenino, singular y plural. En español si cambia la forma si cambia el género y el número, pero en ingles no.***

A continuación mostramos los NÚMEROS CARDINALES, en inglés (NUMBERS) y en francés (LES NOMBRES).

0 zero	10 ten	20 twenty	30 thirty
1 one	11 eleven	21 twenty-one	31 thirty-one
2 two	12 twelve	22 twenty-two	32 thirty-two
3 three	13 thirteen	23 twenty-three	33 thirty-three
4 four	14 fourteen	24 twenty-four	34 thirty-four
5 five	15 fifteen	25 twenty-five	35 thirty-five
6 six	16 sixteen	26 twenty-six	36 thirty-six
7 seven	17 seventeen	27 twenty-seven	37 thirty-seven
8 eight	18 eighteen	28 twenty-eight	38 thirty-eight
9 nine	19 nineteen	29 twenty-nine	39 thirty-nine
40 forty	50 fifty	60 sixty	70 seventy
41 forty-one	51 fifty-one	61 sixty-one	71 seventy-one
42 forty-two	52 fifty-two	62 sixty-two	72 seventy-two
43 forty-three	53 fifty-three	63 sixty-three	73 seventy-three
44 forty-four	54 fifty-four	64 sixty-four	74 seventy-four
45 forty-five	55 fifty-five	65 sixty-five	75 seventy-five
46 forty-six	56 fifty-six	66 sixty-six	76 seventy-six
47 forty-seven	57 fifty-seven	67 sixty-seven	77 seventy-seven
48 forty-eight	58 fifty-eight	68 sixty-eight	78 seventy-eight
49 forty-nine	59 fifty-nine	69 sixty-nine	79 seventy-nine
80 eighty	90 ninety		
81 eighty-one	91 ninety-one		
82 eighty-two	92 ninety-two		
83 eighty-three	93 ninety-three		
84 eighty-four	94 ninety-four		
85 eighty-five	95 ninety-five		
86 eighty-six	96 ninety-six		
87 eighty-seven	97 ninety-seven		
88 eighty-eight	98 ninety-eight		
89 eighty-nine	99 ninety-nine		

LARGE NUMBERS © Woodward English

100 one hundred	1,000 one thousand
101 one hundred and one	2,000 two thousand
200 two hundred	10,000 ten thousand
300 three hundred	100,000 one hundred thousand
400 four hundred	1,000,000 one million
500 five hundred	10,000,000 ten million
600 six hundred	123,456,789
700 seven hundred	one hundred and twenty-three million,
800 eight hundred	four hundred and fifty-six thousand,
900 nine hundred	seven hundred and eight-nine.

0 zéro	10 dix	20 vingt	30 trente
1 un	11 onze	21 vingt-et-un	31 trente-et-un
2 deux	12 douze	22 vingt-deux	32 trente-deux
3 trois	13 treize	23 vingt-trois	33 trente-trois
4 quatre	14 quatorze	24 vingt-quatre	34 trente-quatre
5 cinq	15 quinze	25 vingt-cinq	35 trente-cinq
6 six	16 seize	26 vingt-six	36 trente-six
7 sept	17 dix-sept	27 vingt-sept	37 trente-sept
8 huit	18 dix-huit	28 vingt-huit	38 trente-huit
9 neuf	19 dix-neuf	29 vingt-neuf	39 trente-neuf
40 quarante	50 cinquante	60 soixante	70 soixante-dix
41 quarante-et-un	51 cinquante-et-un	61 soixante-et-un	71 soixante-et-onze
42 quarante-deux	52 cinquante-deux	62 soixante-deux	72 soixante-douze
43 quarante-trois	53 cinquante-trois	63 soixante-trois	73 soixante-treize
44 quarante-quatre	54 cinquante-quatre	64 soixante-quatre	74 soixante-quatorze
45 quarante-cinq	55 cinquante-cinq	65 soixante-cinq	75 soixante-quinze
46 quarante-six	56 cinquante-six	66 soixante-six	76 soixante-seize
47 quarante-sept	57 cinquante-sept	67 soixante-sept	77 soixante-dix-sept
48 quarante-huit	58 cinquante-huit	68 soixante-huit	78 soixante-dix-huit
49 quarante-neuf	59 cinquante-neuf	69 soixante-neuf	79 soixante-dix-neuf
80 quatre-vingts	90 quatre-vingt-dix		
81 quatre-vingt-un	91 quatre-vingt-onze		
82 quatre-vingt-deux	92 quatre-vingt-douze		
83 quatre-vingt-trois	93 quatre-vingt-treize		
84 quatre-vingt-quatre	94 quatre-vingt-quatroze		
85 quatre-vingt-cinq	95 quatre-vingt-quinze		
86 quatre-vingt-six	96 quatre-vingt-seize		
87 quatre-vingt-sept	97 quatre-vingt-dix-sept		
88 quatre-vingt-huit	98 quatre-vingt-dix-huit		
89 quatre-vingt-neuf	99 quatre-vingt-dix-neuf		

LES GRANDS NOMBRES

100 cent	800 huit-cents
101 cent-un	900 neuf-cents
200 deux-cents	1.000 mille
202 deux-cent-deux	2.000 deux-mille
300 trois-cents	10.000 dix-mille
305 trois-cent-cinq	100.000 cent-mille
400 quatre-cents	1.000.000 un-million
500 cinq-cents	2.000.000 deux-millions
600 six-cents	1.000.000.000 un-milliard
700 sept-cents	2.000.000.000 deux-milliards

"EN LA WEB": es muy amplia. Te recomendamos:

- Wikipedia: contiene numerosas páginas sobre números ordinales, para español, inglés, francés y otros idiomas.
- **http://tip.dis.ulpgc.es/numeros-texto/default.aspx**. Genial página, para convertir números a ordinales, cardinales…, en español, inglés…

4.B. TIPOS DE NÚMEROS NATURALES SEGÚN LAS RELACIONES ENTRE SÍ.

Vamos a destacar otras clases de números, cuyo nombre les viene dado por cumplir ciertas reglas matemáticas. En esta clasificación podríamos ver muchísimos tipos. Nosotros vamos a destacar los siguientes:

TIPOS DE NÚMEROS	CONCEPTO	EJEMPLOS
NÚMEROS FELICES. (Subtipos: **Números infelices y tristes; números primos felices; números perfectos felices**).	**Se elevan al cuadrado cada una de sus cifras y se suma el resultado**. Se realiza este proceso nuevamente con todos los resultados obtenidos. Si el resultado final es ‘1’, entonces el número es feliz.	**1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193...**
NÚMEROS AMIGOS.	Dos números naturales son amigos cuando **la suma de los divisores propios de un número da el otro** y viceversa.	Muy pocos (por parejas): **220 y 284; 1184 y 1210; 2620 y 2924; 5020 y 5564; 6232 y 6368; 17.296 y 18.416**;
NÚMEROS SOCIABLES.	Son sucesiones cíclicas de números naturales, en las que **cada número se obtiene por la suma de los divisores propios del anterior.**	(Sucesiones cíclicas): **12.496 - 14.288 - 15.472 - 14.536 - 14.264 - 12.496**, y vuelve a comenzar el ciclo.
	NÚMEROS RELACIONADOS CON LOS NÚMEROS ABUNDANTES:	
NÚMEROS PERFECTOS.	Un número natural en el que **la suma de sus divisores propios da ese número**.	Hay 49 conocidos: **6, 28, 496, 8.128, 33.550.336, 8.539.869.056…**
NÚMEROS SEMIPERFECTOS o IMPERFECTOS.	Son números naturales **iguales a la suma de algunos de sus divisores propios**.	Hay muchísimos: **12** (6+3+2+1; no el 4); **18, 24, 28, 30, 36, 40**…
NÚMEROS CASI PERFECTOS o QUASIPERFECTOS.	Números naturales en los **que la suma de sus divisores propios da como resultado a ese número menos ‘1’.**	Los números casi perfectos conocidos son las potencias de ‘2’: **4, 8, 16, 32, 64, 128…**
NÚMEROS EXTRAÑOS.	**La suma de sus divisores propios es mayor que el número pero** no podemos encontrar ningún grupo entre sus divisores que sumados dé dicho número**.**	Hay pocos: **70, 836, 4030, 5830** …
NÚMEROS CAPICÚAS o PALÍNDROMOS.	Son números naturales que **se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda**.	**161, 434, 4994, 76.067, 518.815, 2.246.422, 333.303.333** …
REVERSO DE UN NÚMERO.	**Se construye escribiendo nuevamente las cifras de ese número pero en el orden inverso** o contrario.	Hay muchos: **853 → 358; 5.824 → 4.285; 639.855 → 558.936…**
NÚMEROS REVERSIBLES o NÚMEROS ESPEJO.	Son números que **girarlos** (dándoles la vuelta) **forman un número válido**.	Las parejas de cifras reversibles son: ‘0-0’ ‘1-1’, ‘2-5’, ‘6-9’, ‘8-8’: 50681 → 20981.
NÚMEROS VAMPIRO.	Números naturales, con **número par de cifras, que se obtienen al multiplicar entre sí dos números formados con la mitad de sus cifras** (‘colmillos’, los dos no acaban en ‘0’).	**1260, 1395, 1435, 1530, 1827, 2187 y 6880, 102.510, 104.260, 105.210, 105.264, 105.750, 108.135, 110.758…**
NÚMEROS DE FRIEDMAN.	Son números enteros que **se pueden obtener realizando cualquier operación aritmética con sus cifras.**	**25, 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736, 1022, 1024…**
NÚMEROS NARCISISTAS.	Números naturales que cumplen que **al elevar cada una de sus cifras a una potencia igual al número de cifras que tenga el número, y sumar los resultados, da ese número**.	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 153, 370, 371, 407, 1.634, 8.208, 9.474, 54.748 …**
NÚMEROS MÁGICOS.	Son números con características curiosas e interesantes.	**1089, y otros casos.**
	NÚMEROS RELACIONADOS CON LOS NÚMEROS PRIMOS:	
NÚMEROS OMIRP.	Números primos no capicúas que **al escribir sus cifras en orden inverso dan lugar a otro número primo**.	**13/31; 17/71; 37/73; 79/97; 107/701; 113/311; 149/941; 157/751…**
NÚMEROS PRIMOS GEMELOS.	**Dos números primos que se diferencian en dos unidades**, o sea son dos números impares seguidos que son primos.	**(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)…**
NÚMEROS SEMIPRIMOS o BIPRIMOS.	Es un **número natural que es producto de dos números primos no necesariamente distintos**.	**4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58…**
NÚMEROS COPRIMOS o PRIMOS RELATIVOS.	Son **dos números naturales que son primos entre sí**.	**6 y 27; 10 y 16; 55 y 62; 3.456 y 3.457…**
NÚMEROS PRIMOS DE MERSENNE.	Son números que **cumplen con la igualdad: ‘2^n-1 = número primo’** *(‘n’ también debe ser primo)*.	**2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217…**
NÚMEROS PRIMOS CAPICÚA.	Son números primos que son capicúa a la vez.	**2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313…**

Podríamos citar también tipos de números que se derivan de otros sistemas de numeración, como los **NÚMEROS BINARIOS, NÚMEROS ROMANOS**…, pero los veremos en el siguiente apartado llamado ‘Otros sistemas de numeración’.

NÚMEROS FELICES.

Son números naturales que cumplen la siguiente norma: “**Se elevan al cuadrado cada una de sus cifras y se suma el resultado. Se realiza este proceso nuevamente con todos los resultados obtenidos. Si el resultado final es ‘1’, entonces el número es feliz**”.

Si uno de los resultados del proceso de arriba se vuelve a repetir, quiere decir que nunca va a dar ‘1’, por tanto, el número se considera **infeliz o triste**. Este proceso repetitivo se llama ‘***bucle’***, y es de ‘***periodo 8***’ (cada vez que se realiza el proceso 8 veces, se vuelve a repetir.

Los números primos que son ‘felices’ se llaman NÚMEROS PRIMOS FELICES.

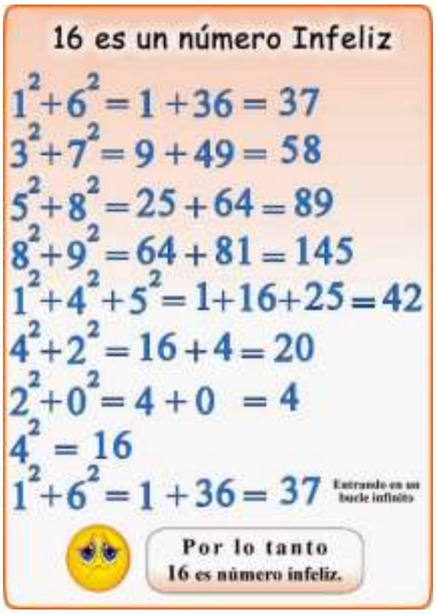
Los primeros números primos felices son: **7, 13, 19, 23, 31, 79, 97, 103, 109, 139, 167, 193, 239...** No se ha demostrado si son infinitos o no.

LISTA DE NÚMEROS FELICES.

Existen infinitos números felices, ya que cualquier número de ‘base 10’ siempre es feliz. Además, los primeros números felices son:

- De 1 cifra: **1** y **7**.
- De 2 cifras: **10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94 y 97**.
- De 3 cifras (existen 123): **100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193...**

* Conforme los números se hacen más grandes hay menos números felices: Un 22.22% de una cifra, un 18.89% de dos cifras, un 13.67% de tres cifras, etc.



NÚMEROS FELICES PERFECTOS. De los **49 números perfectos** que se conocen, solo tres son además felices: **28, 496 y 8128**. No se sabe si son infinitos o no.

NÚMEROS AMIGOS.

Dos números naturales son amigos cuando la suma de los divisores propios de un número da el otro y viceversa.

Ejemplo: 220 y 284 → Divisores propios del 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110. Su suma da 284.

→ Divisores propios del 284: 1, 2, 71 y 142. Su suma da 220. ⟹ Por tanto, **220 y 284 son amigos**.

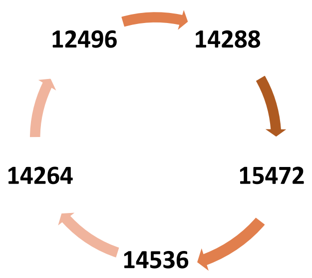
A lo largo de la historia, muchos matemáticos los han estudiado. Sobre el año 850, **Tabit ibn Qurra** desarrolló una fórmula que permitiría conocer varias parejas de números amigos. Hay pocos; los más próximos serían:

220 y 284; 1184 y 1210; 2620 y 2924; 5020 y 5564; 6232 y 6368; 17.296 y 18.416; 9.363.584 y 9.437.056.

NÚMEROS SOCIABLES.

Son sucesiones cíclicas de números naturales, en las que cada número se obtiene por la suma de los divisores propios del anterior. Con la suma de los divisores propios del último número se obtiene el primero. Así pues, debe ser una sucesión cíclica.

Ejemplos: *la sucesión más baja de números naturales que existe es:*



→ **En la sucesión del ejemplo, si sumamos los divisores propios del 12.496** (1 ,2 ,4 ,8 ,11 ,16 ,22 ,44 ,71 ,88 ,142 ,176 ,284 ,568 ,781, 1136 ,1562 ,314, 6248)**, nos da 14.288. Si sumamos sus divisores propios nos da 15.472. Si lo volvemos a hacer obtenemos 14.536, luego 14.264, y si sumamos sus divisores propios volvemos a obtener 12.496 y vuelve a comenzar el ciclo.**

→ Otras sucesiones conocidas de números amigos son: **1.264.460 → 1.547.860 → 1.727.636 → 1.305.184** (y volvería a empezar la secuencia).

→ No se han encontrado muchas series (hay una de 28 términos). La primera fue encontrada en 1918 por Poulet, y la última en 1969 por Henri Cohen.

* Dos **números amigos** son dos números sociables de orden 2. No se conoce ninguna sucesión de números sociables de orden 3.

* El resto de números a los que aplicamos este concepto (sumar los divisores del número anterior sucesivamente, al final la serie acaba en 1 o en el mismo número, que sería el caso de los **números perfectos**.

Tipos de números relacionados con los NÚMEROS ABUNDANTES.

Recordemos que los **NÚMEROS ABUNDANTES** son aquellos en los que **la suma de sus divisores propios es mayor que dicho número**. Por contra, si la suma de sus divisores propios es menor que dicho número, se llaman **DEFECTIVOS**.

Encontramos distintos tipos de números relacionados con la suma de sus divisores propios:

NÚMERO PERFECTO.

Un número perfecto **es un número amigo de sí mismo**. O sea, **un número natural en el que la suma de sus divisores propios da ese número**.

Ejemplos: El número "**6**": sus divisores propios son 1, 2, 3. → Si los sumamos, obtenemos 6.

El número "**28**" → Divisores propios: 1, 2, 4, 7, 14. → Si los sumamos, obtenemos 28.

El número "**496**" → Divisores propios: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248. → Si los sumamos, obtenemos 496.

El número **8.128** → Divisores propios: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064. → Su suma: 8128.

El quinto número perfecto fue descubierto por **Euclides**, quien desarrolló una fórmula para su estudio, y es: **33.550.336**. En 1603, **Petro Cataldi** halló los dos siguientes: **8.539.869.056** y **137.438.691.328**. Otros matemáticos han seguido estudiándolos, como Leonhard Euler (s.XVIII).

No se sabe si habrá alguno impar.

Los números perfectos son:

6
28
496
8.128
33.550.336
8.539.869.056
137.438.691.328

Se conocen 49 números perfectos.

NÚMERO CASI PERFECTO ("cuasiperfecto").

Son los números naturales en los **que la suma de sus divisores propios da como resultado a ese número menos '1'**.

Los números casi perfectos conocidos son las potencias de '2':

(Se considera a $\boldsymbol{2^0}$ ***=* 1** *como el único número casi perfecto impar).*

2^1 = **2** (su único divisor propio es el 1 → 2-1=1);

2^2 = **4** (suma de divisores propios: 1+2=3 → 4-3=1);

2^3 = **8** (suma de divisores propios: 1+2+4=7 → 8-7=1);

2^4 = **16** (suma de divisores propios: 1+2+4+8=15 → 16-15=1);

y así sucesivamente: **32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131.072, 262.144, 524.288, 1.048.576** ...

NÚMERO SEMIPERFECTO o IMPERFECTO.

Son números naturales **iguales a la suma de algunos de sus divisores propios**.

Ejemplos:

Hay infinidad de números imperfectos: **12** (6+3+2+1; no el 4); **18, 24, 28, 30, 36, 40**...

Características de los números semiperfectos:
- Todo múltiplo de un número semiperfecto, también es semiperfecto.
- El número semiperfecto impar más pequeño que existe es el **945**.
- Todo número semiperfecto es abundante.
- Los números semiperfectos son infinitos.

Lista de números semiperfectos: **12, 18, 24, 28, 30, 36, 40...**

*** CONJETURA DE LOS NÚMEROS SEMIPERFECTOS:**

"Sea *m* un número natural mayor que cero, si *n* es un número semiperfecto que resulta de multiplicar '*m*' por un número perfecto y el resultado de este producto dividido entre dos es par, entonces existen por lo menos '*m*' formas de expresar el número '*n*' mediante la suma de sus divisores propios."

NÚMERO EXTRAÑO.

Son números naturales que **son abundantes pero no semiperfectos**. O sea, **la suma de sus divisores propios es mayor que el número; sin embargo, no podemos encontrar ningún grupo entre sus divisores que sumados dé como resultado dicho número**.

Ejemplos: Hay pocos: **70, 836, 4030, 5830** ...

→ El número extraño más pequeño que existe es el 70 (divisores propios: 1, 2, 5, 7, 10, 14 y 35). Entre todos suman 74, pero no podemos hacer un grupo entre ellos para obtener 70.

NÚMEROS CAPICÚAS o PALÍNDROMOS.

Son números naturales que **se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda**.

*(El término "capicúa" viene del catalán '**cap i cua**', que significa «cabeza y cola». En matemáticas se llaman "números palíndromos o paolindrómicos")*

Ejemplos: **161, 434, 4994, 76.067, 518.815, 2.246.422, 678.333.303.333.876** …

Los números capicúas cumplen varias **PROPIEDADES**. Destacamos las siguientes:

- **Todo número capicúa con un número par de cifras es divisible por 11**. Esto implica que to**dos los múltiplos de 11 son capicúas**.

- Podemos **calcular el capicúa de un número sumándolo con su reverso**. Puede obtenerse a la "primera suma" o con un número indeterminado de "sumas". *Por ejemplo*: 57 + 75 = 132 → 132 + 231 = 363 que es capicúa.

En los capicúas podemos encontrar muchas **CARACTERÍSTICAS**:

- **Capicúas con todas sus cifras iguales**: 11, 22, 444, 5555, 66.666, 777.777, 8.888.888, 99.999.999, etc.

También capicúas con todas sus cifras iguales menos la central: 333.383.333, 6660666, 22822, etc.

También capicúas con sus cifras de "cabeza y cola" distintas y el resto iguales: 700007, 48884, 311111111113...

- **"Capicúas por poco"**: no son capicúas por una cifra: 4.560.653, 744446, 1.234.043.211 …

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$
$$11111111^2 = 123456787654321$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

¿NOTAS ALGO CURIOSO?

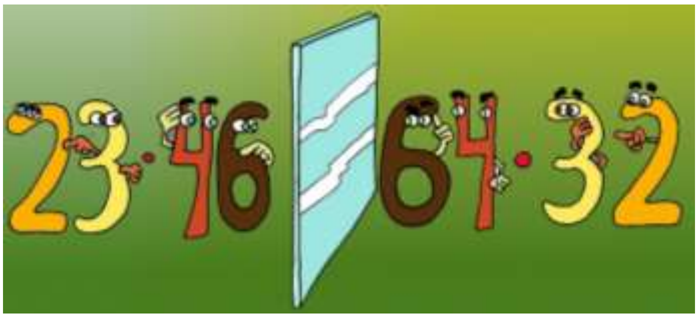
REVERSO DE UN NÚMERO.

El reverso de un número **se calcula escribiendo nuevamente las cifras de ese número pero en el orden inverso** o contrario, de derecha a izquierda (invirtiendo su escritura).

Ejemplo: **853** → Su reverso será **358**; **5.824** → Su reverso será **4.285**; Así hasta el infinito.

Todos los números tienen su reverso, aunque en el caso de los números de una cifra y de los números capicúas su reverso es el mismo número.

¿Deberían llamarse "NÚMEROS ESPEJO"?



NÚMEROS REVERSIBLES.

Son números (podrían ser enteros y decimales, positivos y negativos) que **al mirarse al revés** (dándoles la vuelta) **forman un número válido**. Se considera que las cifras "reversibles" son: 0, 1, 2, 5, 6, 8 y 9 (todas menos 3, 4 y 7). Así que cualquier número formado por dichas cifras sería reversible.

La correspondencia sería: **0→ 0; 1→ 1; 2→ 5; 5→ 2; 6→ 9; 8→ 8; 9→ 6.**

Ejemplos: 50681 → Forma reversible: 20981.

REVERSIBLES NETOS. Son **números reversibles pero que vistos al revés forman el mismo número** (todos los números que estén formados por las cifras 0, 1 y 8). ***Por ejemplo***: **8.0118, 11.080, 811.001** …

NÚMEROS VAMPIROS.

Son **números naturales, con un número par de cifras, que se obtienen al multiplicar entre sí dos números formados con la mitad de sus cifras**.

Tienen que cumplir las siguientes condiciones:

- **Tener un número de cifras par** (salvo dos cifras).

- **El producto de una combinación de la mitad de sus cifras por una combinación de la otra mitad dé como resultado ese número**. A esos dos números que se han multiplicado se les llama **COLMILLOS**.

- **Los dos 'colmillos' no pueden terminar en 0**.

1260 1395 1435 1530 1827

Ejemplos:

- De 2 cifras: **ninguno** (ni de cifras impares).
- De 4 cifras: hay solo **7** números vampiros: **1260, 1395, 1435, 1530, 1827, 2187 y 6880.**
- De 6 cifras: hay **148** vampiros: **102.510, 104.260, 105.210, 105.264, 105.750, 108.135, 110.758, 115.672, 116.725, 117.067, 118.440, 120.600, 123.354, 124.483, 125.248, 125.433, 125.460, 125.500, 126.027, 126.846, 129.640, ... , 136.948**
- De 8 cifras: hay **3.228** números.
- De 10 cifras: hay **108.454** números vampiros.
- De 12 cifras: hay **208.423.682** números vampiros.
- Etc. Hay infinitos números vampiros

15 x 93 = 1395

27 x 81 = 2187

30 x 51 = 1530

El concepto de 'número vampiro' **fue creado en 1994 por** Clifford A. Pickover, y los publicó a través de Internet.
Los números vampiros también son **NÚMEROS DE FRIEDMAN**.

