Observaciones:

1) Los ejercicios resueltos te los tienes que aprender muy bien, porque los de los exámenes serán parecidos
2) Los ejercicios que tu hagas, en casa y en los exámenes, tienen que seguir los mismos pasos que los que están resueltos, con sus definiciones, sus dibujos, sus fórmulas, sus unidades, sus comprobaciones, …..
3) Los ejercicios no se acaban hasta que contestes lo que pregunto
4) SIEMPRE habrá preguntas de teoría que si están bien valen cero puntos y en caso contrario te quitaré puntos (cada vez mas)

TEORÍA:

Te tienes que saber esto y no lo del libro (esta sería una pregunta de lo que he dicho antes en el apartado 4)

Pregunta nº 3 del libro de texto, página 74: razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

"En una circunferencia de radio r y centro el origen de coordenadas, dibujo un ángulo de medida α y el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia en un punto P de coordenadas (a,b). Se definen las razones trigonométricas del ángulo de medida α como:

$$sen(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto\ \ P}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{b}{r}$$

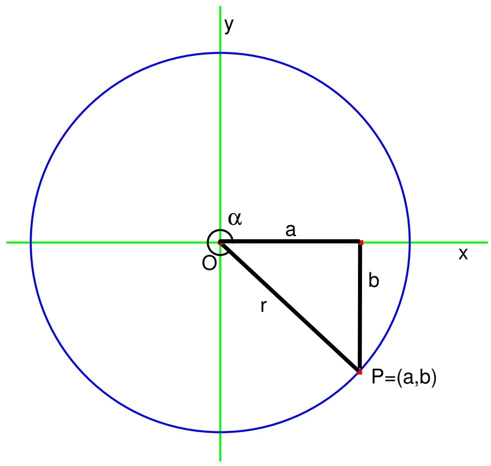
$$\cos(\alpha)=\frac{abscisa\ del\ punto\ \ P}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{a}{r}$$

$$tg(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto\ \ P}{abscisa\ del\ punto\ \ P}=\frac{b}{a}\ ;$$

$$\cos ec(\alpha)=\frac{radio\ de\ la\ circunferencia}{ordenada\ del\ punto\ \ P}=\frac{r}{b}$$

$$\sec(\alpha)=\frac{radio\ de\ la\ circunferencia}{abscisa\ del\ punto\ \ P}=\frac{r}{a}$$

$$\cot g(\alpha)=\frac{abscisa\ del\ punto\ \ P}{ordenada\ del\ punto\ \ P}=\frac{a}{b}$$



I) REPASO DE 4º de ESO:

1.- Pasar de grados a radianes y de radianes a grados, con y sin calculadora.

L a relación fundamental es **180º = π rad = 3,1415 ...... rad**

- Comprueba los siguientes resultados con la calculadora:

234º 54'23'' = **4,1 rad** ; 3,5 rad = **200º32'7''** ; **0,45 rad = 25º46'59'' ; 105º = 1,8326 rad**

- Comprueba los siguientes resultados sin la calculadora:

$$45^o = \frac{\pi}{2} rad \;;\; \frac{3\pi}{4} rad = 135^o \;;\; \frac{7\pi}{5} rad = 840^o \;;\; 660^o = \frac{11\pi}{3} rad \;;\; -60^o = \frac{-\pi}{3} rad \;;$$

2.- Definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo de un triángulo rectángulo (pregunta nº 2 del libro de texto, página 73).

Éstas fórmulas, el teorema de Pitágoras y que los dos ángulos pequeños suman 90º nos van a permitir resolver triángulos rectángulos y polígonos regulares.

a) En un triángulo rectángulo utilizamos la teoría:

1º) Los dos ángulos pequeños suman 90º
2º) El teorema de Pitágoras.
3º) Las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo. **(Pregunta Nº 2) Utiliza la fórmula que sólo tenga una incógnita**.

b) **En un polígono regular de n lados:** se descompone en "n" triángulos isósceles. Dibuja, en un arco de circunferencia, dos de ellos contiguos. Señala: el ángulo central O; la medida del radio de la circunferencia circunscrita r, la medida del lado del polígono x; la medida de la apotema a; los vértices del polígono A,B,C,... **Resuelve uno de los triángulos rectángulos que se forman.**

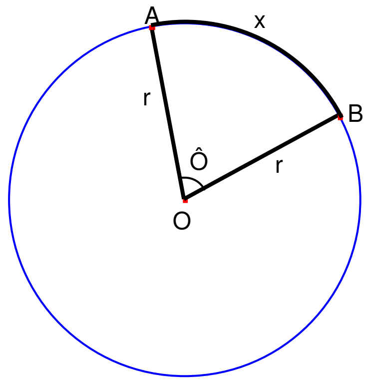
c) **Si no hay un triángulo rectángulo**

- ✓ Dibujo una altura y tengo dos triángulos rectángulos.
- ✓ Aplico la definición de la tangente a cada uno de los ángulos opuestos a la altura.
- ✓ Formo un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, y lo resuelvo.