Vamos a analizar algunos números vampiro:

VAMPIRO	COLMILLOS	OPERACIÓN
1.260	**21 y 60**	21 x 60 = 1.260
1.395	**15 y 93**	15 x 93 = 1.395
1.435	**41 y 35**	41 x 35 = 1.435
1.530	**30 y 51**	30 x 51 = 1.530
1.827	**87 y 21**	87 x 21 = 1.827
2.187	**81 y 27**	81 x 27 = 1.827
6.880	**80 y 86**	80 x 86 = 6.880

VAMPIRO	COLMILLOS	OPERACIÓN
102.510	**201 y 510**	201 x 510 = 102.510
104.260	**401 y 260**	401 x 260 = 104.260
105.210	**501 y 210**	501 x 210 = 105.210
105.750	**705 y 150**	705 x 150 = 105.570
108.135	**801 y 135**	801 x 135 = 108.135
120.600	**201 y 600**	201 x 600 = 120.600
136.848	**146 y 938**	146 x 938 = 136.848

Algunos números vampiro son tan especiales que tienen ¡2 pares de colmillos! ***Por ejemplo***, **"125.460: 204 x 165 y 246 x 510".**

Un ejemplo de un número que no puede ser vampiro a pesar de tener dos números creados con sus cifras que dan ese número, es el **126.000**, que se obtiene con "210 x 600 = 126.000", pero no es vampiro ya que sus colmillos acaban en '0'.

DIVIÉRTETETE

Coge cualquier número vampiro, sin mirar sus colmillos, e intenta buscar los colmillos que lo forman.

Esta actividad es muy divertidas para realizarla por parejas y grupos (dependiendo del número de participantes), para ver quién lo consigue antes. Establece distintos niveles:

- **Nivel 'PRINCIPIANTE': Vampiros de 4 cifras.**
- **Nivel 'EXPERTO': Vampiros de 6 cifras. Inténtalo sin calculadora. Son 'multiplicaciones de 2 cifras'.**
- **Nivel 'INVESTIGADOR": ¿Eres capaz de encontrar algún vampiro más? Puedes pedir alguna pista.**

NÚMEROS DE FRIEDMAN.

Son números enteros que se pueden obtener realizando cualquier operación aritmética con sus cifras.

Los números de Friedman cumplen una serie de requisitos:

- Los números de Friedman deben tener, al menos, 2 cifras, para poder realizar alguna operación con ellos.

- Pueden utilizarse **las 4 operaciones aritméticas básicas**: suma, resta, multiplicación (y potencias), división. ***Ejemplo***: "**$347 = 7^3 + 4$**".

- **Pueden utilizarse paréntesis** pero siempre dentro de la "jerarquía de operaciones. ***Ejemplo***: "**$1024 = (4 - 2)^{10}$**", sí está permitido, pero de la forma "24 = (24).", no está permitido.

- **No se pueden utilizar ceros a la izquierda**. ***Ejemplo***: "**001729 = 1700 + 29**", no es válido.

LISTA DE NÚMEROS DE FRIEDMAN:

Hay infinitos números de Friedman. Los primeros son: **25, 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736, 1022, 1024, 1206, 1255, 1260, 1285, 1296, 1395, 1435, 1503, 1530, 1792, 1827, 2048, 2187, 2349, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2592, 2737, 2916, 3125, 3159**, ... (Solo hay 72 casos entre los 10.000 primeros números. A medida que los números tienen más cifras, hay más probabilidad de que sean de Friedman).

CONSIDERACIONES ESPECIALES Y CURIOSIDADES:

- Todas las 'potencias de 5' son números de Friedman (al menos, eso parece, ya que como son infinitas, no se pueden calcular todas): **5^2 = 25**, **5^3 = 125**, **5^4 = 625**, **5^5 = 3.125**, **5^6 = 15.625**, ...

- El que todas las 'potencias de 5' sean números de Friedman, posibilita el poder encontrar cadenas consecutivas de Friedman. Ejemplo: tenemos que '250.010' se obtiene con el cálculo "$500^2 + 10$". Ello nos hace ver que los siguientes números consecutivos, hasta el '250.099' también serán de Friedman: "250.011 = $500^2 + 11$"; "250.012 = $500^2 + 12$"; "250.013 = $500^2 + 13$"; "250.014 = $500^2 + 14$"; "250.015 = $500^2 + 15$"; "250.016 = $500^2 + 16$"; ..., así, deducimos que **todos los números entre el '250.010' y el '250.099' son números de Friedman**.

- Los dos únicos que existen con las nueve cifras (sin el 'cero') correlativas son de Friedman: **123456789** = $((86 + 2 * 7)^5 - 91) / 34$, y **987654321** = $(8 * (97 + 6/2)^5 + 1) / 3^4$, ambos descubiertos por **Mike Reid y Philippe Fondanaiche.**

- Fondanaiche ha encontrado el que cree que es el número menor de Friedman con todas sus cifras iguales: "**99.999.999 = $(9 + 9/9)^{9-9/9} - 9/9$**". **Brandon Owens** demostró que estos números, cuando tienen más de 24 cifras son números de Friedman simpáticos en cualquier base.

- Todos los **NÚMEROS VAMPIRO** son números de Friedman.

- **Michael Brand**, en 2013, demostró, que si se elige al azar cualquier número de muchos dígitos, casi seguro que será número de Friedman.

- También hay **NÚMEROS ROMANOS DE FRIEDMAN**. En realidad, todos los números romanos que contengan más de un símbolo son números de Friedman, ya que se construyen sumando y, a veces, restando el valor de sus cifras. Por tanto, los "NÚMEROS ROMANOS DE FRIEDMAN" sufren una variación, y es que, tienen que tener, al menos, una multiplicación (o potencia) o una división.

Ejemplos: el más pequeño es el '**8**', ya que: "**VIII = (V - I) · II**", y además es número de Friedman simpático. Otros casos serían: '256': "CCLVI = $IV^{CC/L}$"; '137' (CXXXVII); '1.001': "MI = M · I"... Está demostrado que **cualquier número romano acabado en VIII es un número de Friedman**.

NÚMERO DE FRIEDMAN SIMPÁTICO: es aquel que se puede obtener con operaciones con el mismo orden de sus cifras que las cifras del número.
Ejemplo: "$127 = 2^7 - 1$" o "$127 = -1 + 2^7$".

Todas las expresiones para esta clase de números menores de 10.000 involucran adiciones y substracciones. Los primeros números de esta clase son: **127, 343, 736, 1285, 2187, 2502, 2592, 2737, 3125, 3685, 3864, 3972, 4096, 6455, 11264, 11664, 12850, 13825, 14641, 15552, 15585, 15612, 15613, 15617, 15618, 15621, 15622, 15623, 15624, 15626, 15632, 15633, 15642, 15645, 15655, 15656, 15662, 15667, 15688, 16377, 16384, 16447, 16875, 17536, 18432, 19453, 19683, 19739...**

Los 6 primeros NÚMEROS SIMPÁTICOS.

$$\begin{aligned} 127 &= -1 + 2^7 \\ 343 &= (3 + 4)^3 \\ 736 &= 7 + 3^6 \\ 1285 &= (1 + 2^8) \times 5 \\ 2187 &= (2 + 1^8)^7 \\ 2502 &= 2 + 50^2 \end{aligned}$$

* **Erich Friedman**, profesor de la Stetson University (Florida, EEUU), presentó estos números en agosto del año 2.000. Llevan su nombre en su honor. Trabajó junto a **Robert Happelberg** y, entre ambos, desarrollaron todas estas características y mucho más. Si quieres saber más, puedes entrar en **su web oficial:**
http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html

NÚMEROS NARCISISTAS.

Son **números naturales que cumplen que al elevar cada una de sus cifras a una potencia igual que el número de cifras que tenga el número, y sumar los resultados, da ese número**.

Ejemplos: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 153, 370, 371, 407, 1.634, 8.208, 9.474, 54.748 …**

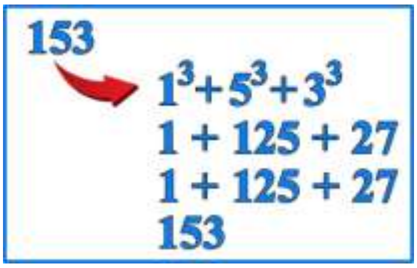
Vamos a comprobarlo:

- ‘**5**’: como tiene una cifra, elevamos “$5^1 = 5$”. Por tanto es narcisista (al igual que todos los números de ‘1’ cifra).

- ‘**153**’: como tiene tres cifras, elevamos cada una de ellas a ‘3’, y las sumamos: “$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$”.

Solo se conocen 88 números narcisistas.

Los dos números narcisistas más grandes conocidos tienen 39 cifras, y son consecutivos: **115132219018763992565095597973971522400** y **115132219018763992565095597973971522401**.



El **número ‘153’ es especial**: es el número narcisista más pequeño que no sea de una cifra, y además, su **número binario**, el ‘10011001’ es capicúa.

En esta página, encontrarás información y un vídeo explicativo (aunque está en inglés, se entiende perfectamente): https://seriesdivergentes.wordpress.com/2012/01/03/numeros-narcisistas/

CON LOS NÚMEROS NARCISISTAS PUEDES DIVERTIRTE APRENDIENDO A UTILIZAR LAS **POTENCIAS** Y LAS OPERACIONES COMBINADAS. ADEMÁS, PUEDES CONOCER EL “**MITO DE NARCISO**”.

Tiresias, un famoso vidente, había predicho que el joven **Narciso** viviría por muchos años, siempre y cuando él no se viera a sí mismo. Narciso a sus 16 años era un joven bastante apuesto, y llamaba la atención de muchas chicas y la envidia de algunos muchachos. Era bastante arrogante, que incluso llegaba a ignorar los encantos de los demás.

Una **ninfa** llamado **Eco**, se enamoró de él. Ella aprovechaba cada vez que **Zeus** estaba haciendo el amor con alguna **ninfa**, para escaparse y permanecer hablando con **Narciso**. Con su gran **ego** y **arrogancia**, Narciso rechazó a la ninfa, y ella enloqueció. Sus huesos se volvieron piedra y se marchitó, solo su voz seguía igual.


***Eco y Narciso*, pintura de John William Waterhouse (1903).**

Una de las muchas mujeres que había rechazado, quería enseñarle el **sufrimiento del amor no correspondido**.

Un día, mientras descansaba frente a un **lago cristalino**, Narciso vio su propio rostro en el agua y se **enamoró de él mismo**. Al no poder conseguir su "nuevo amor", pues cada vez que se acercaba al agua, desaparecía, enloqueció de desamor. Dejó de comer y beber, y al poco tiempo murió. Incluso en el reino de los muertos continuó hechizado por su propio rostro, viendo su imagen en los lagos negros.

Existen muchas versiones de este mito. Te recomendamos (además de la información de Wikipedia):

→ http://sobreleyendas.com/2008/09/23/el-mito-de-narciso-el-hombre-que-se-amaba-a-si-mismo/

→ http://mitosyleyendascr.com/mitologia-griega/la-ninfa-eco-y-narciso/

→ https://lamenteesmaravillosa.com/narciso-la-historia-de-un-egolatra-emperdernido/

NÚMEROS MÁGICOS.

No estamos hablando de un tipo de números, pero sí te vamos a enseñar algunos números que bien podrían formar una categoría nueva.

Sin duda, el número más mágico hasta ahora encontrado es **PHI** (el número áureo, de oro o de Dios). Recibe su nombre del escultor griego Fidias. Está presente en toda la naturaleza (en la espiral de la concha de un caracol, en los pétalos de una flor…), en el Universo… Está relacionado con la **serie de Fibonacci**. Su valor es '**1, 6180339…**'

Coge un número cualquiera de 3 cifras. Dale la vuelta y se lo restas al número que has pensado. Al resultado le das la vuelta y se lo sumas. ¿Qué número obtienes?

1089

Ejemplo: pensamos el '825'. Le damos la vuelta: '528' y lo restamos al número que hemos pensado: "825-528 = 297". Ahora, sumamos al '297' con su reverso '792': "297 + 792 = 1089". ¡¿**INCREÍBLE**?! Siempre se obtiene este número. (*Nota, si en la primera resta obtienes un número negativo, tómalo como positivo*).

MÁS TRUCOS DE MAGIA: "**Si lo multiplicamos por '9' y escribimos su reverso, volvemos a obtener '1089**'. ("1089 x 9 = 9801", que es '1'89' al revés. Su reverso sería: '1089')"

Y para rizar el rizo, os contaremos la **propiedad más mágica de todas**. Si cogéis el número '9801', resultado de multiplicar "1089 x 9", y hacéis su inverso: "1 : 9801 = 0,0001020304050607…969799", obtenemos **un número decimal con todos los números enteros del '0' al '99' en su parte decimal**, ¡**colocados correlativamente**! Bueno todos no, todos, excepto el '98' que son precisamente las dos primeras cifras de '9801'.

LOS NÚMEROS NATURALES NOS PERSIGUEN

1
Es el número de los campeones, la unidad, Dios, divide a todos los números, el inicio de todo…

2
Es el número del amor y los enamorados, de la pareja, las dos caras de todo…

3
Para Lao Tsé, padre del Taoísmo, era el número que generaba todas las cosas (el '1' crea al '2', y el '2' al '3', que crea todas las cosas).
La Santísima Trinidad, los 3 colores básicos (azul, rojo y amarillo)…

4
Se dice que todo está compuesto de 4 elementos básicos: **AGUA, TIERRA, AIRE y…,** aunque hayas escuchado el fuego, en realidad es **la LUZ**; número de la mala suerte en China…

5
Los dedos de una mano, pentagrama…

7
Es el número de la buena suerte. El famoso Pitágoras, creía que era el número perfecto. Se obtiene a partir de "3+4", dos números muy importantes… Es el nexo entre el cielo y la Tierra, 7 días de la semana (Dios hizo el mundo en 7 días), los 7 pecados capitales, 7 sacramentos, 7 maravillas del mundo, 7 notas musicales, 7 colores del arco iris, 7 cielos en el Islam, 7 chakras…

10
Los 10 mandamientos, 10 plagas de Egipto, nuestro sistema de numeración es decimal (va de '10' en '10')…

12
La docena, 12 meses, 12 tribus de Israel, 12 signos del zodiaco…

8
Se dice que es bueno dormir 8 horas, pero ¿a que no sabías que hasta la aparición de la luz eléctrica en las casas y las calles las personas dormían en dos turnos? Se acostaban al anochecer, bastante temprano, se levantaban de madrugada, y a las pocas horas dormían otra vez.
En China, número de la buena suerte.

PHI, EL NÚMERO ÁUREO, DE ORO. EL NÚMERO DE DIOS.

EL NÚMERO DEL DIABLO: ¿666, 616 o 999?

Algunos números han despertado tantas curiosidades que tienen hasta su propia película, como "El número 23", protagonizada por Jim Carrey.

11
¿"Número maldito"? "11-S", "11-M"…

<u>Otros números</u>: GÚGOL (y sus variantes), PI (π), PHI o NÚMERO DE ORO (ϕ), número e, número i, etc.

➢ NÚMEROS RELACIONADOS CON LOS Nºs PRIMOS.

NÚMEROS OMIRP.

Son **números primos no capicúas** (palíndromos) **que al escribir sus cifras en orden inverso dan lugar a otro número primo** (de ahí proviene su nombre, escrito de forma inversa a "primo").

Ejemplos:

→ De dos cifras: **13/31; 17/71; 37/73; 79/97**.

→ De tres cifras: **107/701; 113/311; 149/941; 157/751; 167/761; 179/971; 199/991; 337/733; 347/743; 359/953; 389/983; 709/907; 739/937; 769/967**.

→ De cuatro cifras: **1009/9001; 1021/1201; 1031/1301; 1033/3301; 1061/1601; 1069/9601; 1091/1901; 1097/7901; 1103/3011; 1109/9011; 1151/1511; 1153/3511; 1181/1811; 1193/3911 …**

○ NÚMEROS PRIMOS GEMELOS.

Son dos números primos que se diferencian en dos unidades, o sea son dos números impares seguidos que son primos.

Ejemplos: Hay 35 parejas hasta el 1.000.No se sabe si son infinitos.

→ De dos cifras (8 parejas): **(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61) y (71, 73).**

→ De tres cifras (27 parejas):**(101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859) y (881, 883).**

*** Hay una pareja muy especial (2, 3), son primos correlativos, se nos ocurre llamarlos PRIMOS GEMELOS SIAMESES.**

○ NÚMEROS SEMIPRIMOS o BIPRIMOS.

Son **números naturales que son el producto de dos números primos**, iguales o distintos.

Ejemplos: son infinitos, basta con multiplicar dos números primos, y el resultado será un semiprimo.

Los semiprimos menores que 100 son:**4** (2x2),**6** (2x3), **9**(3x3), **10** (2x5), **14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77,82, 85, 86, 87, 91, 93, 94 y 95**.

Los semiprimos que no son cuadrados perfectos se denominan **PRIMOS DISCRETOS**, o simplemente semiprimos. O sea, todos menos 25, 49, 91…

○ NÚMEROS SEMIPRIMOS o BIPRIMOS.

Son **dos números naturales que son primos entre sí** (su MCD = 1). Para ello, **no pueden tener ningún divisor en común**, o lo que es lo mismo, si el único divisor que tienen es común es '1' y '-1'. O sea, si su Máximo Común Divisor (M.C.D.) es '1'. Hay muchísimos números que cumplen esta circunstancia. Ambos números por separados no tienen porqué ser primos. También podría aplicarse a más de dos números entre sí.

Ejemplos: **9 y 16; 14 y 81; 55 y 63; 3.456 y 3.457; etc**.

Comprobación: Divisores del "9": 1, 3, 9. Divisores del 16: 1, 2, 4, 8, 16. Solo tienen en común el "1".

Con el **algoritmo de Euclides** (para calcular el M.C.D. de dos o más números) se puede comprobar rápidamente si dos o más números son coprimos. → M.C.D. (6,27) = 1.

Otras características y propiedades, de las muchas que hay, son:

- Si dos números son coprimos (llamémosles "a" y "b"), entonces existen dos números enteros (llamémosles "x" e "y") con los que se cumple que: "**a · x + b · y = 1**". (A esto se le llama **Identidad de Bezout**).

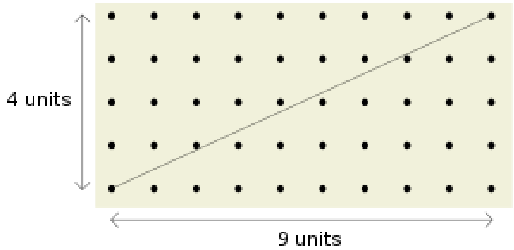
- Dos números consecutivos siempre son coprimos.

- El MCD de dos números coprimos siempre es '1'.

- La probabilidad de que dos números enteros elegidos al azar sean primos entre sí es igual a $6/\pi^2$ (un poco más del 50%).

Si representamos en un eje de coordenadas a dos números y trazamos una línea desde el origen (0,0) hasta el punto (a,b) y no intersecta ninguno de sus puntos, entonces "a" y "b" son coprimos.

Por ejemplo 4 y 9 (ver imagen).



- Dos números naturales "a" y "b" son primos entre sí, si y sólo si, los números 2a-1 y 2b-1 son primos entre sí.

- **SI DOS NÚMEROS NO SON PRIMOS ENTRE SÍ, ENTONCES PODEMOS DECIR QUE SON COMPUESTOS ENTRE SÍ**.

NÚMEROS PRIMOS DE MERSENNE.

Son **números que cumplen con la igualdad**: '**2^n-1 = número primo**'. Todos los números primos que puedan ser 'n' serán primos de Mersenne.

Se conocen **49 números de Mersenne**, aunque no se sabe si hay más.

Los primeros de la lista son: **2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11.213, 19.937, 21.701, 23.209, 44.497, 86.243…** (así hasta 49 números conocidos). Imagínate que potencias de '2' tan increíbles surgen de estos números primos. Los últimos números de la lista solo han podido ser descubiertos con potentes ordenadores.

Ejemplos: 'n=2' → 22-1 = 3; 'n=5' → 25-1 = 31; 'n=7' → 27-1 = 127 …

Esta afirmación no se cumple en todos los casos. ***Por ejemplo***, para 'n=11' → 211-1 = 2047, no es un número primo, porque es divisible entre 23 y 89.

* **Nota**: los descubrió el monje "matemático" francés **Marin Mersenne** (1588-1648)

NÚMEROS PRIMOS CAPICÚAS.

Son **números primos que además son capicúas**.

La lista de números primos y capicúas es la siguiente: **2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341, 14741, 15451, 15551, 16061, 16361, 16561, 16661, 17471, 17971, 18181,…**

Hay más tipos de números primos, pero con formas más complejas de formularlos: **Números primos de Fermat, Número primo de Sophie Germain, Número primo de Wagstaff, números primos de Euclides, Primo de Solinas, Espiral de Ulam…**

NÚMEROS PRIMOS MUY CURIOSOS.

NÚMERO PRIMO de BELFEGOR.

Belfegor es un demonio que seduce a las personas ofreciéndoles inventos ingeniosos que supuestamente les proporcionarán riquezas.

Hay un número primo muy especial que lleva su nombre '***primo de Belfegor***'. El físico ***Cliff Pickover*** habla de este primo en una entrada en su web. Es el número:

1000000000000066600000000000001

que es un primo palindrómico -capicúa- con el número del diablo **666** colocado … ¡entre dos parejas de **13** ceros!, y un '1' al principio y al final.

¿SABÍAS QUE… en realidad el número del Diablo es el '616'?, lo que ocurrió que hace siglos hubo un error en su transcripción y ya se ha quedado en el '666'.

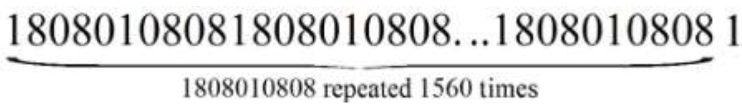
UN NÚMERO PRIMO MUY SIMPÁTICO.

Te presentamos **un número primo capicúa increíble**: está formado por **¡¡99 cifras!!**,solo con el '**2**' y el '**7**', y alternándolos:

727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727

"RIZANDO EL RIZO".

Si aún no estás con la boca abierta, prueba a conocer este número: **1808010808repetido 1560 veces y añadiendo un '1' al final… ¡¡¡ES PRIMO!!! Además, es CAPICÚA y, por si fuera poco, también es un NUMERO ESPEJO** (reflejado arriba-abajo). O sea, se lee igual de derecha a izquierda o de arriba abajo. Sin palabras.



→***Si quieres conocer más números primos increíbles, entra en este blog: Nice Prime!***

4.C. EL NÚMERO IMAGINARIO.

Todos los números imaginarios conocidos se forman a partir del número '**i**'.

➢ El número i.

Es un número imaginario, y equivale a **i** = $\sqrt{-1}$. Aparentemente no la raíz cuadrada de '-1' no existe, pero cuando este número se aplica a fórmulas y a situaciones matemáticas y/o físicas, comienza a adquirir sentido. Este número fue introducido por **Leonhard Euler** en 1777, quien le dio el nombre "**i**" por ser imaginario (aunque ya en 1572 Rafael Bombelli hizo cálculos con él pero sin llegar a establecerlo).
Los números imaginarios se utilizan en planos de coordenadas complejos, trigonometría, geometría, en física cuántica…

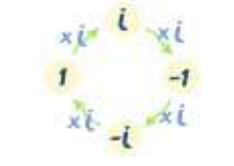
$$i = \sqrt{-1}$$

PRINCIPALES PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS:

- A partir de i se pueden escribir otros números imaginarios de la forma "ib" ("b" es un número real), por ejemplo **5i,** $^{3}/_{4}$ **i**, etc.
- Además, como **i2 = -1**, entonces **(bi)2 = -b2**.
- Si elevamos i sucesivamente a potencias consecutivas obtendremos un valor cíclico repetido.

O lo que es lo mismo, si multiplicamos i por sí mismo de forma consecutiva, vamos obteniendo un resultado cíclico.

$i^{-4} = 1$	$i^{-3} = i$	$i^{-2} = -1$	$i^{-1} = -i$
$i^{0} = 1$	$i^{1} = i$	$i^{2} = -1$	$i^{3} = -i$
$i^{4} = 1$	$i^{5} = i$	$i^{6} = -1$	$i^{7} = -i$
Así podríamos seguir infinitamente.			



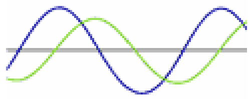
- Gracias a los números imaginarios, se dice que en matemáticas cualquier polinomio tiene solución.

→ Vamos a ver una de las aplicaciones matemáticas más sencillas de i:

RESOLVER RAÍCES DE NÚMEROS NEGATIVOS. *Por ejemplo:* $\sqrt{-9}$ **= 3i**.

$\sqrt{-9}$ = $\sqrt{)9\,x-1)}$ = $\sqrt{9}$ x $\sqrt{-1}$ = 3 x $\sqrt{-1}$ = 3i. Así para cualquier raíz de un número negativo. Si no existiera i, este cálculo no podría realizarse. *¿Comprendes ahora su utilidad?*

→ **USO EN ELECTRICIDAD**: La CA o AC (corriente alterna) cambia de positivo a negativo siguiendo una onda sinuoidal. Si combinas dos corrientes alternas puede que no coincidan bien, y puede ser **muy difícil** calcular la nueva corriente. Pero usar números reales e imaginarios juntos hace mucho más fáciles los cálculos.

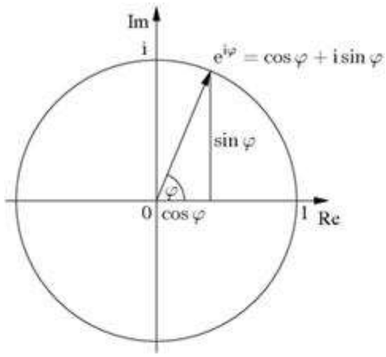


TEN EN CUENTA:

En matemáticas se usa **i** (de imaginario) pero en electrónica (e ingeniería eléctrica) se usa **j** (porque "**i**" ya es la corriente, y la letra siguiente después de la i es la j). Para no confundirlos.

Hemos de recordar también que i está presente en la famosa e importantísima fórmula matemática de la **IDENTIDAD DE EULER**:

$$e^{i\pi} = -1$$



i, el número…

imposible, **i**ncreíble, **i**mpresionante, **i**rreal,

imaginario, **i**ncomprensible, **i**nconfundible…

4.D. NÚMEROS IRRACIONALES (más importantes).

También existen números "especiales" muy usados en matemáticas. Su existencia es muy importante en las matemáticas, y tienen muchas características y aplicaciones. Los veremos de forma resumida.

➢ Número pi (π).

Pi es un número **irracional y trascendente** (tiene infinitos decimales no periódicos) que **se obtiene al dividir la longitud de una circunferencia entre la longitud de su diámetro**; es decir, el diámetro de cualquier circunferencia es siempre un poco más del triple, concretamente **3,14159265358979323846…** veces su diámetro. Las cifras decimales de **pi** son infinitas.

Breve historia de pi: este número, o más bien la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, ha sido utilizada y usada desde hace miles de años. Al parecer, se pueden encontrar usos de **pi**, o de cálculos similares, desde hace incluso 5000 años (hay autores que remontan esa fecha aún más). Lo que sí es cierto, que hay referencias claras sobre este concepto desde el Antiguo Egipto, las civilizaciones antiguas mesopotámicas, chinas e indias, griegos, romanos, e incluso hay referencias en la Biblia. Pero hasta 1706 no fue introducido su símbolo "**π**" (letra griega "pi") por William Jones. Posteriormente, **Leonard Euler** lo popularizó sobre el año 1737.

Importancia del número pi (π). Es muy usado en física, ingeniería y matemáticas.

- En **MATEMÁTICAS**: es usado especialmente en geometría, en multitud de fórmulas. Por ejemplo:

Longitud de la circunferencia: $L = \pi \cdot d$ **o** $L = \pi \cdot 2 \cdot r$	**Área del círculo:** $A = \pi \cdot r^2$

Para calcular el área de la elipse o el volumen del cilindro, del cono, la esfera, el toro... En trigonometría, 180 grados son π radianes. Aparece en el estudio del azar y la probabilidad; en múltiples cálculos y ecuaciones; en análisis matemáticos…

- En **FÍSICA**, es utilizado en innumerables cálculos matemáticos, aunque vamos a destacar las siguientes fórmulas y ecuaciones: La **constante cosmológica**; **Principio de incertidumbre de Heisenberg**; **Ecuación del campo de Einstein** de la relatividad general; **Ley de Coulomb** para la fuerza eléctrica; **Permeabilidad magnética** del vacío; Tercera ley de Kepler; …

- En **INGIENERÍA**, sería imposible construir un simple disco para ordenadores sin utilizar **π**. Pero sobretodo es especialmente importante en aeronáutica. Para calcular las órbitas de satélites y naves espaciales (cohetes…), sin un cálculo muy exacto de **pi**, sería imposible.

CURIOSIDADES SOBRE "PI":

- El **14 de marzo se celebra su día** (3/14, en formato anglosajón). También es el día en que nació **Albert Einstein**.

Existe el "**Lenguaje pi**" que consiste en escribir palabras con el número de letras de las cifras de pi: 1º una palabra de tres letras; luego de una letra; luego cuatro letras…, por ejemplo, este refrán para explicar qué es "pi":

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

- Al dividir el perímetro de la base de la **Gran Pirámide de Gizeh** por su altura produce un número equivalente a 2 veces **π**. Además, la Gran Pirámide contiene multitud de proporciones métricas matemáticas avanzadas, por lo que muchos investigadores defienden que su construcción encierra muchos enigmas por conocer.

- En el año 2600 a.C., se aproximó pi al número fraccionario **22/7**. Un gran cálculo para la época.

- En 2005, el chino **Chao Lu** consiguió **recitar de memoria 67.890 decimales de π**. ¡Tardó más de 24 horas!

- En 2011, Alexander Yee y Shigeru Kondo calcularon **los 10 primeros billones de decimales de π**. Su ordenador tardó ¡más de 1 año! Estaban en Japón, y el tsunami que azotó sus costas estuvo a punto de impedirlo.

- **Arquímedes**, en el año 750 a. C. aproximadamente corrió por la calle desnudo gritando **"¡Eureka!"** tras resolver un problema y calcular el número **pi** como 3,14.

- **Pi** aparece en numerosas situaciones de la naturaleza aunque parezca increíble. Por ejemplo, Hans-Henrik Stølum, geólogo, calculó en 1996 **la relación entre el doble de la longitud de un río y la distancia en línea recta entre su nacimiento y su desembocadura**. Sorprendentemente obtenía aproximadamente 3,14.

- En los últimos tiempos han surgido investigadores que han realizado cálculos y dicen que *el cálculo de Pi es incorrecto*. Con sus **nuevos cálculos le dan el valor de 3,144605511… ¿Será verdad?**

ADIÓS "PI", HOLA "TAU": muchos matemáticos postulan que el uso de Pi es incorrecto, pues una circunferencia se relaciona con el radio, no con el diámetro. El valor de **Tau** sería el doble de Pi: **Tau = 6,28318530717958…**Además, sería más fácil realizar muchos cálculos. Por ejemplo, la longitud de la circunferencia sería **Tau** por el radio.

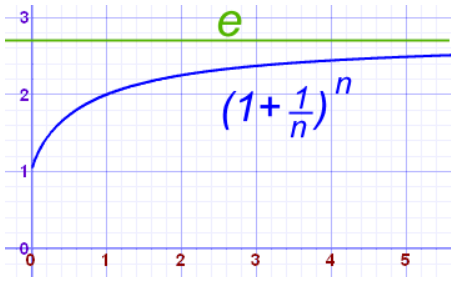
Número e.

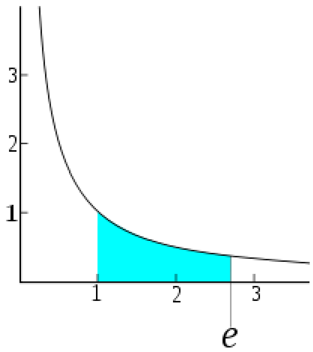
Es un **número irracional y trascendente**. Es uno de los números más importantes utilizados en las matemáticas. Su valor es: **e = 2,7182818284590452353602874713527…** Se calcula a partir de la siguiente fórmula matemática: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ donde "n" es cualquier número natural. El valor de la fórmula nos va dando resultados cada vez más cercanos al número **e** cuanto mayor es "n". Cuando "n" se acera a infinito (∞), obtenemos el número e.

El primer matemático que uso el número **e** fue **John Napier** en 1618. Otros matemáticos de la época también lo usaron, pero no fue hasta 1727 cuando **Leonhard Euler** lo popularizó y lo hizo tan importante.

PROFUNDIZANDO SOBRE e:

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827





El área entre el eje *x* y la gráfica *y* = 1/*x*, entre *x* = 1 y *x* = *e* es 1.

Cuanto más se acerca 'n' a infinito, más se acerca e a su valor. También se aprecia en la gráfica.

MEMORIZAR e:

- En 2010 calcularon **¡¡1 billón de cifras decimales del número e!!** No hace falta saber tanto, pero sí podemos ofrecerte algunos trucos para memorizar algunas cifras decimales de **e**:

Puedes recordar las cifras de **e** aprendiendo esta frase (el número de letras de cada palabra indica la cifra de **e**: "**EL**(2) **TRABAJO**(7) **Y**(1) **ESFUERZO**(8) **DE**(2) **RECORDAR**(8) **e**(1) **REVUELVE**(8) **MI**(2) **ESTÓMAGO**(8).	**Fíjate que después del "2,7" aparece dos veces el "1828"**: 2,718281828…	**También te puedes fijar en que después de eso aparecen los ángulos de un triángulo isósceles: 45°, 90°, 45°:** 2,718281828459045…

PERO, ¿POR QUÉ ES TAN IMPORTANTE e? Y ALGUNAS CURIOSIDADES.

- Está presente en numerosos cálculos y fórmulas matemáticas: logaritmos naturales o neperianos principalmente, pero también en otro tipo de **cálculos exponenciales** y de otro tipo.

- Se aplica a estadística: como la famosa **curva de la campana de Gauss**, para el estudio de población: una fórmula matemática usando **e** permite calcular su crecimiento exponencial en situaciones normales.

- A la economía: como para calcular el **interés compuesto continuo** en préstamos, depósitos bancarios, hipotecas, inversiones: "$f(r) = e^r - 1$".

- A la física: en numerosos cálculos y fórmulas…

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

- **Para calcular el crecimiento de cualquier ser vivo**, se utiliza el número e, ya que este crecimiento es exponencial, y sigue las pautas del número **e**.

- **Para datar la antigüedad de un fósil** con la prueba del 'carbono 14', ya que todo ser vivo tiene una cantidad de carbono constante que se va perdiendo con el paso del tiempo, siguiendo una pauta basada en **e**.

- Usando fracciones la mejor aproximación a **e** es '**87/32**'. Nada impactante. Pero usando 3 dígitos, la mejor fracción es '**878/323**'. Sorprendente.

- Una cadena o un cable colgado por sus extremos tiende a formar una curva que se puede calcular con una función matemática donde se usa el número **e**.

- Ernest V. Wright escribió la novela "Gadsby", de unas 50 mil palabras sin la letra 'e'.

- Es el número principal de la fórmula más extraordinaria de las matemáticas (contiene a π, al número i, al número e, el '1', y el '0'): **LA IDENTIDAD DE EULER:** $e^{i\pi} + 1 = 0$.

- Pero, ¿de dónde viene su nombre? Pues no viene ni de "exponencial" ni de Euler, su principal difusor. Se cree que Euler le dio ese nombre porque es la vocal que sigue a la 'a' y él ya estaba usando esta letra en sus estudios.

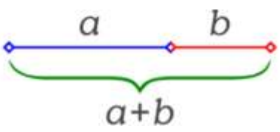
➢ Número ÁUREO: PHI (“fi”).

Es un **número irracional algebraico**, que equivale a **Φ = 1,61803398874988...,** y que surge de la siguiente fórmula:

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. También es la solución a la ecuación: $x^2 - x - 1 = 0$.

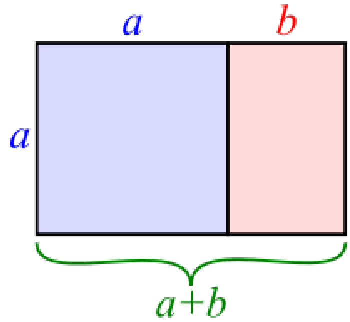
Se denomina **NÚMERO ÁUREO, DE ORO, DORADO o DIVINO; RAZÓN ÁUREA, DE ORO, DORADA o DIVINA; PROPORCIÓN ÁUREA, DE ORO, DORADA o DIVINA**.

El número áureo no surgió a partir de la fórmula o ecuación mostrada arriba, sino de la división en dos de un segmento guardando las siguientes proporciones: “La longitud total ***a+b*** es al segmento más largo ***a***, como ***a*** es al segmento más corto ***b***”.



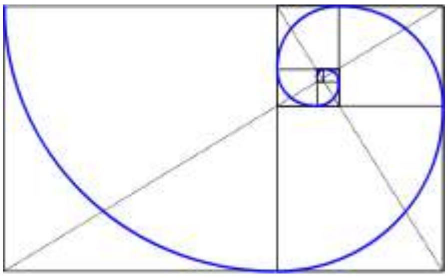
Dos números *a* y *b* están en proporción áurea si se cumple: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

A esta proporción se le llama RECTÁNGULO ÁUREO o RECTÁNGULO DORADO.



Este tipo de rectángulo parece mágico. Te recomendamos que pinches en este enlace para que veas una animación con la que lo entenderás mejor:
http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/rectanguloaureo.html.
(En esta página web viene información muy interesante sobre el RECTÁNGULO ÁUREO).

No obstante, te lo explicamos: “**Un rectángulo áureo es aquel en el que trazamos un cuadrado en su interior de lado ‘a’. El rectángulo restante, de base ‘b’ y altura ‘a’ es proporcional al rectángulo inicial. Este proceso se puede repetir infinitamente**”.



Espiral áurea construida a partir de la evolución de un rectángulo dorado.

Este rectángulo genera la ESPIRAL DORADA, ¡la misma que se genera con la SERIE DE FIBONACCI!

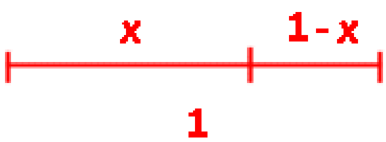
¿CÓMO SURGE SU NOMBRE Y SU SÍMBOLO?

Se representa con la sexta letra del alfabeto griego **“phi” Φ**, al parecer en honor del escultor griego **Fidias**, quién lo utilizó en sus obras (aunque el símbolo Φ se le otorgó el matemático **Mark Barr** en el año 1900). También es posible encontrarlo con el signo: **φ.** Incluso con las letras griegas “alpha minúscula” o “Tau”.

AMPLIACIÓN: Demostración de su fórmula y ecuación:

La sección áurea es la división armónica de una segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

Tomemos un segmento de longitud uno y hagamos en el la división indicada anteriormente.



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es x= $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(-1+\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5} =$$

$$= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618... \Rightarrow \text{el numero de oro}$$

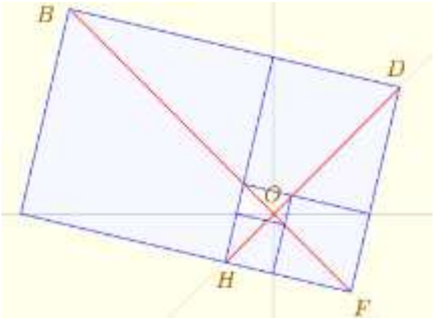
Es decir, la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento es el número de oro.

CURIOSIDADES Y USOS:

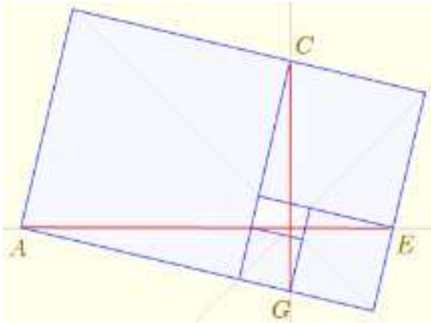
Las curiosidades y presencias de PHI en la naturaleza, el Universo, nuestra vida diaria, en las diversas ciencias (matemáticas, física, química, biología, arquitectura…) es inmensa. Te mostramos algunos ejemplos:

► EN GEOMETRÍA (matemáticas):

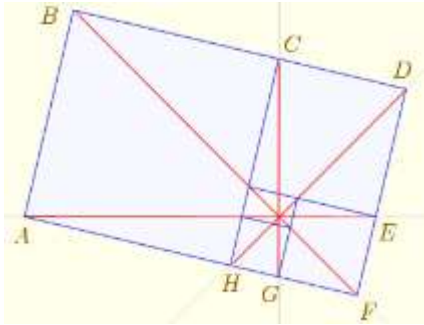
- En relación al RECTÁNGULO ÁUREO Y LA ESPIRAL ÁUREA hay muchísimas curiosidades. Incluimos alguna más:



Los segmentos trazados son perpendiculares.



Nuevamente segmentos perpendiculares.

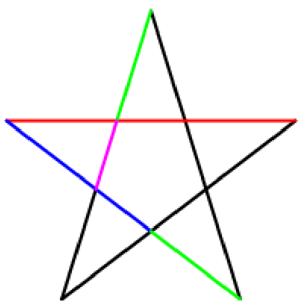


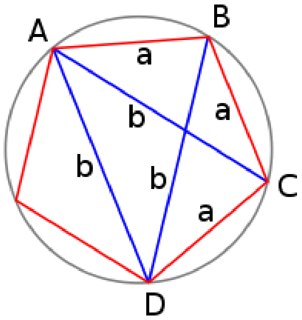
Los 4 segmentos se cortan en un punto.

- Relaciones entre las partes del pentágono, del pentágono o estrellado (pentagrama), del decágono, del dodecaedro y del icosaedro, principalmente. Por ejemplo: se puede calcular el voliumen de un dodecaedro utilizando PHI o los pitagóricos representaban al Universo con un dodecaedro.

- Aunque parece ser que ha sido usado desde tiempos remotos, su auge y fama se la debe a la **Grecia Clásica**, especialmente a **Euclides** o **Pitágoras** y sus seguidores. Lo aplicaron a multitud de facetas (artísticas, arquitectónicas, naturales…) Una de sus aportaciones está en el **PENTÁGONO REGULAR** (en él se obtiene **Phi** al multiplicar cualquiera de sus diagonales entre uno de sus lados), y llegaron a adoptarlo como símbolo de los "**pitagóricos**". Es más, se llegó a representar con la estrella que surge de sus diagonales a la vida, y a la estrella invertida el mal.

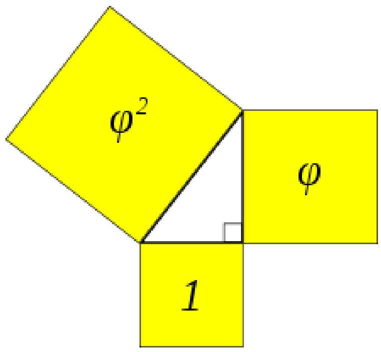
El pentágono regular es fascinante, en él se pueden encontrar multitud de reglas geométricas. Además, surgen infinitos pentágonos y estrellas de cinco puntos.


El pentagrama posee proporciones áureas (segmentos coloreados).

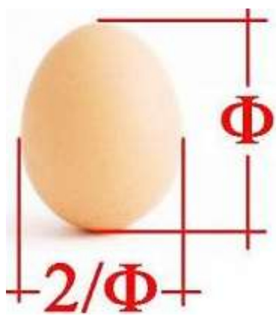


El "**Teorema de Ptolomeo**" permite calcular **PHI** (**Φ = a : b**) con un pentágono regular.


Si trazamos 3 rectángulos áureos iguales perpendiculares, sus 12 vértices coinciden totalmente con los centros de las 12 caras del dodecaedro.



En el llamado "**Triángulo de Kepler**" se cumple: "$\varphi^2 = \varphi + 1$".



Parece increíble, pero **Phi al cuadrado: Φ^2 = 2,61803398874988…** **y su inverso: $\frac{1}{\Phi}$ = 2,61803398874988…, tienen exactamente las mismas cifras decimales** (y son infinitas).

Más información en:

- https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo
- http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm
- http://www.mecd.gob.es/eslovaquia/dms/consejerias-exteriores/eslovaquia/publicaciones/material-did-ctico/numero-de-oro-recursos-didacticos.pdf

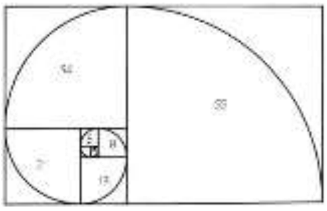
► EN LA NATURALEZA y EN GENERAL:

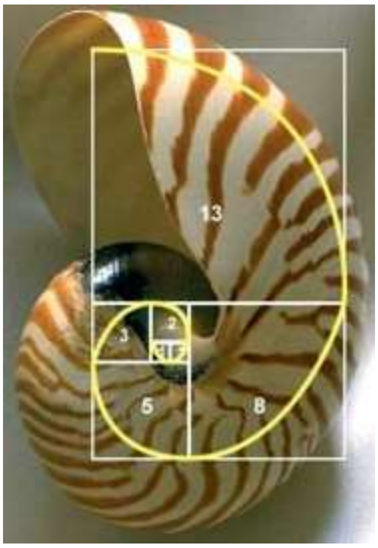
- **Phi** está presente en muchas partes del Universo y de la Naturaleza: la **disposición de los pétalos en las flores**, en algunas **hojas de los árboles**, en el **grosor de las ramas**, en el **caparazón de un caracol**, en la **distribución de las pipas en un girasol**… Por ejemplo, se dice que **la proporción entre abejas hembra y macho de una colmena** es un número muy similar a Phi.

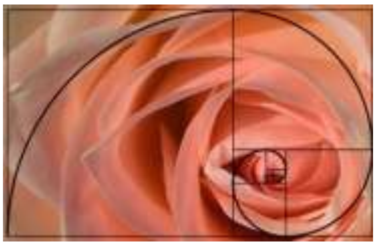
- A lo largo de la historia, los objetos (como el famoso violín "**Stradivarius**"; las **tarjetas de crédito**, nuestro **DNI** o incluso en los folios que usamos), obras de arte (como **Leonardo Da Vinci** en "L*a Gioconda*" o "*La última cena*"; **Miguel Ángel** en "*El David*" o "La Sagrada Familia"; incluso en obras de **Salvador Dalí** y otros muchísimos pintores), de arquitectura (como en las pirámides, como la **Gran Pirámide de Gizeh**, palacios de la **antigua Babilonia**, edificaciones griegas como el **Partenón**, incluso la fachada de la **Universidad de Salamanca**)y demás creados con esta proporción a lo largo de toda la historia, suelen tener gran belleza y armonía, otorgándoles incluso propiedades mágicas, espirituales y místicas. Incluso, se relaciona con Dios.

- Algunos encuentran explicaciones para todo ello, relacionadas con **la percepción de nuestro ojo**, con **la actuación consciente de la Naturaleza y el Universo** o incluso cuestiones más profundas y trascendentales.

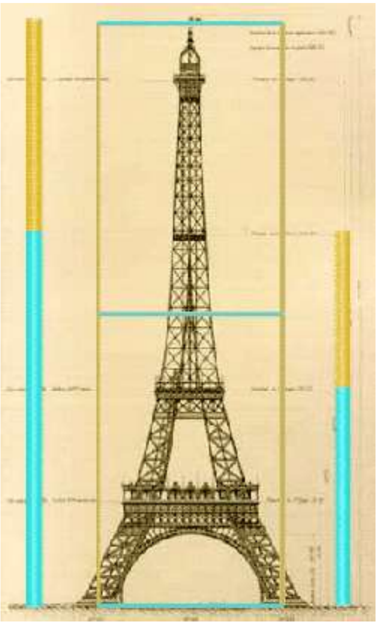
- Está muy relacionado con la **SUCESIÓN DE FIBONACCI** (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6.765, 10.946, 17.711, 28.657...). Si dividimos progresivamente los números de la serie de Fibonacci por su antecesor, vamos obteniendo un resultado cada vez más cercano al número **Phi**. Además, la **espiral de Fibonacci** (representación geométrica de esta sucesión), es una imagen muy asociada con la presencia del número Phi en la Naturaleza y el Universo.



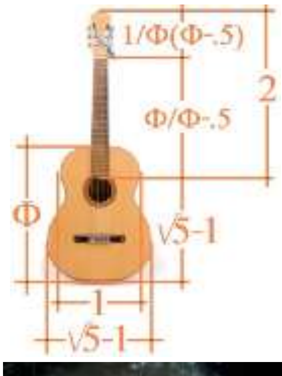


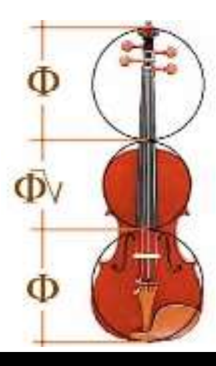


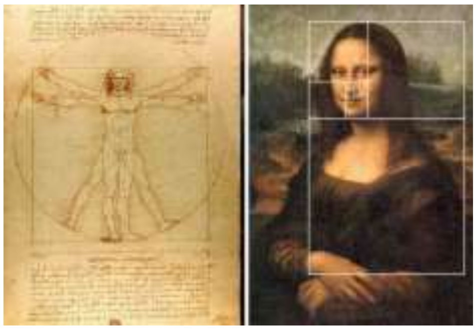
¿IMPOSIBLE? El número áureo está por todas partes: en una concha, en el crecimiento de pétalos o de hojas, en las abejas, en las galaxias, en el arte, la música…



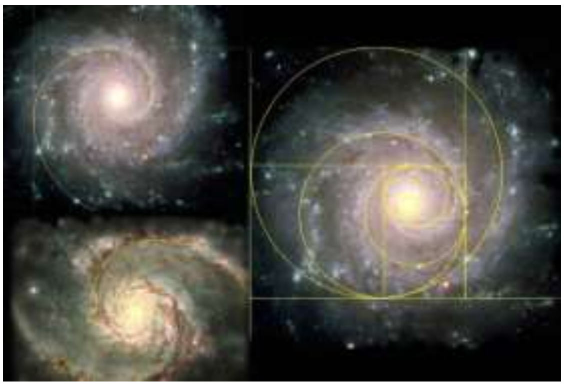
La Torre Eiffel también fue construida siguiendo proporciones áureas.







La Gioconda, de Leonardo da Vinci.



El Partenón (Atenas, Grecia)

4.E. CONCEPTOS NUMÉRICOS IMPORTANTES.

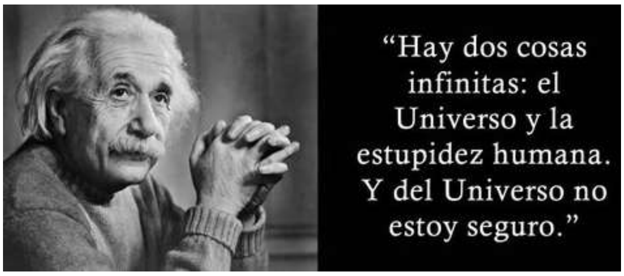
Vamos a centrarnos en dos conceptos fundamentales en matemáticas: infinito (e infinitesimal) y la “x” (la incógnita):

➢ INFINITO.

Nos estamos refiriendo a un concepto, pero no solo matemático, sino de la vida real.

Infinito significa ‘**interminable’**, ‘**’inacabable’**. Es algo que no tiene fin, o mejor dicho, que no se le puede establecer un final.

A lo mejor escuchas o lees que ‘infinito’ es algo abstracto y que solo se usa en matemáticas, en física.., pero la realidad es que estamos rodeados de ‘infinito’ por todas partes, aunque en muchas de ellas va acompañado de ‘finito’.



Veamos algunos ejemplos:

- Pueden existir infinitas personas en el mundo, aunque digas o pienses una cifra muy alta, siempre podría existir alguna más; sin embargo, se supone que la existencia del planeta Tierra tiene límite con lo cual, aunque puedan existir infinitas personas, alguna vez, se acabará, por lo que también esa cifra se supone que tendrá fin (finita), aunque indeterminada.

- El tiempo es infinito, aunque nos cuesta imaginar que no haya tenido un principio. De todas formas, para la ciencia de hoy día, el tiempo no existe, es solo una forma de proyectar nuestra percepción.

- **El Universo es infinito, aunque también es finito**. Difícil entenderlo, ¿verdad? Mira, es infinito porque no tiene fin, cada vez se va haciendo mayor, y seguirá manifestándose y creciendo cada vez. Aunque se supone que podría establecérsele un final, iría cambiando y siendo más grande. Además, hoy día se acepta que deben existir multiversos e infinitas realidades.

- Es tan simple como imaginarnos en una pista de atletismo. Se supone que es finita (las oficiales miden 400 m). Pues bien, si empezásemos a correr, ¡jamás llegaríamos al final! Daríamos vueltas eternamente sin que la pista se acabase.

- Un simple partido de baloncesto, fútbol…, puede transcurrir de infinitas formas distintas.

LA REALIDAD ES INFINITA, SOLO SUCEDE UNA COSA DE LAS INFINITAS POSIBILIDADES QUE HAY.

Aunque podríamos poner muchos más ejemplos, vamos a centrarnos en las **matemáticas**:

- Hay infinitos números, pero también hay infinitos números racionales, fraccionarios, enteros, naturales, números pares, números primos… No solo eso, hay infinitos operaciones, infinitos polígonos, cuerpos geométricos…

- No solo eso, entre el ‘1’ y el ‘2’, por ejemplo, hay infinitos números decimales. Pero podemos seguir estrechando el cerco: entre el ‘1,4’ y el ‘1,5’ hay infinitos números decimales. Pero entre el ‘1.4678’ y el ‘1,4679’ sigue habiendo infinitos decimales.

- Un número se puede representar de infinitas formas: con infinitas sumas, con infinitas restas, con infinitas multiplicaciones, con infinitas divisiones, con infinitas fracciones… Por ejemplo, el número ‘9’, lo puedo representar con cálculos infinitos (usando números enteros, decimales…): ‘8+1’, ‘6,0285 + 2,9715’, ‘0,0000001 + 8,9999999’, etc.

Todo esto nos lleva a una conclusión un poco loca: DENTRO DE INFINITO HAY INFINITOS GRUPOS DE INFINITAS POSIBILIDADES, ya que como hemos visto antes, hay infinitos números e infinitas formas de representar a cada uno de ellos, y además, cada número se puede referir a infinitas cosas.

En **GEOMETRÍA** podemos apreciar claramente el concepto de infinito:

- Una línea recta no tiene principio ni final y una semirrecta tiene principio pero no final; sin embargo, ambas son infinitas.

- La medida máxima de un “ángulo simple” es de 360º, a pesar de ella hay infinitas posibilidades de medida de un ángulo.

- Hay infinitos tipos de polígonos, y dentro de cada clase, hay infinitos tipos: de triángulos, cuadriláteros, pentágonos…

- Igualmente pasa con los cuerpos geométricos, son infinitos grupos e infinitos tipos en cada grupo.

PERO, ¿PODEMOS MEDIR O COMPARAR INFINITO?

La respuesta es NO, ya que INFINITO ES UN CONCEPTO, NO UNA CANTIDAD.

Veámoslo de forma práctica: si te preguntasen “¿Dónde hay más números, de cualquier tipo, entre el ‘1’ y el ‘2’ o entre el ‘1’ y el ‘100’?, ¿qué contestarías? Seguramente que entre el ‘1’ y el ‘100’. La respuesta es que no se puede comparar, ya que entre ambos rangos hay infinitos números, ni puede haber más, ni igual, ni menos, ya que hay infinitos números.

Sin embargo, **SÍ PODEMOS REALIZAR OPERACIONES CON INFINITO**, ya que representan un concepto o idea numérica y, dado que las matemáticas se utilizan para explicar la realidad y la idea de ‘infinito’ está presente en todos los sitios, seguramente nos encontraremos muchas situaciones en las que necesitamos utilizar este concepto para calcular situaciones reales.

RESUMEN DE OPERACIONES CON ‘INFINITO’.

Si añades un número a infinito o lo quitas, sigues teniendo infinitos números. Si lo multiplicas o divides, sigues teniendo infinitos números.

También podemos establecer el concepto de $-\infty$ (básicamente serían infinitos números negativos).

Además, **cualquier número está entre ‘infinito’ y ‘menos infinito’**.

∞ + número = ∞	número + ∞ = ∞	$\infty + \infty = \infty$
$-\infty$ + número = $-\infty$	número + $(-\infty)$ = $-\infty$	$-\infty + \infty$ = **ind.**
∞ - número = ∞	número - ∞ = ∞	$\infty - \infty$ = **ind.**
$-\infty$ - número = $-\infty$	número - $(-\infty)$ = $-\infty$	$-\infty - \infty = \infty$
∞ x número positivo = ∞	número positivo x ∞ = ∞	∞ x $\infty = \infty$
∞ x número negativo = $-\infty$	número negativo x ∞ = $-\infty$	$-\infty$ x $-\infty = \infty$
$-\infty$ x número positivo = $-\infty$	número positivo x $-\infty$ = $-\infty$	$-\infty$ x $\infty = -\infty$
$-\infty$ x número negativo = ∞	número negativo x $-\infty$ = ∞	∞ x $-\infty = -\infty$
∞ : número positivo = ∞	número positivo : ∞ = **ind.**	$\infty : \infty$ = **ind.**
∞ : número negativo = $-\infty$	número positivo : $-\infty$ = **ind.**	$-\infty : \infty$ = **ind.**
$-\infty$: número positivo = $-\infty$	número negativo : ∞ = **ind.**	$\infty : -\infty$ = **ind.**
$-\infty$: número negativo = ∞	número negativo : $-\infty$ = **ind.**	$-\infty : -\infty$ = **ind.**

$\pm\infty$ x 0 = **ind.**

$\pm\infty : 0 = \infty$

número : 0 = ∞

$0 : \pm\infty = 0$

0 : número = 0

0 : 0 = ind.

$\pm\infty$ x 0 = **ind.**

$\pm\infty : \pm\infty$ = **ind.**

número^0 = 1 ; 0^0 = **ind.**

0^n (nº mayor que 1) = ∞

0^n (nº entre 0 y 1) = 0

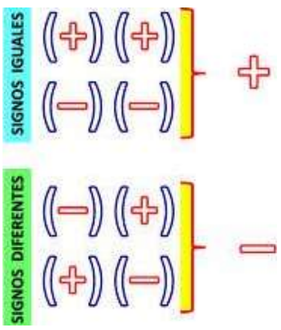
$\pm\infty^0$ = **ind. ;** $0^{\pm\infty} = 0$

$\infty^\infty = \infty$ (habría que distinguir entre $\pm\infty$)

$1^{\pm\infty}$ = **ind.**

“Ind.”: significa indeterminado, que no hay solución.

En todas las operaciones de suma y multiplicación se puede aplicar la PROPIEDAD CONMUTATIVA.

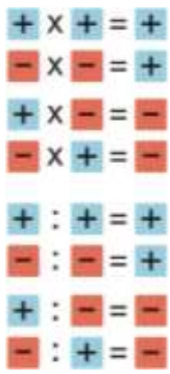


“REGLA DE LOS SIGNOS”

Aunque veas muchas situaciones de operaciones, en realidad basta con aplicar la lógica de que cuando realizamos cálculos con el concepto de infinito, nos estamos refiriendo a todos los números posibles y a cualquier tipo de número posible: natural, entero, decimal, fraccionario…, incluso positivo y negativo, independientemente de que lleve el signo ‘-‘ o no.

Una sencilla regla que simplificaría el número de ejemplos de operaciones es la “REGLA DE LOS SIGNOS”.

Otra propiedad matemática a tener en cuenta es que “un número cualquiera elevado a un número cualquiera negativo, es igual a ‘uno’ partido por dicho número elevado a esa potencia pero positiva. $a^{-n} = 1/a^n$



Puedes consultar más información sobre “operaciones con infinito” en las siguientes direcciones web:

- http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/infinito.html
- http://www.vitutor.com/fun/3/a_6.html

OTROS CONCEPTOS RELACIONADOS CON 'INFINITO'.

INFINITESIMAL

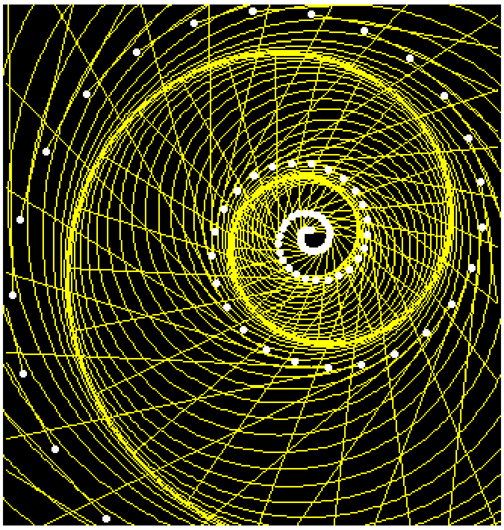
'Infinitesimal' hace referencia a una **cantidad infinitamente pequeña**. Estaría relacionado con el concepto de '**números hiperreales**" (ver ampliación), lógicamente con 'infinito' e incluso con los **fractales**.

Creemos que infinito es interminablemente grande, pero también puede ser interminablemente pequeño: INFINITESIMAL.

Imaginemos ciertas situaciones:

- Divido un cuadrado sucesivamente en otros cuatro cuadrados iguales hasta el infinito. Sería una serie fractal, y los cuadrados obtenidos serían 'infinitamente pequeños', o sea, su tamaño sería 'infinitesimal'.
- Imagina dividir un número cualquiera entre un número sucesivamente mayor. Cuanto mayor se va haciendo el divisor, menor va siendo el resultado. Si el divisor fuese 'infinito', el resultado sería 'infinitesimal', o sea, 'infinitamente pequeño', pero nunca llegaría a ser '0', aunque se acercaría 'infinitamente' a '0'.

Esta situación se aplica en los "**LÍMITES**" (ver más abajo).



La espiral será cada vez más pequeña. Como sigue hasta el infinito, será 'infinitesimalmente' pequeña.

- La **física cuántica** es una ciencia que estudia la composición básica de la materia y del Universo. Por ello, se estudia en el estudio de moléculas, átomos y las partículas subatómicas que los componen. Intentar dividir la materia cada vez en partes más pequeñas para estudiar de qué está formado todo y sus propiedades. En cierta forma intenta aproximarse a lo 'infinitesimal' de la materia, la energía y el Universo.

Las conclusiones de la física cuántica son increíbles para nuestro paradigma de pensamiento, ya que descubren propiedades que podríamos considerar 'mágicas' de la materia, y más aún, descubren que la materia en sí no existe, ni siquiera la energía, que todo el Universo se reduce a información y vibración de esa información, y que se manifiesta según una consciencia universal que lo inunda todo y nosotros percibimos todo según nuestra proyección.

Parece complicado, pero esta es la realidad, y no la que creemos que es, basta con cambiar nuestra forma errónea de ver el mundo, buscar dentro de nosotros mismos y dejar que nuestro verdadero ser se muestre.

LÍMITES.

Es un concepto matemático muy útil para describir situaciones generales.

Vamos a verlo con un ejemplo sencillo: "Dividimos '1' entre un número cada vez más grande, que se acercará a infinito". El resultado será cada vez menor, acercándose a '0'. Cuanto mayor es el divisor, más pequeño será el resultado, pero nunca será '0'. Se expresa así:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

En realidad sería lo mismo que decir: $\frac{1}{\infty}$ **= "casi cero".**

'x' tiende a 'infinito'. ¿Lo pillas?

Pero claro, esta no es una forma matemática de expresar esta situación, por ello se inventó la fórmula de arriba.

Te lo explicamos de otra forma:

El **límite** de 1/x cuando x tiende a infinito es **0.** (Recuerda, 'tiende' significa que 'se va acercando, aproximando').

Esta aplicación se utiliza mucho en operaciones matemáticas complejas, cálculos avanzados, fórmulas matemáticas…, como por ejemplo, las funciones, las derivadas, cálculo diferencial, exponenciales, integrales, topología, conjuntos…

Te dejamos algunos enlaces por si quieres ver otras formas de explicarlo:

- http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-infinito.html

JUGANDO A ENCONTRAR 'INFINITO': GÚGOL Y GOOGLE.

Te vamos a contar una curiosa y bonita historia: "En 1938, **Milton Sirotta**, un niño de 9 años, estaba con su tío **Edward Kasner**, un buen matemático estadounidense. Jugando con él y explicándole el concepto de infinito, animó a su sobrino a escribir el número más grande que fuese capaz. De hecho le había prometido que el número que inventase se haría famoso, y vaya si lo fue. El niño, estableció un '1' seguido de '100 ceros' como el número más grande, y le puso de nombre '**GÚGOL'** (**googol** en inglés). Su tío lo recogió cuando publicó su libro "**Las matemáticas y la imaginación**", en el que intentaba explicar de forma amena la diferencia entre 'infinito' y 'un número muy grande' y, efectivamente, se hizo muy famoso".

Milton Sirotta, de adulto.

Hasta aquí, no es más que una entrañable historia, pero la cosa no acaba aquí:

"Este número se hizo muy famoso, especialmente en Estados Unidos. Incluso el famoso escritor dijo una frase muy recordada sobre él: 'Tendremos que padecer eternamente un número inventado por un bebé'. Y por si fuera poco, se crearon nuevos números enormes a partir de él. Y la colma que colmó el vaso fue cuando en 1998, **Sergey Brin** y **Larry Page**, dos jóvenes que se habían conocido en la Universidad de Stanford tres años antes, crearon un novedoso y eficiente motor de búsqueda para internet (inicialmente lo llamaron '**BackRub**'), y decidieron buscarle un nombre. Tras varias opciones, decidieron utilizar a '**Gúgol'** ('**Googol'** en inglés), pero un error de transcripción, o al menos, eso se cuenta, les hizo utilizar el nombre de **GOOGLE**". Curiosa historia, ¿verdad?

Edward Kasner.

¿Sabés de dónde viene el nombre de Google?

¿SABES POR QUÉ 'GOOGLE' TIENE ESOS COLORES? Porque el primer ordenador en el que utilizaron su buscador estaba construido con piezas de 'Lego' azules, rojos, amarillas y verdes.

1 gúgol = 10^{100} =

10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

Gugol

¿Sabías que… los únicos factores primos que tiene 'Gúgol' son el '2' y el '5'? Repetidos cien veces cada uno.

En el sistema binario, se escribiría con ¡333 bits!

Un gúgol es mayor que el **número estimado de átomos existentes en el Universo**, que se estima que está entre 10^{78} y 10^{82}.

Si tuviéramos que nombrarlo, se llamaría algo así: "**Diez mil diecisillones**".

Las calculadoras no son capaces de abarcar este número, solo los potentes ordenadores.

GÚGOLPLEX

Kasner fue más allá y creó el 'GÚGOLPLEX'. Este número sí que es grande e imposible de escribirlo porque, sencillamente, no hay materia suficiente en el Universo para crear papel y tinta para escribirlo. Aun así, no es infinito.

Se trata de '10 elevado a un Gúgol', o sea, '10 elevado a diez mil diecisillones", o un '1' seguido de gúgol 'ceros'.

$$10^{10^{100}}$$

GÚGOLDUPLEX

Este número es aún más grande. Se trata de **'10 elevado a un Gúgolplex'**, o sea, un '1' seguido de Gúgolplex 'ceros'.

$$10^{10^{10^{1000}}}$$

GÚGOLTRIPLEX

Este es el número con nombre propio más grande conocido (salvo excepciones específicas matemáticas). Se trata de **'10 elevado a un Gúgolduplex'**, o sea, un '1' seguido de Gúgolduplex 'ceros'.

También se le conoce como '**GÚGOLTOTÓ'**.

‘x’, la incógnita preferida de las matemáticas.

Las matemáticas intentan ayudarnos a resolver las situaciones de nuestra vida diaria. Para ello, desde la antigüedad, se utilizan símbolos para representar las incógnitas que queremos resolver en matemáticas. Su origen es diverso y existen teorías varias, pero podemos decir que desde las culturas más antiguas utilizaban signos para indicar dichas incógnitas, y de ellos fue derivando el símbolo ‘x’.

CURIOSIDADES Y USOS:

- Su origen no está claro. Ya en la Grecia clásica, Diofanto, en el siglo III, una forma de uso de la incógnita, aunque distinta a la actual. En el siglo XVI, François Viète (1540 – 1603) fue el primero en emplear letras para simbolizar incógnitas. Pero el término ‘incógnita’ como tal no aparece hasta el siglo XVII, acuñado por Fermat. Aun así, hay muchísimas referencias anteriores al uso de ciertos símbolos para representar valores no conocidos.

- En matemáticas se utilizan las letras constantemente, pero la ‘x’ es la letra elegida para expresar incógnitas en ecuaciones, polinomios, fórmulas… Otra muy usada para incógnitas es la ‘y’. En ocasiones se pueden usar la ‘z’…

- No hay que confundir el uso de la ‘x’ para las incógnitas, con el uso de letras como la ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘n’… para representar números en expresiones matemáticas. En este caso representan a cualquier número que se puede aplicar a dicha expresión y no una incógnita (que sería un número concreto que se quiere calcular).

- En cálculo básico se utiliza la ‘x’ como símbolo de la multiplicación. Por ello, en matemáticas se usan preferentemente otros signos para la multiplicación o el producto de números: ‘*’, ‘·’, o si son dos letras o paréntesis basta con escribirlos uno al lado del otro. Por ejemplo: ‘xy’ significa ‘x·y’.

- La ‘x’ también es usada en las coordenadas de ejes cartesianos, en gráficos, en funciones ‘f(x)’, vectores, …

Veamos algunos ejemplos sencillos:

POLINOMIOS:

Tengo un número que está multiplicado por sí mismo, y al que le restamos dos veces él mismo y le sumamos ‘3’. ¿Cuál es el resultado?

Conoce más sobre los polinomios:

- http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/polinomios.html
- https://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio

Con los polinomios podemos averiguarlo. Si llamamos al número desconocido ‘x’, tendríamos:

$$P(x) = x^2 - 2x + 3$$

Para ‘x’ = 1 obtengo 2.

Para ‘x’ = 2 obtengo 3.

Para ‘x’ = 4 obtengo 11. Y así sucesivamente.

Este polinomio da lugar a una función y una gráfica.

Las ecuaciones y los polinomios son diferentes, aunque se parezcan.

ECUACIONES:

¿Cuál es el número que multiplicado por sí mismo y al que se le resta dos veces él mismo da ‘3’?

Conoce más sobre los polinomios:

- **http://www.vadenumeros.es/tercero/ecuaciones-de-primer-grado.htm**
- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n

Con los polinomios podemos averiguarlo. Si llamamos al número desconocido ‘x’, tendríamos:

$$x^2 - 2x = 3.$$

Ahora solo tenemos un resultado: x = 3.

* Las ecuaciones siguen unas reglas para calcular ‘x’.

$$\lim_{x->a} f(x) = l$$

Podríamos sustituir las manzanas por ‘x’, los plátanos por ‘y’, y los cocos por ‘z’ y averiguar cuánto vale cada uno.

4.F. SUCESIONES, SERIES, RELACIONES GEOMÉTRICAS…

Hay muchas series, sucesiones, relaciones geométricas-numéricas…, nosotros vamos a reseñar las más interesantes:

➢ SUCESIÓN DE FIBONACCI.

La sucesión de Fibonacci (no es una serie), consiste en una sucesión de números naturales en la que cada término es la suma de los dos números anteriores, empezando en el '0-1'. Te mostramos los primeros términos y cómo surgen:

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	…
Inicio		1+0	1+1	1+2	2+3	3+5	5+8	8+13	13+21	21+34	34+55	55+89	89+144	144+233	233+377	377+610	610+987	987+1597	…

La sucesión sería así: **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, …** **(El primer término se considera el '1').**

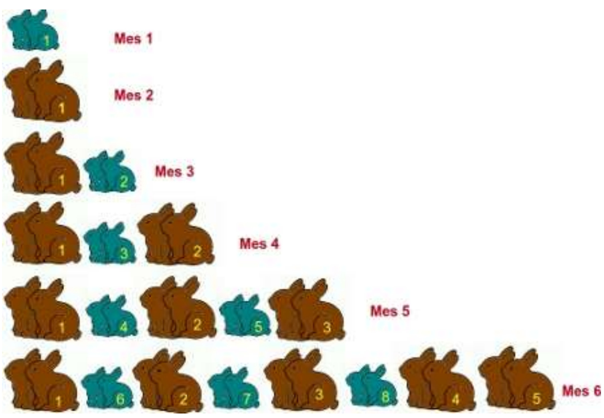
Leonardo de Pisa ("Fibonacci")

Esta sucesión fue popularizada por **Leonardo de Pisa** (1170-1240), más conocido como **Fibonacci** (en el italiano de aquella época significaba "**hijo de Bonaccio**"), en el siglo XII.

Fibonacci era un matemático importante, pero es recordado por desarrollar esta sucesión, aunque él no fue su creador, ya que tiene orígenes, al parecer hindúes y árabes, pero Fibonacci había viajado, junto a su preceptor, **Al-Khwarizmi**, al norte de África, donde conoció la existencia de esta sucesión, que él haría famosa en su obra "**Liber abaci**". Aunque no fue su creador, si hay que reconocerle que fue su gran impulsor y quien supo ver en ella situaciones asombrosas.

Es normal que esta sucesión ya existiese, pues es bastante simple y fácil de calcular.

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y LA CRÍA DE CONEJOS.



Uno de los ejemplos más conocidos de uso de la Sucesión de Fibonacci lo introdujo el propio Fibonacci para dar solución a una situación sobre la **cría de conejos**. Es la siguiente:

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial, teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir".

MES	Explicación	Nº de parejas	Nº de Fibonacci
0	No tenemos conejos. Vamos a partir de una nueva pareja de conejos recién nacidos.	0	0
1	Tenemos la pareja inicial (llamémosle 'A'), y necesitan un mes para ser fértiles.	1	1
2	La pareja inicial 'A' ya es fértil. Se aparean y la hembra queda embarazada.	1	1
3	La pareja inicial (A) da a luz a una nueva pareja que llamaremos 'B'. La pareja inicial puede volver a quedarse embarazada, pero la 'B' tiene que esperar un mes para ser fértil.	2	2
4	La hembra 'A' vuelve a dar a luz a una pareja (la llamaremos 'C'). La pareja 'B' ya es fértil. Tanto las parejas 'A' como 'B' se aparean y se quedan embarazadas (entre ellas o las parejas iniciales, da lo mismo).	3	3
5	Las parejas 'A' y 'B' dan a luz a dos nuevas parejas (las llamaremos 'D' y 'E'). La pareja 'C' ya es fértil. Se cruzan de nuevo las parejas 'A', 'B' y 'C'.	5	5
6	Dan a luz las parejas 'A', 'B' y 'C' a tres nuevas parejas (las llamaremos 'F', 'G' y 'H'). Las parejas 'D' y 'E' cumplen un mes y se pueden aparear. Se cruzan las parejas 'A'. 'B', 'C', 'D' y 'E'.	8	8
7	Las parejas 'A', 'B', 'C', 'D' y 'E' dan a luz a cinco nuevas parejas ('I', 'J', 'K', 'L' y 'M'). 'F', 'G' y 'H' cumplen un mes. Se cruzan 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F', 'G' y 'H'.	13	13

Nota: Supondremos que siempre las parejas dan a luz a una hembra y macho sanos, justamente en los plazos establecidos.

FÓRMULA GENERADORA.

Aunque crear la sucesión de Fibonacci es muy sencillo, también existe una fórmula con la que podemos calcular cualquier número de esta sucesión sabiendo el lugar de la sucesión que ocuparía.

Podemos tener varias formas de su ‘fórmula’. Nosotros mostramos las dos principales opciones:

OPCIÓN ‘A’

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Pero con unas consideraciones:

- ‘**n**’ indica el número de Fibonacci en dicha posición (por ejemplo, ‘n=5’, calcularía qué número va en la posición ‘5’).
- ‘x_{n-1}’ y ‘x_{n-2}’ indican los términos anteriores de la sucesión (habría que saberlos).

Ejemplo:

Para ‘n=8’ sería: $x_8 = x_7 + x_6 = 13 + 8 = 21$. → $x_8 = 21$.

OPCIÓN ‘B’

Fibonacci

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

condiciones iniciales $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

para n=1 $a_3 = a_{1+2} = a_1 + a_{1+1} = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

para n=2 $a_4 = a_{2+2} = a_2 + a_{2+1} = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$

para n=3 $a_5 = a_{3+2} = a_3 + a_{3+1} = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$

para n=4 $a_6 = a_{4+2} = a_4 + a_{4+1} = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$

ESPIRAL DE FIBONACCI Y SU RELACIÓN CON LA RAZÓN ÁUREA (Número áureo).

Pero la sucesión de Fibonacci es algo más que una sencilla sucesión de números, esta sucesión está presente en ‘Phi’ (ϕ), la razón áurea (o ‘número de oro’).

Si dividimos cualquier número de la Sucesión de Fibonacci entre el anterior, da un número cercano a ‘Phi’, de tal manera que cuanto mayor son dichos números, más se acerca a ‘Phi’. Por tanto, cuando el cociente entre un número de la Sucesión de Fibonacci y el anterior tiende a infinito, el resultado tiende a ‘Phi’.

Veámoslo con un ejemplo:

Nº de Fibonacci	**3**	**5**	**8**	**13**	**…**	**233**	**377**	**…**	**“n” → ∞**
Número anterior	**2**	**3**	**5**	**8**	**…**	**144**	**233**	**…**	**“n-1”**
División (razón)	**3/2**	**5/3**	**8/5**	**13/8**	**…**	**233/144**	**377/233**	**…**	**n/n-1**
Resultado	**1,5**	**1,66666666…**	**1,6**	**1,625**	**…**	**1,6108055556…**	**1,618025751…**	**…**	**1,61803398874988…**

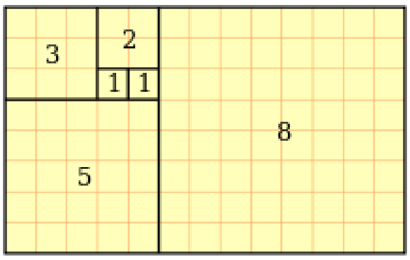
Pero la cosa es aún más curiosa, ya que a partir del número áureo se pueden calcular los números de Fibonacci. Basta con aplicar la siguiente fórmula:

$$x_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

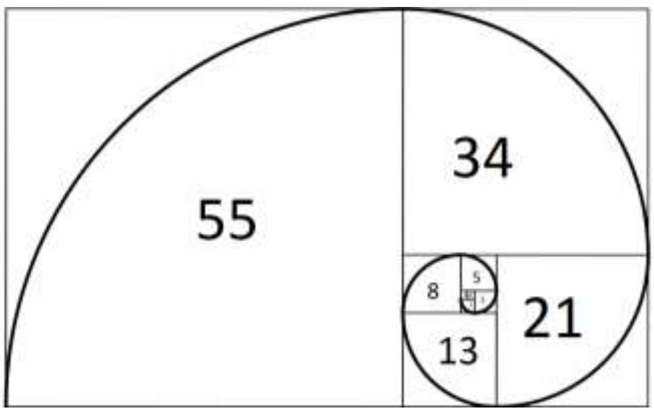
Comprobémoslo con un ejemplo (para n=6):

$$x_6 = \frac{(1.618034...)^6 - (-0.618034...)^6}{\sqrt{5}} = 8$$

ESPIRAL DE FIBONACCI.



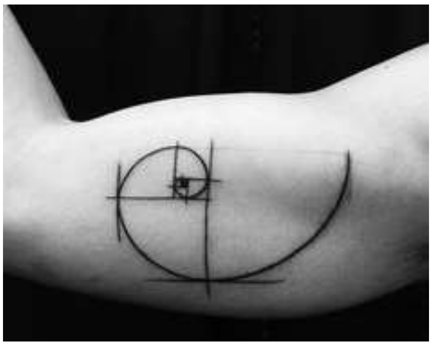
Si construimos cuadrados adosados uno al otro (al lado, arriba, al lado, abajo…), de lado cada número de Fibonacci: lados 1x1, lado 1x1, lado 2x2, lado 3x3, lado 5x5, lado 8x8…, y luego unimos con una espiral sus vértices generadores, obtenemos la “Espiral de Fibonacci”.



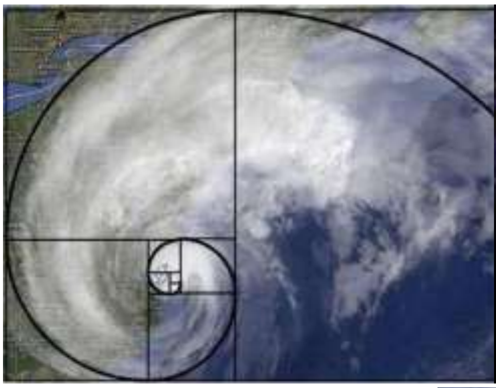
La “espiral de Fibonacci” es igual que la “Espiral áurea o dorada”. Está presente en la naturaleza y en todo el Universo.

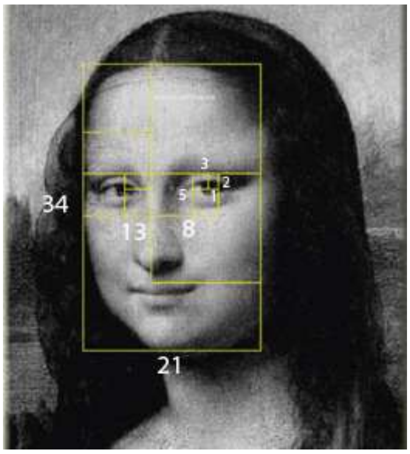
LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN LA NATURALEZA.

Al igual que 'Phi' y su 'Espiral Dorada o áurea", la Espiral de Fibonacci está presente en todos los sitios.



La espiral de Fibonacci, inspiración para tatuajes diversos.





➢ NÚMEROS GEOMÉTRICOS.

El concepto de número geométrico es muy genérico. Podemos entender como número geométricos varios conceptos:

► **NÚMEROS POLIGONALES**. Según este criterio tendríamos: números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales…

► **NÚMEROS RELACIONADOS CON LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS ("POLIÉDRICOS")**. Según este criterio tendríamos:

- **Números tetraédricos**. Estarían relacionados con los tetraedros regulares (sólido platónico), o pirámides triangulares regulares.
- **Número piramidal cuadrado**. Estaría relacionado con las pirámides cuadradas.
- **Número cúbicos**. Estaría relacionado con los cubos o hexaedros regulares (sólido platónico).

► **Números en progresión geométrica**. Son números que cumplen que sus cifras, leídas de izquierda a derecha, están en progresión geométrica. Esto lo cumplen los siguientes números:

- De 2 cifras: muchísimos números de dos cifras podrían ser considerados geométricos pues siguen fáciles progresiones geométricas. Por ejemplo, el 26 sería geométrico, pues "2x3=6". Por ello, se suelen considerar números en progresión geométrica a partir de las 3 cifras.
- De 3 cifras: 124 y 421 (progresión 'x2' o ':2'); 139 y 931 (progresión 'x3' o ':3'); 248 y 842.
- De 4 cifras: 1248 y 8421 (progresión 'x2' o ':2').

► **Progresión geométrica**. Son sucesiones numéricas en las que cada número se obtiene multiplicando el anterior por la razón geométrica o factor de la progresión.

Por ejemplo: progresión de razón '5': 1, 5, 25, 125, 625, 3125, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por '5'. En este caso hemos empezado en el '1', pero podríamos empezar en cualquier número, eso sí, habría que indicarlo.

Podemos calcular cualquier número de la progresión utilizando una sencilla fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Donde '**a**' representa a los números de la progresión; '**n**' sería un número natural que indicaría el orden en la progresión; y '**r**' sería la razón geométrica de la progresión. Además, necesitamos saber 'n_1', o sea, en qué número comienza la progresión.

Asimismo, podemos calcular la razón de la progresión aplicando la siguiente fórmula: $r = \frac{an}{an-1}$.

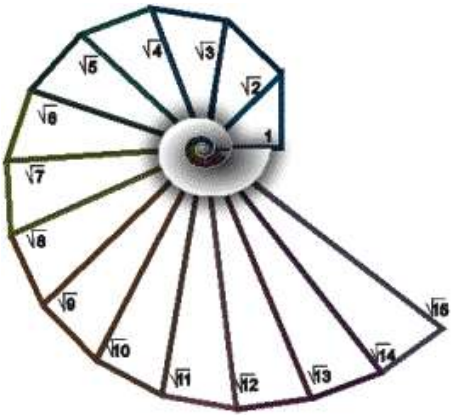
Las progresiones geométricas pueden tener muchas variantes: empezar en '1' o en otro número; tener una razón positiva o negativa, entera o decimal; ser creciente o decreciente; ser lineal o ir alternando la razón geométrica…

► **Números geométricos pitagóricos: TERNAS PITAGÓRICAS**. Son aquellos números naturales que cumplen con el Teorema de Pitágoras (las veremos más adelante).

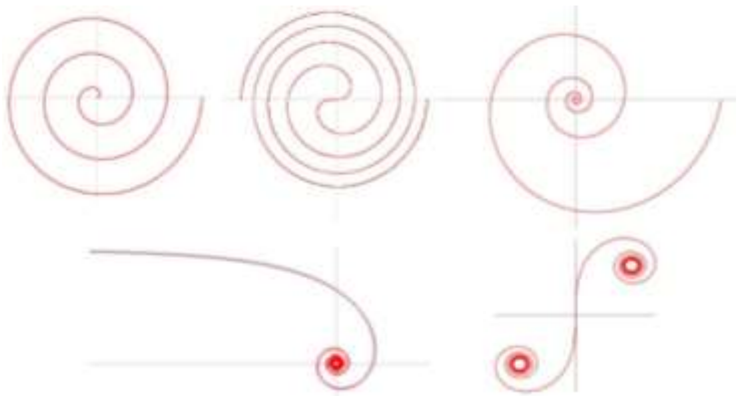
► **Espirales geométricas**. Son secuencias de números que dan lugar a formas en espiral. No las vamos a tratar aquí, pero te dejamos los enlaces a algunos de sus tipos:

- **Espirales de los números geométricos**: http://acordesarquitectonicos.com/espirales-de-los-numeros-geometricos-1/
- **Espiral de Arquímedes**: https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Arqu%C3%ADmedes

Recordamos que la **Sucesión de Fibonacci y el número Phi** dan lugar a otra espiral que ya hemos visto.



Como puedes ver, hay multitud de razones geométricas que dan lugar a muchos tipos de espirales y otras curvas, y viceversa, a partir de una espiral o curva geométrica, se puede establecer una razón numérica geométrica que la describa.



Vamos a realizar un pequeño esquema sobre los **NÚMEROS GEOMÉTRICOS** más importantes:

			Concepto	Lista de números
NÚMEROS GEOMÉ-TRICOS	NÚMEROS POLIGONALES	NÚMEROS TRIANGULARES	Se pueden colocar formando triángulos equiláteros. Se calculan multiplicando dos números naturales consecutivos y dividiéndolos entre '2'.	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, …
		NÚMEROS CUADRADOS	Se pueden colocar formando cuadrados. Se calculan elevando al cuadrado un número entero.	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, …
		NÚMEROS (RECTANGULARES) OBLONGOS	No es poligonal completo. Se calculan multiplicando entre sí números naturales consecutivos.	0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, …
		NÚMEROS PENTAGONALES	Se pueden colocar formando pentágonos regulares.	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, …
		Resto de números poligonales.	Se pueden colocar formando pentágonos regulares de cualquier número de lados: hexagonales, heptagonales…	
	NÚMEROS "POLIÉDRICOS"	NÚMEROS PIRAMIDALES CUADRADOS.	Se pueden colocar formando pirámides cuadradas regulares. Se pueden calcular sumando números cuadrados consecutivos.	1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, …
		NÚMEROS TETRAÉDRICOS.	Se pueden colocar formando tetraedros regulares. Se pueden calcular sumando números triangulares consecutivos.	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, …
		NÚMEROS CÚBICOS.	Se pueden colocar formando cubos (hexaedros regulares). Se calculan elevando al cubo los números naturales.	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, …
Sucesiones de números con otro tipo de relaciones geométricas	TERNAS PITAGÓRICAS		Son ternas de tres números que cumplen la siguiente igualdad: $a^2 + b^2 = c^2$. Esta fórmula está basada en el Teorema de Pitágoras.	(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41),
	Números en progresión geométrica.		Son números que cumplen que sus cifras, leídas de izquierda a derecha, están en progresión geométrica.	26, 39, 48, 124 y 421, 139 y 931, 1245 y 8421
	Progresiones geométricas		Cada número de la sucesión se obtiene multiplicando el anterior por una razón geométrica.	Ejemplo: 'progresión de razón 5': 1, 5, 25, 125, 625, 3125…
	Espirales geométricas.		Son secuencias de números que originan formas en espiral.	Algunos ejemplos son: Espiral de Fibonacci (o áurea), espirales de los números geométricos…

OTROS TIPOS DE NÚMEROS (relacionados con geometría)

- TRIÁNGULO DE PASCAL (y otros: triángulo de Floyd, triángulo armónico de Leibniz, triángulo de Sierpinski…)

NÚMEROS POLIGONALES.

Los números poligonales son aquellos números natural que pueden colocarse, ordenadamente, en forma de polígono regular.

Esta propiedad de los números ha sido estudiado desde la antigüedad, destacando Pitágoras y sus continuadores, los llamados ‘Pitagóricos’.

Según esta definición, existen el mismo número de tipos de números poligonales que el mismo número de polígonos: números triangulares (equiláteros), cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales…

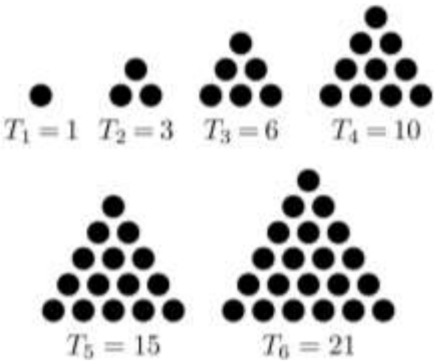
CÓMO CONSTRUIR LOS NÚMEROS POLIGONALES.

Para calcularlos existen fórmulas matemáticas (con varias variantes) o reglas aritméticas, ya que forman una sucesión perfectamente ordenada (ver cuadro resumen de la página siguiente).

Representarlos gráficamente en forma de polígono es muy fácil. Basta con añadir una fila más a todos los lados anteriores menos a dos ellos. Por ejemplo, si tengo un número pentagonal de orden ‘2’ (‘n=2’), tendrá 2 puntos en cada uno de sus lados. Para crear el pentagonal de ‘orden 3’, basta con añadir un punto más a cada lado y completar. Dos lados no necesitarán que les añada nada. El polígono resultante siempre será regular.

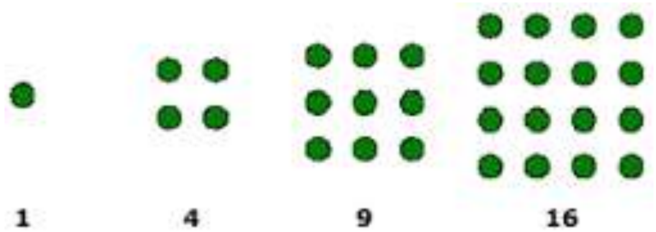
Vamos a ver cómo se representan gráficamente los casos más utilizados.

NÚMEROS TRIANGULARES.



Fíjate bien, para construir un nuevo número triangular, solo tienes que ir añadiendo filas al triángulo equilátero anterior.

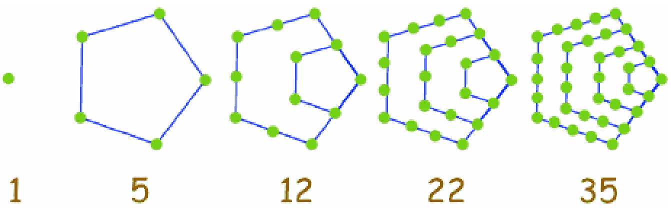
NÚMEROS CUADRADOS.



Para representar gráficamente números cuadrados, solo tienes que hacer un cuadrado de “n·n” lados.

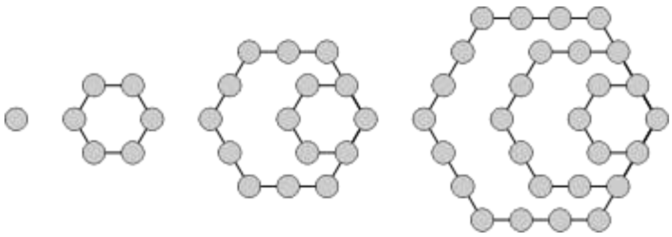
Son muy fáciles de calcular: elevando al cuadrado los números naturales, principalmente.

NÚMEROS PENTAGONALES.



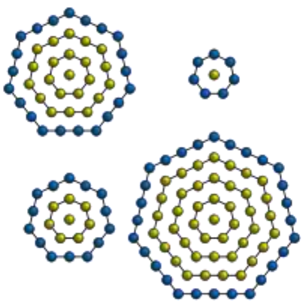
Para representarlos gráficamente hay que ir creando pentágonos regulares alrededor del anterior. Fíjate cómo coinciden sus vértices con algunos de los puntos laterales.

NÚMEROS HEXAGONALES.



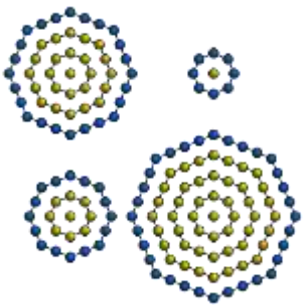
Al igual que en el pentágono, hay que ir creando hexágonos regulares alrededor del inicial.

NÚMEROS HEPTAGONALES.



Fíjate cómo se van creando heptágonos regulares en torno a los anteriores.

NÚMEROS OCTOGONALES.



Fíjate cómo se van creando octógonos regulares en torno a los anteriores.

CUADRO RESUMEN DE LOS NÚMEROS POLIGONALES.

Recuerda, que para que sean números poligonales, tienen que poder ordenarse formando POLÍGONOS REGULARES.

Número poligonal	Fórmula	Para n=1	Para n=2	Para n=3	Para n=4	Para n=5	Para n=6	Más ejemplos	**SUCESIÓN:** añade el sumando "x" al intervalo de la sucesión
TRIANGULAR (3 lados)	$\frac{1}{2}n(1n + 1)$	(+1) **1**	(+2) **3**	(+3) **6**	(+4) **10**	(+5) **15**	(+6) **21**	28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 141, 163, 176, 200, 225, 251, 278, 306, 335, …	La sucesión va añadiendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (intervalo '+1').
CUADRADO (4 lados)	$\frac{1}{2}n(2n - 0)$	(+1) **1**	(+3) **4**	(+5) **9**	(+7) **16**	(+9) **25**	(+11) **36**	49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, …	La sucesión va añadiendo 1, 3, 5, 7, 9, 11, … sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+2').
PENTAGONAL	$\frac{1}{2}n(3n - 1)$	(+1) **1**	(+4) **5**	(+7) **12**	(+10) **22**	(+13) **35**	(+16) **51**	70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 852, 925, …	La sucesión va añadiendo 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, … sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+3').
HEXAGONAL	$\frac{1}{2}n(4n - 2)$	(+1) 1	(+5) **6**	(+9) **15**	(+13) **28**	(+17) **45**	(+21) **66**	91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780, 861, 946, 1055, …	La sucesión va añadiendo 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, … sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+4').
HEPTAGONAL	$\frac{1}{2}n(5n - 3)$	(+1) **1**	(+6) **7**	(+11) **18**	(+16) **34**	(+21) **55**	(+26) **81**	112, 148, 189, 235, 286, 342, 403, 469, 540, 616, 697, 783, …	La sucesión va añadiendo 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+5').
OCTOGONAL	$\frac{1}{2}n(6n - 4)$	(+1) **1**	(+7) **8**	(+13) **21**	(+19) **40**	(+25) **65**	(+31) **96**	133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936, …	La sucesión va añadiendo 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+6').
ENEAGONAL o NONAGONAL (9)	$\frac{1}{2}n(7n - 5)$	(+1) **1**	(+8) **9**	(+15) **24**	(+22) **46**	(+29) **75**	(+36) **111**	154, 204, 261, 325, 396, 474, 559, 651, 748, 852, 963, …	La sucesión va añadiendo 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+7').
DECAGONAL (10)	$\frac{1}{2}n(8n - 6)$	(+1) **1**	(+9) **10**	(+17) **27**	(+25) **52**	(+33) **85**	(+41) **126**	175, 232, 297, 370, 451, 540, 637, …	La sucesión va añadiendo 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+8').
ENDECAGONAL (11)	$\frac{1}{2}n(9n - 7)$	(+1) **1**	(+10) **11**	(+19) **30**	(+28) **58**	(+37) **95**	(+46) **141**	196, 260, 333, 415, 506, 606, 715, …	La sucesión va añadiendo 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+9').
DODECAGONAL (12)	$\frac{1}{2}n(10n - 8)$	(+1) **1**	(+11) **12**	(+21) **33**	(+31) **64**	(+41) **105**	(+51) **156**	217, 288, 369, 460, 561, 672, 793, …	La sucesión va añadiendo 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+10').
TRIDECAGONAL (13)	$\frac{1}{2}n(11n - 9)$	(+1) **1**	(+12) **13**	(+23) **36**	(+34) **70**	(+45) **115**	(+56) **171**	238, 316, 405, 505, 616, 738, 871, …	La sucesión va añadiendo 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+11').
TETRA-DECAGONAL (14)	$\frac{1}{2}n(12n - 10)$	(+1) **1**	(+13) **14**	(+25) **39**	(+37) **76**	(+49) **125**	(+61) **186**	259, 344, 441, 550, 671, 804, 949, …	La sucesión va añadiendo 1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+12').
PENTA-DECAGONAL (15)	$\frac{1}{2}n(13n - 11)$	(+1) **1**	(+14) **15**	(+27) **42**	(+40) **82**	(+53) **135**	(+66) **201**	280, 372, 477, 595, 726, 870, 1027, …	La sucesión va añadiendo 1, 14, 27, 40, 53, 66, 79, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+13').
HEXA-DECAGONAL (16)	$\frac{1}{2}n(14n - 12)$	(+1) **1**	(+15) **16**	(+29) **45**	(+43) **88**	(+57) **145**	(+71) **216**	301, 400, 513, 640, 781, 936, 1105, …	La sucesión va añadiendo 1, 15, 29, 43, 57, 71, 85 , …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+14').
HEPTA-DECAGONAL (17)	$\frac{1}{2}n(15n - 13)$	(+1) **1**	(+16) **17**	(+31) **48**	(+46) **94**	(+61) **155**	(+76) **231**	322, 428, 549, 685, 836, 1002, 1183, …	La sucesión va añadiendo 1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+15').
OCTO-DECAGONAL (18)	$\frac{1}{2}n(16n - 14)$	(+1) **1**	(+17) **18**	(+33) **51**	(+49) **100**	(+65) **165**	(+81) **246**	343, 456, 585, 730, 891, 1068, 1261, …	La sucesión va añadiendo 1, 17, 33, 49, 65, 81, 97, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+16').
ENEA-DECAGONAL (19)	$\frac{1}{2}n(17n - 15)$	(+1) **1**	(+18) **19**	(+35) **54**	(+52) **106**	(+69) **175**	(+86) **261**	364, 484, 621, 775, 946, 1134, 1339, …	La sucesión va añadiendo 1, 18, 35, 52, 69, 86, 103,…, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+17').
ICOSAGONAL (20)	$\frac{1}{2}n(18n - 16)$	(+1) **1**	(+19) **20**	(+37) **57**	(+55) **112**	(+73) **185**	(+91) **276**	385, 512, 657, 820, 1001, 1200, 1417, …	La sucesión va añadiendo 1, 19, 37, 55, 73, 91, 109,…, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+18').

ICOSAKAI-HENÁGONAL (21)	**½*n*(19*n* - 17)**	(+1) **1**	(+20) **21**	(+39) **60**	(+58) **118**	(+77) **195**	(+96) **291**	406, 540, 693, 865, 1056, 1266, 1495, …	La sucesión va añadiendo 1, 20, 39, 58, 77, 96, 115,…, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+19').
ICOSAKAI-DÍGONAL (22)	**½*n*(20*n* - 18)**	(+1) **1**	(+21) **22**	(+41) **63**	(+61) **124**	(+81) **205**	(+101) **306**	427, 568, 729, 910, 1111, 1332, 1573, …	La sucesión va añadiendo 1, 21, 41, 61, 81, 101, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+20').
ICOSAKAI-TRÍGONAL (23)	**½*n*(21*n* - 19)**	(+1) **1**	(+21) **23**	(+43) **66**	(+64) **130**	(+85) **215**	(+106) **321**	448, 596, 765, 955, 1166, 1398, 1651, …	La sucesión va añadiendo 1, 21, 43, 64, 85, 106, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+21').
ICOSAKAI-TETRAGONAL (24)	**½*n*(22*n* - 20)**	(+1) **1**	(+23) **24**	(+45) **69**	(+67) **136**	(+89) **225**	(+111) **336**	469, 624, 801, 1000, 1221, 1464, 1729, …	La sucesión va añadiendo 1, 23, 45, 67, 89, 111, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+22').
ICOSAKAI-PENTÁGONAL (25)	**½*n*(23*n* - 21)**	(+1) **1**	(+24) **25**	(+47) **72**	(+70) **142**	(+93) **235**	(+116) **351**	491, 652, 837, 1045, 1276, 1530, 1807, …	La sucesión va añadiendo 1, 24, 47, 70, 93, 116, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+23').
ICOSAKAI-HEXAGONAL (26)	**½*n*(24*n* - 22)**	(+1) **1**	(+25) **26**	(+49) **75**	(+73) **148**	(+97) **245**	(+121) **366**	511, 680, 873, 1090, 1331, 1596, 1885, …	La sucesión va añadiendo 1, 25, 49, 73, 97, 121, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+24').
ICOSAKAI-HEPTAGONAL (27)	**½*n*(25*n* - 23)**	(+1) **1**	(+26) **27**	(+51) **78**	(+76) **154**	(+101) **255**	(+126) **381**	532, 798, 909, 1135, 1386, 1662, 1963, …	La sucesión va añadiendo 1, 26, 51, 76, 101, 126, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+25').
ICOSAKAI-OCTOGONAL (28)	**½*n*(26*n* - 24)**	(+1) **1**	(+27) **28**	(+53) **81**	(+79) **160**	(+105) **265**	(+131) **396**	553, 736, 945, 1180, 1441, 1728, 2041, …	La sucesión va añadiendo 1, 27, 53, 79, 105, 131, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+26').
ICOSAKAI-ENEAGONAL (29)	**½*n*(27*n* - 25)**	(+1) **1**	(+28) **29**	(+55) **84**	(+82) **166**	(+109) **275**	(+136) **411**	574, 764, 981, 1225, 1496, 1794, 2119, …	La sucesión va añadiendo 1, 28, 55, 82, 109, 136, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+27').
TRIACONTA-GONAL (30)	**½*n*(28*n* - 26)**	(+1) **1**	(+29) **30**	(+57) **87**	(+85) **172**	(+113) **285**	(+141) **426**	595, 792, 1017, 1270, 1551, 1860, 2197, …	La sucesión va añadiendo 1, 29, 57, 85, 113, 141, …, sucesivamente al número anterior para obtener el siguiente (Intervalo '+28').
Diferencia en el mismo 'n' entre distintos poligonales		0	1	3	6	10	15	**Si te fijas, la diferencia para el mismo 'n' de un número poligonal con otro es el 'n' número triangular. ¿Curioso? No, matemáticas.**	

* Existen más números relacionados con los polígonos, como los **NÚMEROS RECTANGULARES OBLONGOS**, pero no se consideran como poligonales porque los rectángulos no son polígonos regulares.

***Notas*: consideraciones a tener en cuenta sobre la presente tabla.**

- 'n' siempre se refiere a un número natural, que indica la posición en la sucesión de cada término.
- Para 'n=0', todos los números poligonales son '0'.
- Aplicando la fórmula dada, podemos calcular cualquier posición de cualquier número poligonal.
- Todas las fórmulas dadas pueden transformarse en otras aplicando las reglas básicas matemáticas relativas al cálculo.
  Por ejemplo, podemos transformar la fórmula de los números triangulares de la siguiente forma:

Número triangular = $\frac{1}{2}n(1n + 1)$ = $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$ = $n\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)$ = $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

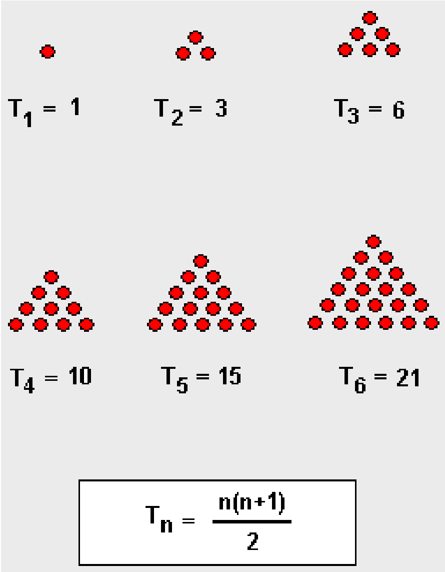
- Podemos calcular el siguiente número poligonal de una sucesión conociendo los dos números previos. Tenemos el "sumatorio", que siempre es "nº lados del número poligonal menos '2'". Restamos los dos términos que tenemos, y al resultado le sumamos el "sumatorio". Esa es la cantidad a sumar para obtener el número siguiente (ver última columna).

Cómo nombrar los polígonos (resumen, más información en el apartado de 'figuras planas').

- De 11 a 19 lados: Se nombra la parte correspondiente a las unidades más "decagonal".
- De 21 a 29 lados: se utiliza '**icosa**' (veinte) + '**kai**' (y) + nombre del polígono de 1 a 9 lados.

NÚMEROS TRIANGULARES.

Son aq**uellos** **números que pueden colocarse formando un triángulo equilátero**, es decir, tendrían el mismo número en sus tres lados (compartiendo las esquinas), y rellenando de forma regular su interior.



FÓRMULAS.

Podemos utilizar distintas fórmulas para calcular los números triangulares, aunque en realidad son todas la misma, pero expresadas de distinta forma:

$T_n = ½n(1n + 1)$ $T_n = ½n^2 + ½$ $T_n = n\,(½n + ½)$ $T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

donde 'n' es un número natural y el orden de la sucesión, y 'T_n' es el número Triangular según 'n' usado.

En realidad, lo que nos dice esta fórmula es que **para calcular cualquier número triangular basta con multiplicar dos números consecutivos y dividirlos entre dos**.

Para representar los números triangulares, basta con añadir una fila de "bolitas" abajo del anterior, colocando cada una en los huecos que dejan las de arriba (ver imagen de la derecha).

LISTA DE NÚMEROS TRIANGULARES. Los primeros números triangulares son:

Para 'n = …'	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15	n=16	n=17	n=18	n=19	n=20
Nº triangular	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**	**66**	**78**	**91**	**105**	**120**	**136**	**153**	**171**	**190**	**210**

Los números triangulares tienen más particularidades, fíjate que **si vas sumando a cada número triangular números naturales sucesivos y consecutivos, vas obteniendo el siguiente**: partimos del '0': 0+1=1; 1+2=3; 3+3=6; 6+4=10; 10+5=15; 15+6=21; 21+7=28; 28+8=36; 36+9=45; 45+10=55; 55+11=66; 66+12=78; 78+13=91…

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

► Pero además, los números triangulares cumplen algo impresionante, recogido en este teorema:

"La suma de T_n y T_{n-1} es un cuadrado perfecto (número al cuadrado)". Que quiere decir que **si sumamos dos números consecutivos cualesquiera de esta sucesión, nos dará un ¡¡CUADRADO PERFECTO!!**

(Nota: los cuadrados perfectos son los números naturales elevados al cuadrado).

Ejemplos: $6 + 10 = 16 = 4^2$; $15 + 21 = 36 = 6^2$; $21 + 28 = 49 = 7^2$;

Relación de los números triangulares y los cuadrados perfectos (APLICACIÓN DEL TEOREMA):

Cuadrado	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
Resultado	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
Nos triangulares que lo originan (suma)	0+1	1+3	3+6	6+10	10+15	15+21	21+28	28+36	36+45	45+55	55+66	66+78	78+91	91+105	105+120

► **Relación con los NÚMEROS CÚBICOS**. Los números cúbicos son números elevados al cubo (por ejemplo: $3^3 = 3x3x3 = 27$).
"**La suma de 'n' números cúbicos sucesivos es igual al número triangular 'n' al cuadrado**". Vamos a comprobarlo.

Suma de números cúbicos sucesivos.	Para 'n = …'	Números triangulares al cuadrado.
$1^3 = 1$	n = 1	Número triangular 'n=' = 1; $1^2 = 1$
$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$	n = 2	Número triangular 'n=2' = 3; $3^2 = 9$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$	n = 3	Número triangular 'n=3' = 6; $6^2 = 36$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$	n = 4	Número triangular 'n=4' = 10; $10^2 = 100$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$	n = 5	Número triangular 'n=5' = 15; $15^2 = 225$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$	n = 6	Número triangular 'n=6' = 21; $21^2 = 441$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 = 784$	n = 7	Número triangular 'n=7' = 28; $28^2 = 784$

► Relación con los NÚMEROS OBLONGOS.

"Si sumas dos números triangulares iguales obtienes uno de los números oblongos", o lo que es lo mismo, cualquier número oblongo dividido entre dos, da un número triangular (un número oblongo es el doble de uno triangular. Además, esta propiedad se cumple de forma sucesiva. Por tanto, podemos formular esta regla de esta forma: "**El doble del 'n' número triangular es igual al 'n' número oblongo**". Lo veremos mejor en una tabla con ejemplos:

Número oblongo	**1 x 2 = 2**	**2 x 3 = 6**	**3 x 4 = 12**	**4 x 5 = 20**	**5 x 6 = 30**	**6 x 7 = 42**	**7 x 8 = 56**	**8 x 9 = 72**
Suma de números triangulares iguales	**1 + 1 = 1**	**3 + 3 = 6**	**6 + 6 = 12**	**10 + 10 = 20**	**15 + 15 = 30**	**21 + 21 = 42**	**28 + 28 = 56**	**36 + 36 = 72**
Para 'n = …'	$Tr_n = 1$	$Tr_n = 2$	$Tr_n = 3$	$Tr_n = 4$	$Tr_n = 5$	$Tr_n = 6$	$Tr_n = 7$	$Tr_n = 8$

(Los números oblongos se obtienen al multiplicar dos números naturales consecutivos).

► Relación con los NÚMEROS TETRAÉDRICOS.

La suma de un número determinado de números triangulares da como resultado un número tetraédrico.

(Los números tetraédricos son: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, …)

Número tetraédrico	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**120**
Suma de números triangulares sucesivos	**1**	**1 + 3**	**1 + 3 + 6**	**1 + 3 + 6 + 10**	**1 + 3 + 6 + 10 + 15**	**1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21**	**1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28**	**1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36**
Para 'n = …'	$Tr_n = 1$	$Tr_n = 2$	$Tr_n = 3$	$Tr_n = 4$	$Tr_n = 5$	$Tr_n = 6$	$Tr_n = 7$	$Tr_n = 8$

Para entender mejor esta propiedad, basta con ver la representación gráfica de los números tetraédricos.

Tienen forma de tetraedro regular, uno de los cinco sólidos platónicos, y se forman superponiendo sucesivamente números triangulares.

En la imagen podemos ver cómo cada número triangular (cada uno representado con bolas de igual color), se va superponiendo hasta crear un tetraedro.

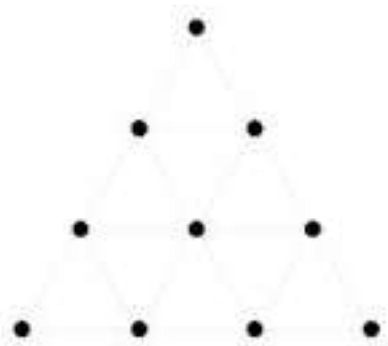
Los 5 sólidos platónicos son el tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

► TEOREMA DE GAUSS.

Carl Fiedrich Gauss (matemático y científico alemán) descubrió en 1796 que "**Todos los números naturales se pueden representar como la suma de un máximo de tres números triangulares**"; se pueden repetir o usar menos de tres.

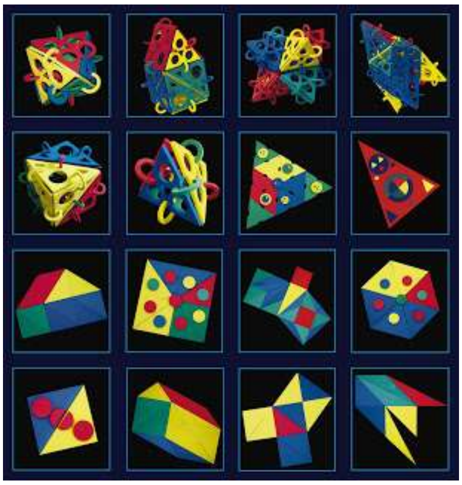
Ejemplos: '77', se puede representar como "21+28+28" o "66+10+1"; '20', como "10+10" (no hay más opciones)…

► **¿SABÍAS QUE…** los números triangulares fueron muy estudiados por Pitágoras y los pitagóricos, y **consideraban al número triangular '10', y a su figura triangular, como sagrado**? Además, le atribuían multitud de posibilidades y propiedades relacionadas con nuestro ser más interno y nuestra conexión con nosotros mismos, con la naturaleza y el Universo. Le llamaban **TETRAKTYS**.



El TETRAKTYS está formado por los primeros 4 números triangulares.

Ha sido inspiración de juegos educativos. En esta versión, llamada **TETRAKYS**, las niñas y niñas pueden crear y expresarse de muchas formas.



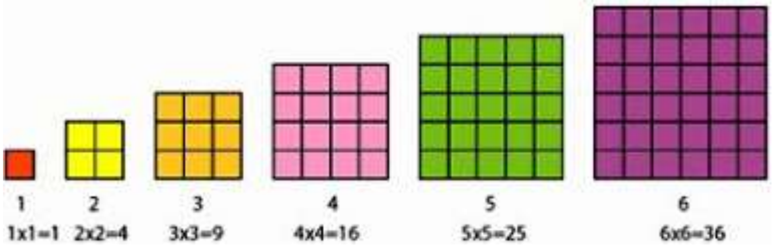
NÚMEROS CUADRADOS o CUADRADOS PERFECTOS.

Los números cuadrados son el resultado de ‘elevar al cuadrado’ a un número natural.

Ejemplo: $3^2 = 3x3 = 9$; $7^2 = 7x7 = 49$...

También se puede decir que **son aquellos números naturales cuya raíz cuadrada es exacta**.

Ejemplo: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{49} = 7$...



Los 50 primeros cuadrados perfectos son (también podemos considerar “$0^2 = 0$”):

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2	21^2	22^2	23^2	24^2	25^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625

26^2	27^2	28^2	29^2	30^2	31^2	32^2	33^2	34^2	35^2	36^2	37^2	38^2	39^2	40^2	41^2	42^2	43^2	44^2	45^2	46^2	47^2	48^2	49^2	50^2
676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500

FÓRMULAS.

Aunque las fórmulas de los números cuadrados perfectos se pueden representar de muchas formas, a partir de la fórmula base, podemos simplificarla hasta una forma muy básica y sencilla:

$$C_n = \tfrac{1}{2}n(2n - 0) \rightarrow C_n = n^2$$

Donde ‘n’ es un número natural y el orden de la sucesión, y ‘C_n’ es el número Triangular según ‘n’ usado.

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

Los números cuadrados no solo son el producto de la potencia ‘2’, sino que también constituyen una sucesión, con una serie de reglas, características y propiedades:

► Una regla de esta sucesión es la siguiente: “**Los números cuadrados se obtienen sumando números impares consecutivos a cada uno de ellos**”. Veámoslo con un cuadro de ejemplos:

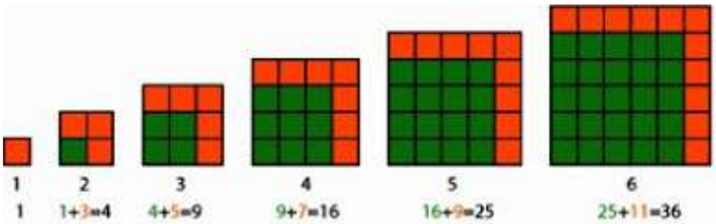
+1 +3 +5 +7 +9 +11 +13 +15 +17 +19 +21 +23

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12

La fórmula para la regla de esta sucesión sería:
“**Número cuadrado ‘n’ = suma ‘n’ números impares**”.

Ejemplo: si quiero calcular el número cuadrado que va en 5º lugar, sumo los 5 primeros números impares: 1+3+5+7+9 =25 (que como es el 5º, también es igual a 5^2 o 5x5).

► **Cualquier número cuadrado se puede representar como la suma de los primeros números impares que indique su base**.



Aquí podemos ver gráficamente cómo surgen los números cuadrados al sumar el siguiente número impar al número cuadrado anterior.

Potencia	Cálculo	‘n = base’	Suma de impares
1^2	1 · 1 = 1	1	1 = 1
2^2	2 · 2 = 4	2	1 + 3 = 4
3^2	3 · 3 = 9	3	1 + 3 + 5 = 9
4^2	4 · 4 = 16	4	1 + 3 + 5 + 7 = 16
5^2	5 · 5 = 25	5	1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
6^2	6 · 6 = 36	6	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36
7^2	7 · 7 = 49	7	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49
8^2	8 · 8 = 64	8	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64
9^2	9 · 9 = 81	9	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81
10^2	10 · 10 = 100	10	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100
11^2	11 · 11 = 121	11	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 121
12^2	12 · 12 = 144	12	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 144

► A los números enteros positivos que no tienen ningún divisor que sea un número cuadrado (excepto el ‘1’, lógicamente), se les llama ‘**NÚMEROS LIBRES DE CUADRADOS**”. Son infinitos: 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, … (y todos los números primos).

► Vamos a establecer unos “**PERFILES DE CUADRABILIDAD**”, que nos indican cómo puede ser el cuadrado de cualquier número:

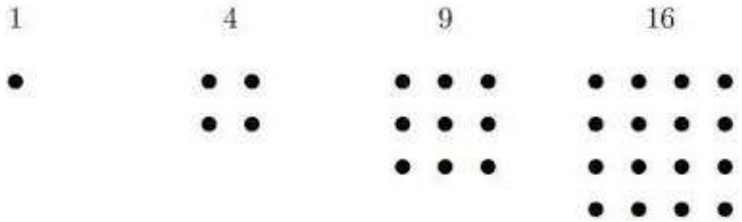
- Los números acabados en ‘ceros’. → Sus cuadrados acabarán en el doble de ceros que ellos. El resto de sus cifras también serán un cuadrado perfecto.
- Los números acabados en ‘1’ o ‘9’. → Sus cuadrados siempre acabarán siempre en ‘1’. Además el número formado por el resto de cifras quitando el ‘1’ último, será divisible por ‘4’.
- Los números acabados en ‘2’ u ‘8’. → Sus cuadrados acabarán siempre en ‘4’, y la penúltima cifra será un número par.
- Los números acabados en ‘3’ o ‘7’. → Sus cuadrados acabarán siempre en ‘9’. Además el número formado por el resto de cifras quitando el ‘9’ último, será divisible por ‘4’.
- Los números acabados en ‘4’ o ‘6’. → Sus cuadrados acabarán siempre en ‘6’, y la penúltima cifra será un número impar.
- Los números acabados en ‘5’. → Sus cuadrados acabarán siempre en ‘25’, y la penúltima cifra será ‘0’, ‘2’, ‘06’ o ‘56’.

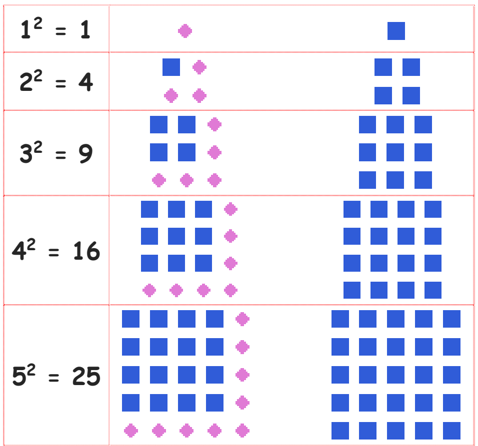
► Podemos establecer unos “**CRITERIOS DE CUADRABILIDAD**”, o sea, cómo podemos identificar si un número es cuadrado:
- **Números acabados en ‘ceros’**: si un número acaba en número impar de ceros, nunca es un número cuadrado, pero si acaba en cifra par de ‘ceros’, es cuadrado, si el resto de cifras forman un número cuadrado. ***Por ejemplo***: ’81.000’: no es cuadrado, porque acaba en ‘3 ceros’; sin embargo, ‘8.100’, sí es cuadrado porque acaba en ‘2 ceros’ y el resto de cifras es ‘81’ que es un cuadrado perfecto.

► Aunque generalmente el concepto de número cuadrado se aplica a los números naturales, también **podemos aplicarlo a todos los números enteros, positivos y negativos**. Si elevamos un número negativo al cuadrado, siempre obtendremos como resultado un número positivo. *Ejemplo*: $-3^2 = 9$ $-6^2 = 36$; $-12^2 = 144$ …

► “**Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares consecutivos”.** (Ver ‘Números triangulares’ en el siguiente apartado). ***Por ejemplo***: ‘9 = 3+6’; ’16 = 6+10’; ’25 = 10+15’; ’36 = 15+21’ …

► “**Un número es cuadrado o es un cuadrado perfecto si se puede representar como un cuadrado”**.
Mostramos unas imágenes para entenderlo mejor:





► Los cuadrados perfectos están presentes en las “**TABLAS DE MULTIPLICAR**”. Aquí te mostramos las tablas de multiplicar del ‘1 al 10’, ordenadas en forma de cuadro. Fíjate cómo quedan ordenados los números cuadrados. Curioso, ¿verdad?

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

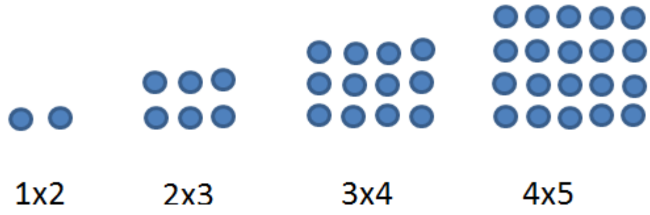
► Los números inversos tienen su inverso en las “**RAÍCES CUADRADAS**”. De tal manera que si tomamos un número natural, le aplicamos el cuadrado, y luego la raíz cuadrada, volvemos a tener el número natural inicial.

Número natural	Cuadrado	Raíz cuadrada
1	$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
3	$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
4	$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
5	$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
6	$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
7	$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$

NÚMEROS OBLONGOS o NÚMEROS OBLONGOS RECTANGULARES.

Son números que se obtienen al multiplicar dos números enteros sucesivos.

Además de números oblongos, se les conoce con el nombre de: **NÚMEROS RECTANGULARES** o **NÚMEROS PRÓNICOS** o **NÚMEROS HETEROMÉCICO**.



FÓRMULAS.

Su fórmula generadora es sencilla, y se puede expresar, fundamentalmente, de dos formas distintas aunque equivalentes:

$O_n = n \cdot (n+1)$ $O_n = n^2 + n$

LISTA DE NÚMEROS OBLONGOS.

Los 30 primeros números triangulares son:

Para ‘n = …’	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14
Número oblongo	**0**	**2**	**6**	**12**	**20**	**30**	**42**	**56**	**72**	**90**	**110**	**132**	**156**	**182**	**210**
$O_n = n \cdot (n+1)$	0 x 1	1 x 2	2 x 3	3 x 4	4 x 5	5 x 6	6 x 7	7 x 8	8 x 9	9 x 10	10 x 11	11 x 12	12 x 13	13 x 14	14 x 15
Nº par que suma	+2	+4	‘+6	+8	+10	+12	+14	+16	+18	+20	+22	+24	+26	+28	+30

Para ‘n = …’	n=15	n=16	n=17	n=18	n=19	n=20	n=21	n=22	n=23	n=24	n=25	n=26	n=27	n=28	n=29
Número oblongo	**240**	**272**	**306**	**342**	**380**	**420**	**462**	**506**	**552**	**600**	**650**	**702**	**756**	**812**	**870**
$O_n = n \cdot (n+1)$	15x16	16x17	17x18	18x19	19x20	20x21	21x22	22x23	23x24	24x25	25x26	26x27	27x28	28x29	29x30
Nº par que suma	+32	+34	+36	+38	+40	+42	+44	+46	+48	+50	+52	+54	+56	+58	

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

- Fíjate que los números rectangulares pa**ra crear el siguiente número en la sucesión, van sumando sucesivos números pares** (ver tabla superior).

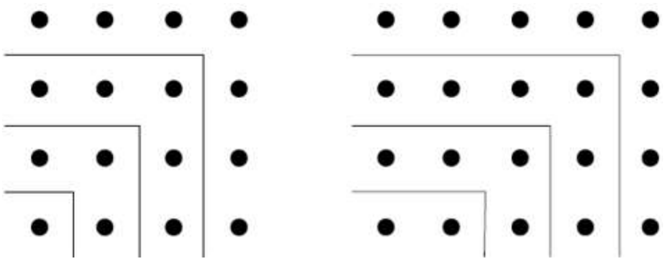
- Asimismo, un número oblongo se puede calcular sumando los anteriores ‘n’ números pares.

Ejemplo: para ‘n=3’ tenemos el oblongo ‘12’. Los 3 primeros números pares sumados son: ‘2+4+6 = 12’.
Para ‘n=6’ tenemos el oblongo ‘42’. Los 6 primeros números pares sumados son: ‘2+4+6+8+10+12 = 42’.

- Un número oblongo es el doble de un número triangular. O sea, si multiplicamos un número triangular por ‘dos’, obtenemos un número oblongo.

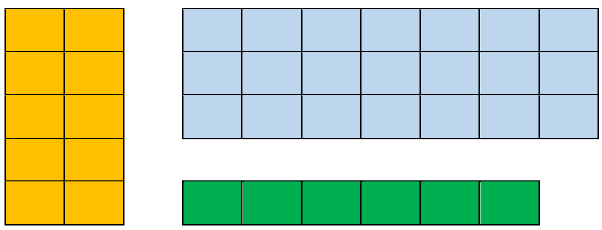
- Los números oblongos rectangulares son similares a los números cuadrados (cuadrados perfectos).

Podríamos considerar a los **números rectangulares oblongos y a los números rectangulares no oblongos**, los cuáles **serían el resultado de cualquier multiplicación de dos números enteros distintos y no consecutivos.** Tanto los números cuadrados como los números rectangulares, oblongos o no, conforman el **CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN** (‘base x altura’).



A la izquierda, representación gráfica de los números cuadrados, y a la derecha de los números oblongos rectangulares.

NÚMEROS RECTANGULARES NO OBLONGOS (“PUROS”)

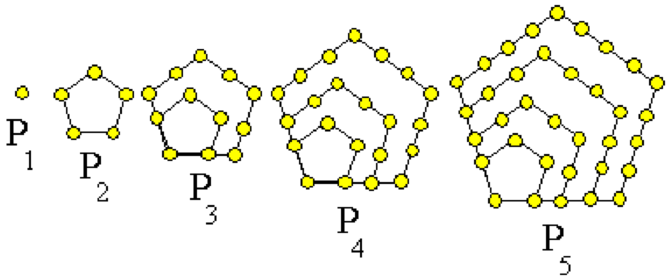


Aquí tenemos 3 casos de números rectangulares no oblongos: 5x2 = 10 (naranja), 7x3 = 21 (celeste), y 6x1 = 6 (verde).

NÚMEROS PENTAGONALES.

Los números pentagonales son aquellos que se pueden colocar formando pentágonos regulares sucesivos.

Es importante observar que los números pentagonales no siguen la misma geometría espacial que otros números poligonales. Fíjate en la imagen de la derecha, los números pentagonales sucesivos no son simétricos.



FÓRMULAS.

La fórmula básica de los números pentagonales se puede representar de muchas formas. Te mostramos las principales para que utilices la que creas más fácil u oportuna, pero recuerda, en realidad, todas son iguales:

$P_n = \frac{1}{2} n\,(3n - 1)$	$P_n = \frac{3}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$	$P_n = n\,(\frac{3}{2} n - \frac{1}{2})$	$P_n = 3n^2 – n / 2$	$P_n = \frac{n\,(3n-1)}{2}$

Donde ‘n’ es un número natural y el orden de la sucesión, y ‘Pn’ es el número Pentagonal según ‘n’ usado.

LISTA DE NÚMEROS PENTAGONALES.

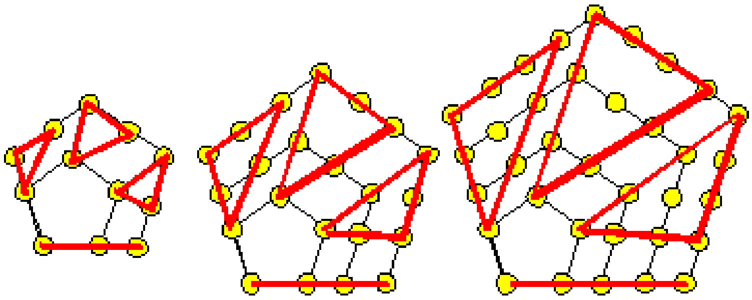
Según ‘n’, obtendremos infinitos números pentagonales. La lista de los 50 primeros números pentagonales es la siguiente:

Para n=1	Para n=2	Para n=3	Para n=4	Para n=5	Para n=6	Para n=7	Para n=8	Para n=9	Para n=10	Para n=11	Para n=12	Para n=13	Para n=14	Para n=15	Para n=16	Para n=17	Para n=18	Para n=19	Para n=20	Para n=21	Para n=22	Para n=23	Para n=24	Para n=25
1	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**117**	**145**	**176**	**210**	**247**	**287**	**330**	**376**	**425**	**477**	**532**	**590**	**651**	**715**	**782**	**852**	**925**

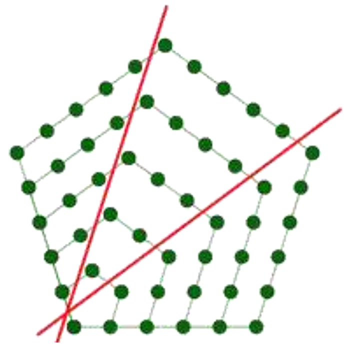
Para n=26	Para n=27	Para n=28	Para n=29	Para n=30	Para n=31	Para n=32	Para n=33	Para n=34	Para n=35	Para n=36	Para n=37	Para n=38	Para n=39	Para n=40	Para n=41	Para n=42	Para n=43	Para n=44	Para n=45	Para n=46	Para n=47	Para n=48	Para n=49	Para n=50
1001	**1080**	**1162**	**1247**	**1335**	**1426**	**1520**	**1617**	**1717**	**1820**	**1926**	**2035**	**2147**	**2262**	**2380**	**2501**	**2625**	**2752**	**2882**	**3015**	**3151**	**3290**	**3432**	**3577**	**3725**

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

► A diferencia de la mayoría de números poligonales, los números pentagonales no son simétricos (ver su representación gráfica). Sin embargo, podemos encontrar diferentes reglas geométricas en los números pentagonales:



Podemos encontrar 2 triángulos isósceles iguales en sus “extremos” y otro isósceles en su interior.



Fíjate, podemos encontrar números triangulares consecutivos estableciendo estas dos líneas.

► Los números pentagonales son importantes en la **Teoría de particiones de Euler**. Lo expresa en su **Teorema del número pentagonal**.

► Los números pentagonales se pueden calcular tanto para ‘n’ como número entero positivo como entero negativo.

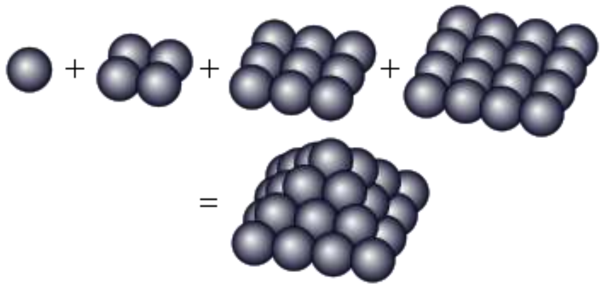
► Podemos calcular si un número dado (‘x’) es pentagonal aplicando la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\sqrt{24x+1}\ +1}{6}$$

‘x’ sería el número que queremos comprobar si es pentagonal. Si al aplicar la fórmula obtenemos como resultado un número natural (**‘n’**) o, simplemente, un número entero, entonces, ‘x’ es un número pentagonal.

NÚMEROS PIRAMIDALES CUADRADOS.

Los números piramidales son aquellos que se pueden colocar formando pirámides cuadradas.



Aunque tienen su fórmula para calcularlos, **surgen de la suma de números cuadrados consecutivos**. Cada número cuadrado se colocaría superpuesto al siguiente formando una pirámide de base cuadrada.

En la imagen de la derecha vemos el número piramidal '30', que surge de los números cuadrados: 1 + 4 + 9 + 16 = 30

FÓRMULAS.

La fórmula básica de los números piramidales se puede representar de muchas formas. Te mostramos las principales para que utilices la que creas más fácil u oportuna, pero recuerda, en realidad, todas son iguales:

$$\mathrm{Pir}_n = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \qquad \mathrm{Pir}_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Vamos a comprobar que se cumple con el ejemplo de arriba (Para 'n=4):

$$\mathrm{Pir}_n = \frac{4\,(4+1)\cdot(8+1)}{6} = \frac{20\cdot 9}{6} = \frac{180}{6} = 30 \qquad \mathrm{Pir}_n = \frac{2\cdot 64\ +\ 3\cdot 16\ +\ 4}{6} = \frac{128+\ 48+4}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

Donde '**n**' es un número natural y el orden de la sucesión, y '**Pir**$_n$' es el número piramidal según 'n' usado.

LISTA DE NÚMEROS PIRAMIDALES CUADRADOS.

Según 'n', obtendremos infinitos números piramidales. La lista de los 15 primeros números piramidales es la siguiente:

Para n=1	Para n=2	Para n=3	Para n=4	Para n=5	Para n=6	Para n=7	Para n=8	Para n=9	Para n=10	Para n=11	Para n=12	Para n=13	Para n=14	Para n=15
1	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**	**140**	**204**	**285**	**385**	**506**	**650**	**819**	**1015**	**1240**

Número cuadrado que se va añadiendo a la sucesión													
+4	+9	+16	+25	+36	+49	+64	+81	+100	+121	+144	+169	+196	+225

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

► **Los números piramidales cuadrados son la suma de los números cuadrados sucesivos**. Por tanto, para calcular el siguiente número piramidal, podemos sumarle al anterior el siguiente número cuadrado, según el orden 'n' de la sucesión.

► **Solo un número piramidal que además es un cuadrado perfecto** (además del '1'), el '**4900'** (70x70 = 70^2).

Este número no se calculó hasta 1875, a partir del llamado "**PROBLEMA DE LAS BOLAS DE CAÑÓN**" (**'Cannonball problem'**), formulado en 1875 por Lucas, pero que no fue demostrado hasta 1918 por George Neville Watson (1886-1965), el cual decía: "Si tenemos una pila piramidal de bolas de cañón y queremos disponerlas en el suelo formando un cuadrado perfecto, ¿cuántas bolas necesitaremos?" La única solución posible (sin contar '1') es un número que sea a la vez cuadrado perfecto y piramidal cuadrado. El único existente es el '4900', el cuadrado perfecto de '70', o sea, un cuadrado con 70 bolas de lado.

Números piramidales cuadrados.

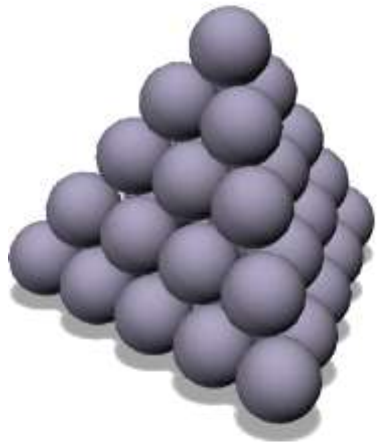
► En el libro **Liber Abaci de Fibonacci de 1202**, ya aparece una fórmula para calcular números piramidales.

► La **fórmula de Faulhaber**, se utiliza para expresar las potencias de los primeros números naturales. Esta fórmula se expresa como un polinomio: $\mathbf{1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots + n^p}$.

En ella habría que establecer 'p' que sería la potencia a la que elevamos los números 'n' naturales que queramos calcular. Pues bien, para 'p=2', estaríamos en el caso de los números piramidales cuadrados.

Es curioso, pero esta fórmula no la inventó Johann Faulhaber, sino que se le puso su nombre en su honor.

NÚMEROS TETRAÉDRICOS (o piramidales o tetragonales).



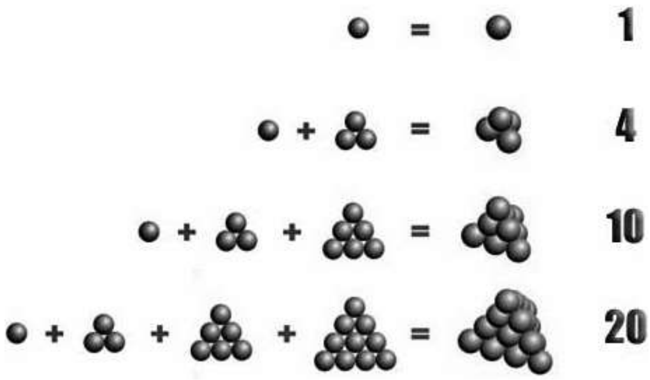
Los números tetraédricos, piramidales o tetragonales **son aquellos que se pueden colocar formando tetraedros regulares** (pirámides triangulares con las 4 caras iguales).

Recordemos que el tetraedro es uno de los cinco poliedros regulares existentes, llamados **sólidos platónicos**. También se puede considerar como una **pirámide triangular** cuyas cuatro caras son **triángulos equiláteros iguales**.

Los números tetraédricos se forman uniendo, en distintas capas, sucesivos números triangulares, empezando por el '1'.

FÓRMULAS.

La fórmula que creemos más adecuada para calcular los sucesivos números tetraédricos consiste en sumar los correspondientes números triangulares sucesivos. Tienen que coincidir el número de orden tetraédrico con el número de números triangulares sucesivos sumados, empezando siempre por el '1':



$$Tt_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

Vamos a verlo con algunos ejemplos

$$Tt_5 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = \mathbf{35}$$

$$Tt_7 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = \mathbf{84}$$

Donde '**n**' es un número natural y el orden de la sucesión, y 'Tt_n' es el número tetraédrico según 'n' usado.

LISTA DE NÚMEROS TETRAÉDRICOS.

Según 'n', obtendremos infinitos números tetraédricos. La lista de los 17 primeros números tetraédricos es la siguiente (abajo mostramos los sucesivos números triangulares sucesivos que lo forman):

Para n=1	Para n=2	Para n=3	Para n=4	Para n=5	Para n=6	Para n=7	Para n=8	Para n=9	Para n=10
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**120**	**165**	**220**
1	1 + 3	1 + 3 + 6	1 + 3 + 6 + 10	1 + 3 + 6 + 10 + 15	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55

Para n=11	Para n=12	Para n=13	Para n=14	Para n=15	Para n=16	Para n=17
286	**364**	**455**	**560**	**680**	**816**	**969**
1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105 + 120	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105 + 120 + 136	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105 + 120 + 136 + 153

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

- El número 'n' de cada número triangular indica además el número de "bolas" que tiene en cada arista, o las "capas" de números triangulares que lo forman.
- Existen solo tres números que son a la vez tetraédricos y cuadrados perfectos. Son 1, 4 y 19600 (140^2).
- Aunque los números tetraédricos y los piramidales cuadrados parecen similares, solo tienen un número en común, el '1'.
- Existen cinco números que son tetraédricos y triangulares a la vez: 1, 10, 120, 1540 y 7140.

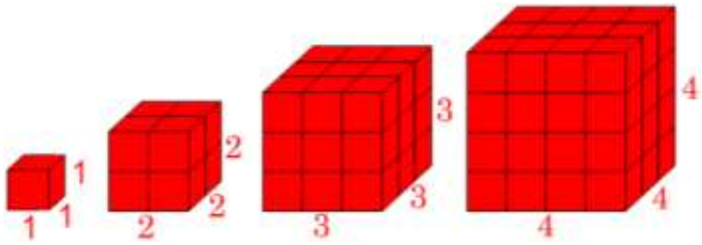
➢ NÚMEROS CÚBICOS o CUBOS PERFECTOS.

Los números cúbicos son el resultado de ‘elevar al cubo a un número natural, y que pueden organizarse en forma de cubo o hexaedro regular (uno de los cinco sólidos platónicos o poliedros regulares).

Ejemplo: $3^3 = 3x3x3 = 27$; $7^3 = 7x7x7 = 343$…

También se puede decir que **son aquellos números naturales cuya raíz cúbica es exacta**.

Ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[3]{343} = 7$



El nombre de número cúbico le viene de que se pueden representar mediante un cubo, con la misma anchura, altura y fondo.

FÓRMULAS.

Aunque las fórmulas de los números cúbicos se pueden representar de muchas formas, la más práctica y sencilla es:

$$Cb_n = n^3$$

Donde ‘n’ es un número natural y el orden de la sucesión, y ‘Cb_n’ es el número Triangular según ‘n’ usado.

Es importante citar que, **en geometría, la fórmula de los números cúbicos es la misma que la utilizada para calcular el volumen de un cubo o hexaedro regular**.

LISTA DE NÚMEROS CÚBICOS.

Los 40 primeros números cúbicos son (también podemos considerar “$0^3 = 0$”):

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3	11^3	12^3	13^3	14^3	15^3	16^3	17^3	18^3	19^3	20^3
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000	1.331	1.728	2.197	2.744	3.375	4.096	4.913	5.832	6.859	8.000

21^3	22^3	23^3	24^3	25^3	26^3	27^3	28^3	29^3	30^2	31^3	32^3	33^3	34^3	35^3	36^3	37^3	38^3	39^3	40^3
9.261	10.648	12.167	13.824	15.625	17.576	19.683	21.952	24.389	27.000	29.791	32.768	35.937	39.304	42.875	46.656	50.653	54.872	59.319	64.000

En esta página han creado la lista con los primeros ¡¡¡1000 números cúbicos!!! Gran trabajo, felicidades: http://www.ehtam-mathe.de/Kubikzahlen/espanol/1000.htm

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

Los números cúbicos no solo son el producto de la potencia ‘2’, sino que también constituyen una sucesión, con una serie de reglas, características y propiedades:

► Aunque generalmente el concepto de número cúbico se aplica a los números naturales, también **podemos aplicarlo a todos los números enteros, positivos y negativos**. *Ejemplo*: $-3^3 = -27$; $-6^3 = -216$ …

► **Cualquier número cúbico se puede representar como la suma de los números impares consecutivos según el número que indique su base, teniendo en cuenta que los números usados en números cúbicos anteriores ya no pueden ser usados**. Fíjate en los ejemplos del siguiente cuadro, lo entenderás mucho mejor.

Potencia	Cálculo	‘n = base’	Suma de impares
1^3	1 · 1 · 1 = **1**	1	**1 = 1**
2^3	2 · 2 · 2 = **8**	2	**3 + 5 = 8**
3^3	3 · 3 · 3 = **27**	3	**7 + 9 + 11 = 27**
4^3	4 · 4 · 4 = **64**	4	**13 + 15 + 17 + 19 = 64**
5^3	5 · 5 · 5 = **125**	5	**21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125**
6^3	6 · 6 · 6 = **216**	6	**31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216**
7^3	7 · 7 · 7 = **343**	7	**43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = 343**
8^3	8 · 8 · 8 = **512**	8	**57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 = 512**
9^3	9 · 9 · 9 = **729**	9	**73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 = 729**
10^3	10 · 10 · 10 = **1000**	10	**91 + 93 + 95 + 97 + 99 + 101 + 103 + 105 + 107 + 109 = 1000**
11^3	11 · 11 · 11 = **1331**	11	**111 + 113 + 115 + 117 + 119 + 121 + 123 + 125 + 127 + 129 = 1331**
12^3	12 · 12 · 12 = **1728**	12	**131 + 133 + 135 + 137 + 139 +141 + 143 + 145 + 147 + 149 + 151 = 1728**

► En los números cuadrados se podían establecer perfiles y criterios de cuadrabilidad; sin embargo, para los números cúbicos, estos perfiles y criterios serían demasiado amplios, por lo que es más efectivo no establecerlos.

► Hay casos en que los números cuadrados y cúbicos coinciden. *Por ejemplo*: $8^2 = 4^3 = 64$. Pero, ¿podríamos saber qué números cuadrados y cúbicos coinciden? La respuesta sería sí, y si te preguntas: "¿cómo?", es muy sencillo, aplicando una propiedad de las potencias: "**Todos los cuadrados perfectos elevados a seis o múltiplos de seis, tienen un número cúbico con el mismo resultado**". **La base de este número cúbico será el cuadrado de la base del número cuadrado, y el exponente será la mitad del que tenía el número cuadrado**. Veámoslo con ejemplos:

Ejemplos: $3^6 = 729 = 9^3$; fíjate en sus bases (nueve es tres al cuadrado), y en sus exponentes (tres es la mitad de seis).

$4^6 = 16^3 = 4096$; $5^6 = 25^3 = 15.625$; $10^6 = 100^3 = 1.000.000$

Pero esta regla permite realizar "**potencias equivalentes**". Vimos anteriormente que '$8^2 = 4^3 = 64$'; sin embargo, '8^2' no está elevado a seis, pero **hay otra propiedad matemática**, parecida a la que hemos visto, **que nos permite dividir entre '3' su exponente y elevar a '3' su base y obtener una potencia con el mismo resultado que la anterior**.

Por tanto, podemos fundir estas dos propiedades.

Ejemplos: $2^6 = 8^2 = 4^3 = 64$; $3^6 = 27^2 = 9^3 = 729$; $4^6 = 64^2 = 16^3 = 4096$

► Todos los números enteros (positivos y negativos) pueden ser expresados como la suma de nueve cubos o menos. Hay muchos casos en que un número se obtiene con menos de 9 cubos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos: '23' = $2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$. Este número no se puede expresar con menos de 9 cubos.

'-23' = $(-2)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3$. Para expresar un número negativo basta con usar números negativos.

► "**La suma de 'n' números cúbicos sucesivos es igual al número triangular 'n' al cuadrado**". Vamos a comprobarlo:

Suma de números cúbicos sucesivos	Para 'n = …'	Números triangulares al cuadrado.	
1^3 = **1**	n = 1	Número triangular 'n=' = 1;	1^2 = **1**
$1^3 + 2^3$ = 1 + 8 = **9**	n = 2	Número triangular 'n=2' = 3;	3^2 = **9**
$1^3 + 2^3 + 3^3$ = 1 + 8 + 27 = **36**	n = 3	Número triangular 'n=3' = 6;	6^2 = **36**
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ = 1 + 8 + 27 + 64 = **100**	n = 4	Número triangular 'n=4' = 10;	10^2 = **100**
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = **225**	n = 5	Número triangular 'n=5' = 15;	15^2 = **225**
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$ = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = **441**	n = 6	Número triangular 'n=6' = 21;	21^2 = **441**
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$ = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 = **784**	n = 7	Número triangular 'n=7' = 28;	28^2 = **784**

► Una de las aplicaciones matemáticas más conocidas de los números cúbicos es el **CUBO DE RUBIK**, un rompecabezas entretenidísimo. Fue inventado en **1974** por **Erno Rubik**, un profesor de arquitectura húngaro y escultor. SE comenzó a comercializar en 1980, y fue designado "Juguete del año". Actualmente es ¡¡**el rompecabezas y el juguete más vendido del mundo**!!, casi nada. Las ventas oficiales superan los 400 millones de unidades, pero teniendo en cuenta las posibles ventas en bazares y otros tipos de tiendas de copias e imitaciones, las ventas podrían llegar a los 1.000 millones.

Está formado por 26 piezas cúbicas que giran en torno a otro cubo central. En total: $3^3 = 27$ cubos.

Se han inventado distintas versiones, como '**La venganza de Rubik**' (cubo de 4×4×4), '**El Cubo del Profesor**' (cubo de 5×5×5), el '**V-Cube 6**' (6×6×6), el '**V-Cube 7**' (7×7×7), y hasta de '2x2'.

Las variantes son tan grandes que surgen incluso "Cubos de Rubik" con forma de otros cuerpos geométricos.

La empresa Shengshou lanzó al mercado a principios de 2012 cubos de 8x8x8, 9x9x9 y 10x10x10. Pero siguieron surgiendo más versiones: 11x11x11 (Yuxin) y 13x13x13 (Moyu); o el 17x17x17 producida por el diseñador Oskar Van Deventer. Incluso se ha creado un 22x22x22.

Vamos a estudiar ahora otro tipo de números, que también forman una sucesión numérica, con relaciones geométricas:

TERNAS PITAGÓRICAS.

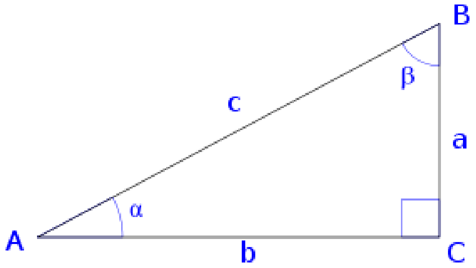
Las ternas pitagóricas se basan en el Teorema de Pitágoras. **Una terna pitagórica consiste en tres números enteros que cumplan el Teorema de Pitágoras**, es decir, **tres números enteros (en principio, positivos), que cumplan que el cuadrado del mayor sea igualar a la suma de los cuadrados de los otros dos números**.

Se expresa así:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Comprobación. Tomaremos 'a=3', 'b=4' y 'c=5'. Entonces tendremos: $3^2 + 4^2 = 5^2$ → 9 + 16 = 25 → 25 = 25.

Teorema de Pitágoras: "**En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**".



Los términos de una terna pitagórica se expresan con la nomenclatura (a, b, c).

LISTA DE TERNAS PITAGÓRICAS.

¿Sabías que se han encontrado ternas pitagóricas en Mesopotamia, en tablillas de arcilla, más de 2000 años antes que las divulgara Pitágoras?

Las ternas pitagóricas se dividen en dos grupos:

- **Ternas pitagóricas primitivas**: los tres números que la forman son **coprimos** (el único divisor en común es el '1').
- **Ternas pitagóricas no primitivas**: los tres números que la forman tienen algún divisor en común además del '1'. Se pueden realizar infinitas ternas pitagóricas no primitivas a partir de una primitiva, multiplicando sus tres términos por sucesivos números naturales.

Ejemplo: a partir de la terna (3, 4, 5), podemos crear infinitas ternas pitagóricas no primitivas multiplicando cada uno de sus términos por '2', '3', '4', '5'..., sucesivamente. Así tendríamos: (4, 6, 10), (6, 9, 12), (8, 12, 16), (10, 30, 40)...

A continuación presentamos una lista con las 50 primeras ternas pitagóricas primitivas:

(3,4,5)	**(5,12,13)**	**(7,24,25)**	**(8,15,17)**	**(9,40,41)**	**(11,60,61)**	**(12,35,37)**	**(13,84,85)**	**(15,112,113)**	**(16,63,65)**
(17,144,145)	**(19,180,181)**	**(20,21,29)**	**(20,99,101)**	**(21,220,221)**	**(23,264,265)**	**(24,143,145)**	**(25,312,313)**	**(27,364,365)**	**(28,45,53)**
(28,195,197)	**(29,420,421)**	**(31,480,481)**	**(32,255,257)**	**(33,56,65)**	**(33,544,545)**	**(35,612,613)**	**(36,77,85)**	**(36,323,325)**	**(37,684,685)**
(39,80,89)	**(39,760,761)**	**(40,399,401)**	**(41,840,841)**	**(43,924,925)**	**(44,117,125)**	**(44,483,485)**	**(48,55,73)**	**(48,575,577)**	**(51,140,149)**
(52,165,173)	**(52,675,677)**	**(56,783,785)**	**(57,176,185)**	**(60,91,109)**	**(60,221,229)**	**(60,899,901)**	**(65,72,97)**	**(68,285,293)**	**(69,260,269)**

Te dejamos un enlace en el que podrás consultar más ejemplos de ternas: https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitag%C3%B3rica

La terna más común y de la cual se generan otras muy usadas es: (3, 4, 5). 'Múltiplos' más usados: (6, 8, 10) y (60, 80, 100).

CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

► **Cualquier número entero puede pertenecer a una terna pitagórica, tanto positivo como negativo**, ya que el cuadrado de un número negativo siempre será positivo. De todas formas, dado que emanan del Teorema de Pitágoras, solo suelen usarse números enteros positivos para las ternas pitagóricas.

► **Hay números que se repiten en varias ternas**. Por ejemplo, '60' se repite en 3 ternas primitivas y en varias no primitivas.

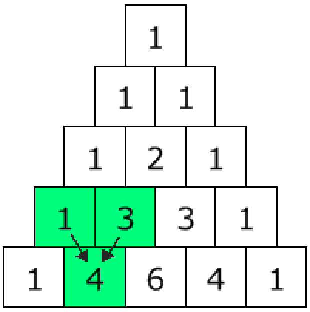
► **En las ternas hay números de todo tipo**: pares e impares, primos y compuestos... Si tenemos en cuenta las ternas primitivas y no primitivas, prácticamente cualquier número entero aparece en alguna terna pitagórica. Algunas excepciones son: 1, 2, 7, 11, y poco más. Para que un número no aparezca en ninguna terna, al menos tiene que ser primo.

► **Se pueden buscar ternas a partir de la Sucesión de Fibonacci**: **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...**

Para ello, realizamos el siguiente proceso (mostramos un ejemplo):

- Desechando los dos primeros (0 y 1), cogemos una cuaterna (sucesión de 4 números). → 2, 3, 4, 8.
- Multiplicamos los extremos (formarán el cateto menor) y el centro (cateto mayor. → 2x8 = 16; 3x4 = 12.
- Ya tenemos los catetos. La hipotenusa saldrá de la suma de sus cuadrados. → $12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$; $\sqrt{400} = 20$.
- Ya tenemos la hipotenusa. → La terna pitagórica es la siguiente: (12, 16, 20).

TRIÁNGULO DE PASCAL.

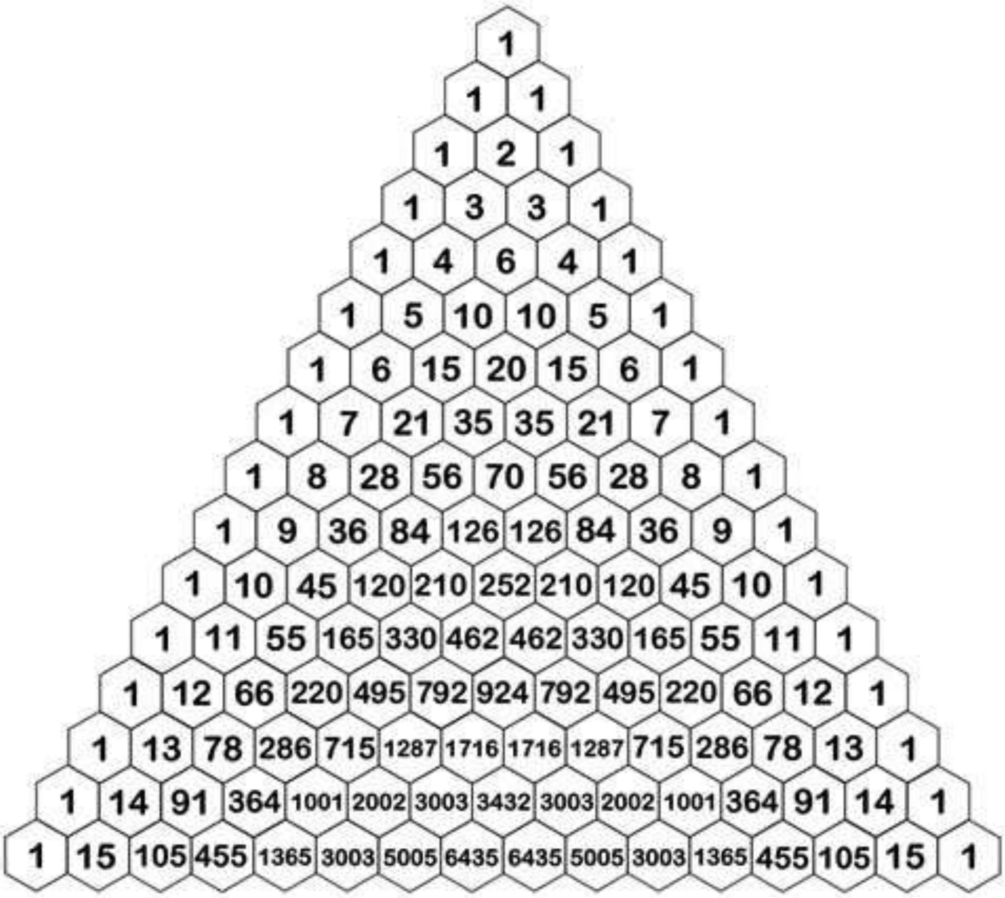


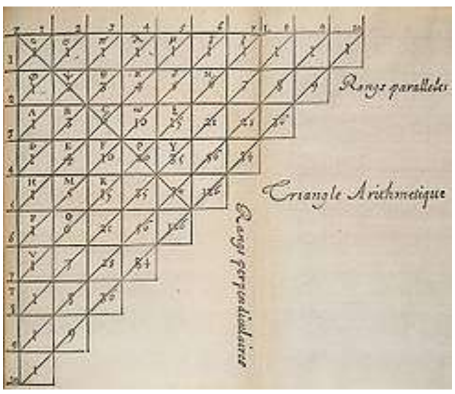
Podemos entender el llamado "Triángulo de Pascal" como una sucesión matemática ordenada de números naturales en forma de triángulo. La regla de la sucesión es que cada casilla es la suma de las dos casillas que tenga encima de ella. Para ello, hay que partir del '1' en la casilla superior.

Aunque esta sucesión es infinita, se puede representar con la dimensión que se quiera.

El Triángulo de Pascal recibe su nombre en honor al matemático francés Blaise Pascal, que fue quien lo popularizó y desarrolló ampliamente en su obra ***Traité du triangle arithmétique*** **(**1654), aunque ya era conocido por matemáticos indios, chinos, persas… También es conocido como '**Triángulo de Tartaglia'**, un matemático italiano que ya lo publicó un siglo antes.

Aquí te mostramos una imagen de un Triángulo de Pascal hasta la fila 15 (sin contar el '1' del comienzo).



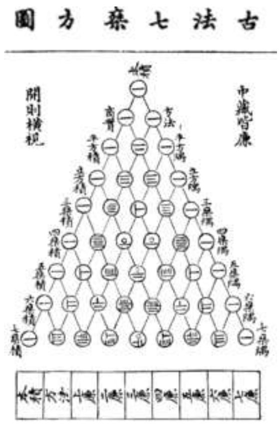


Triángulo de Pascal en el escrito original de Pascal.

Hay muchos antecesores del Triángulo de Pascal.

A la izquierda, el 'Triángulo de Pascal original', tal y como lo presentó él en su libro.

A la derecha, el 'Triángulo aritmético chino', que sigue la misma estructura que el Triángulo de Pascal. En China, la India y otras zonas de Asia, ya se conocía cientos de años antes.



CARACTERÍSTICAS Y CURIOSIDADES.

En el triángulo de Pascal podemos encontrar multitud de curiosidades y razones numéricas.

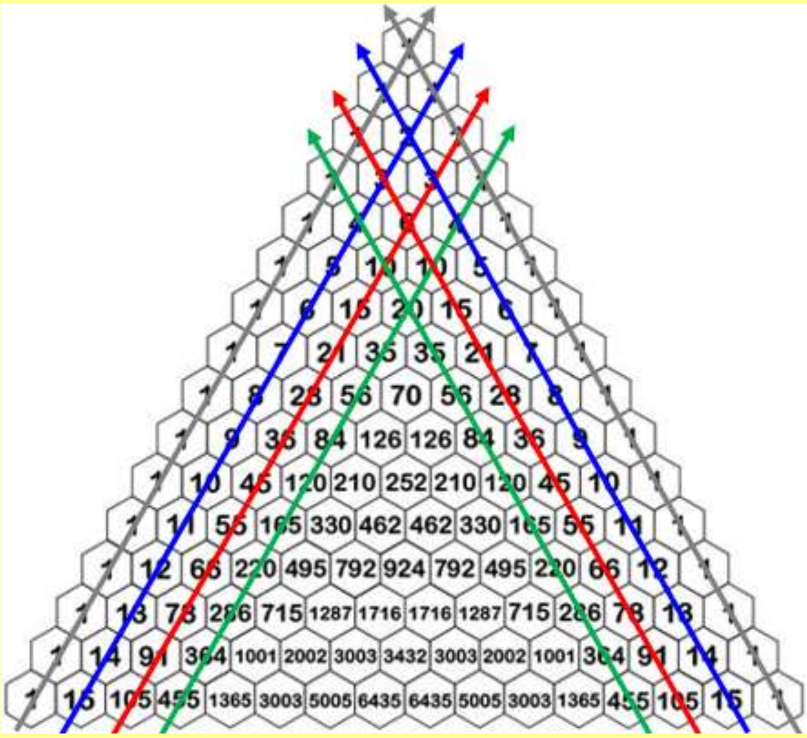
Es simétrico.

En sus diagonales, en ambos sentidos, se encuentran (además de los números ‘1’):

- Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 …

- Los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91 …

- Los números tetraédrigos o tetragonales: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165 …



Los números cuadrados:

Para ello, suma dos números triangulares consecutivos y obtendrás un número cuadrado (un cuadrado es la suma de dos triángulos rectángulos iguales):

$1+3 = 4 = 2^2$, $3 + 6 = 9 = 3^2$,

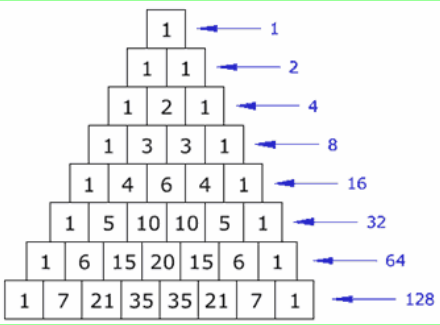
$6+10 = 16 = 4^2$, $10+15 = 25 = 5^2$,

$15+21 = 36 = 6^2$, $21+28 = 49 = 7^2$, …

Números primos

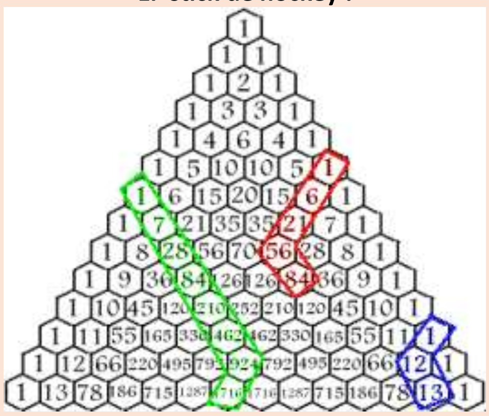
Si el primer elemento de una fila es un número primo, todos los números de esa fila serán divisibles por él (menos el 1, claro). Así, en la fila 7: (1 7 21 35 35 21 7 1), los números 7,21 y 35 son divisibles por 7.

Las potencias de ‘base 2’: **$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$, …**



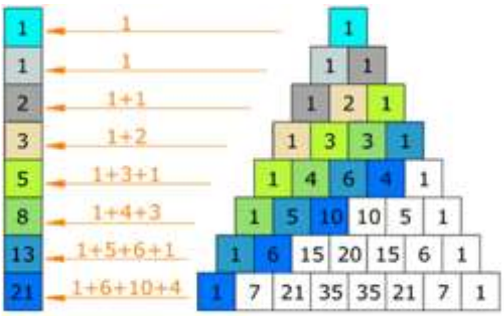
Si coloreas los números pares y los impares de distinto color obtendrás un ‘Triángulo de Sierpinski’ (es difícil de verlo, pero su patrón está ahí).

El ‘stick de hockey’.



Cualquier diagonal que empiece en un extremo del triángulo, y de la longitud que sea, cumple la siguiente propiedad: **La suma de todos los números que la integran se encuentran justo debajo del último de ellos, en la diagonal contraria.**

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI:



Es difícil encontrarla. Prueba este truco: empieza con un 1 de la izquierda, da un paso arriba y uno al lado, suma los cuadrados donde caigas (como en el dibujo)... las sumas que salen son la sucesión de Fibonacci.

Potencias de 11

Coge los números que hay en cada fila y úsalos como cifras para crear números. El número creado en cada fila es un ‘múltiplo de 11’.

$122=11^2$, $1331=11^3$, $14641=11^4$ …

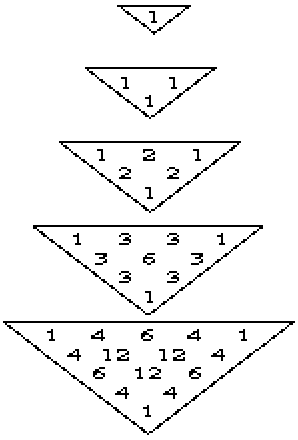
Hemos utilizado información e imágenes de algunas de estas páginas:

- http://www.estadisticaparatodos.es/taller/triangulo/triangulo.html
- https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Pascal
- http://www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html

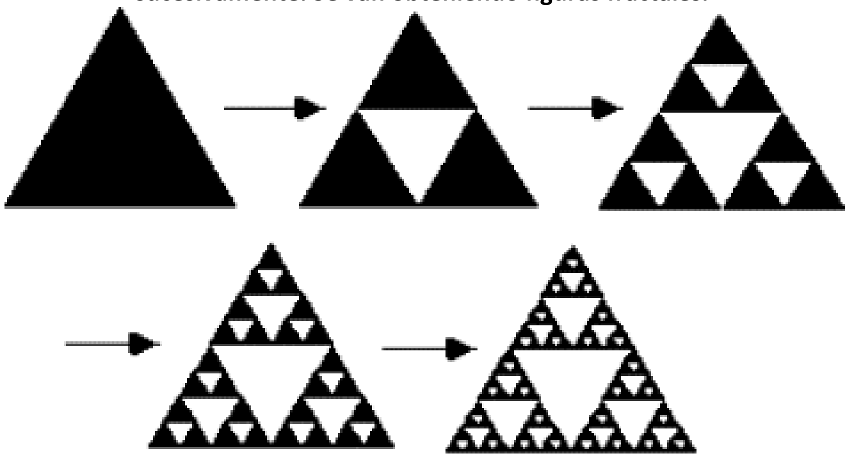
Podríamos incluir muchísimos aspectos más. Para no alargarnos más, vamos a nombrar algunos resumidamente.

OTROS CONTENIDOS RELACIONADOS:

Pirámide de Pascal (se muestran los triángulos, que superpuestos, dan lugar a la pirámide). Se trata de una extensión del Triángulo de Pascal a tres dimensiones.



Triángulo de Sierpinski. Normalmente se construye a partir de un triángulo equilátero. Consiste en dividir sus lados por la mitad y unirlos sucesivamente. Se van obteniendo figuras fractales.



Fuente: http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2016/07/16/141863

Triángulo de Floyd: Se trata de construir un triángulo rectángulo con números naturales sucesivos.

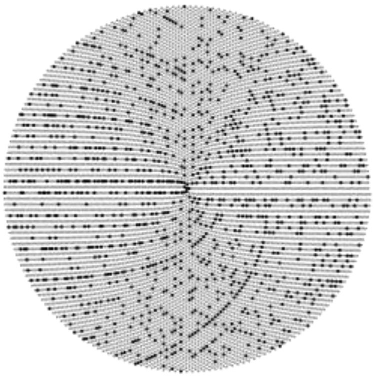
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21

Triángulo armónico de Leibniz. Se construye a partir del de Pascal, con una técnica similar a la suya, pero dividiendo.

1/1
1/2 1/2
1/3 1/6 1/3
1/4 1/12 1/12 1/ 4
1/5 1/20 1/30 1/20 1/5
1/6 1/30 1/60 1/60 1/30 1/6
... ...

http://fromdistantearth.blogspot.com.es/2009/09/un-mirada-al-triangulo-armonico-de.html

La espiral de Sacks muestra ciertos patrones que presentan los NÚMEROS PRIMOS.

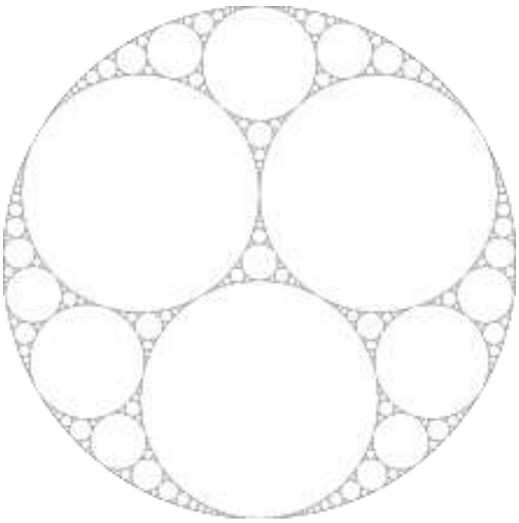


Espiral de Ulam. En ella se muestran todos los números naturales ordenados sucesivamente en una espiral, en la que se marcan los NÚMEROS PRIMOS.

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam

Tapiz de Apolonio.



Y mucho más ....

Autor: **Ángel L. Rodríguez Tamayo.**

CEIP Manuel Siurot (La Palma del Condado, Huelva).

Este material ha sido elaborado a través de un amplio trabajo de investigación y experimentación, tanto en el aula (en los cursos 15/16 y 16/17 principalmente, junto con el alumnado de 4º, 5º y 6º, y con la colaboración de otras maestras y maestros), como fuera de ella (búsqueda de información, indagación, creación, investigación…) El resultado ha sido un material bastante interesante que se comparte aquí para todo aquel que lo quiera usar, respetando los principios para los que han sido creados: niñas y niños, maestras y maestros, y cualquiera que lo quiera consultar y utilizar.

Consideramos que el conocimiento pertenece a la Humanidad, y a todo el Universo, siempre con respeto y coherencia.

NUESTRA PROPUESTA: 'LÓGICAS MATEMÁTICAS'.

Creamos materiales para una nueva propuesta matemáticas, basadas en los siguientes principios universales:

- **Coherencia**: hemos de ser coherentes y respetuosos con cada persona. Aquí te ofrecemos todo lo que sabemos y tenemos. Cada cual es libre de aprovecharlo o no.

- **Plenitud humana**: solo se nos ocurre una razón por las que usar y aprender matemáticas, para que te ayuden a evolucionar como persona. Son una herramienta que utilizas a cada momento, quieras o no. Cuanto mejor conozcas dicha herramienta, mejor podrás desenvolverte como persona, mayores y mejores serán tus capacidades. Las matemáticas, y el saber, te facilitan la vida.

- **Las matemáticas no existen por sí solas, son inherentes a la realidad, a la naturaleza y al Universo**: cuando utilizas y aprendes matemáticas, en realidad no estás ni usando ni aprendiendo matemáticas, estás usando y aprendiendo una parte de la realidad, que se visualizan en forma de matemáticas. No utilizar las matemáticas significaría no utilizar la realidad, no vivir en ella, y eso, si estás vivo, no es posible. Por tanto, quieras o no, las matemáticas están presentes en todas las actividades de tu vida diaria. Si desarrollas tus conocimientos matemáticos, desarrollas las habilidades para tu vida.

Propuesta para unas '**LÓGICAS MATEMÁTICAS**', basadas en la realidad, en la naturaleza, en la simplicidad, en la coherencia y en la practicidad. Matemáticas para el ser humano. Consideramos a las matemáticas como una herramienta para ayudar al ser humano a mostrarse en su grandiosidad y plenitud.

Anímate, **'las matemáticas son un juego'**,

aprende a **'ver las matemáticas desde el otro lado del espejo'**,

las matemáticas están para ayudarnos a conseguir lo que decidamos hacer, para hacernos la vida más fácil.

Nuestra web: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/21003232/helvia/sitio/index.cgi

Sección de matemáticas (tiene varios apartados, destacamos el principal):
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/21003232/helvia/sitio/index.cgi?wid_seccion=16