3.- Fórmulas para los sectores y segmentos circulares y para los polígonos regulares.

A) La figura sombreada se llama **sector circular**

Las variables que aparecen son:

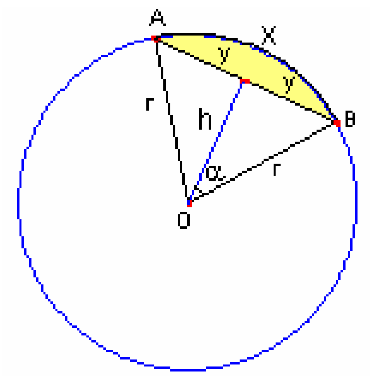


- $\hat{O}$: ángulo central del sector circular, medido en grados
- **r**: radio de la circunferencia
- **x**: longitud del arco del sector circular $\rightarrow x = \dfrac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\hat{O}}{360^o}$
- $\text{Área del sector circular} = \dfrac{\pi\cdot r^2\cdot\hat{O}}{360^o}$

NOTA: de las cuatro anteriores, te doy dos.

B) La figura sombreada se llama **segmento circular**

Las variables que aparecen son:



- $\hat{O} = 2\alpha$: ángulo central del segmento circular, medido en grados
- **r**: radio de la circunferencia
- **x**: longitud del arco del sector circular $\rightarrow x = \dfrac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\hat{O}}{360^o}$
- **2y** : medida del segmento PQ (se llama cuerda)
- **h**: altura del triángulo isósceles

Fórmulas:

Razones trigonométricas en uno de los dos triángulos rectángulos

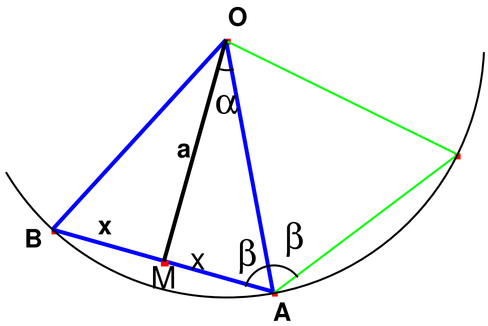
$sen\alpha = \dfrac{y}{r}$; $\cos\alpha = \dfrac{h}{r}$; $tg\alpha = \dfrac{y}{h}$ Teorema de Pitágoras: $r^2 = y^2 + h^2$

Área del segmento circular = Área del sector circular – Área del triángulo

C) Polígono regular de n lados:

Uniendo el centro del polígono con cada vértice, tenemos n triángulos isósceles, como los del dibujo.

- **n:** número de lados y números de vértices
- **2x:** medida de cada lado del polígono
- **r:** radio de la circunferencia circunscrita
- **a:** apotema (radio de la circunferencia inscrita)



Fórmulas:

Ángulo central: $\hat{O} = \dfrac{360^\circ}{n} = 2\alpha \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

El polígono tiene **n** ángulo iguales, y la medida de cada uno se calcula con la fórmula $\hat{A} = 2\beta$

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo OMA

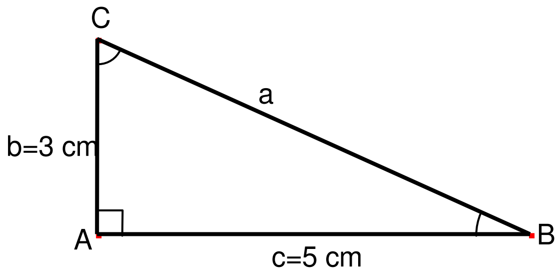
Teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + a^2$ $sen\alpha = \dfrac{x}{r}$; $\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$; $tg\alpha = \dfrac{x}{a}$

$$\acute{A}rea\ del\ pol\acute{i}gono\ regular = \frac{Per\acute{i}metro \cdot apotema}{2} = \frac{n \cdot 2x \cdot a}{2}$$

Ejercicios resueltos:

NOTA: Cuando tienes un triángulo y no es rectángulo, dibuja una altura y tienes dos triángulos rectángulos:

1. Calcula la medida de la hipotenusa y de los ángulos del triángulo cuyos catetos miden b= 3 cm y c=5 cm. Calcula su área.



$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 25 = 34 \rightarrow a = +\sqrt{34} \approx 5{,}83\ cm$$

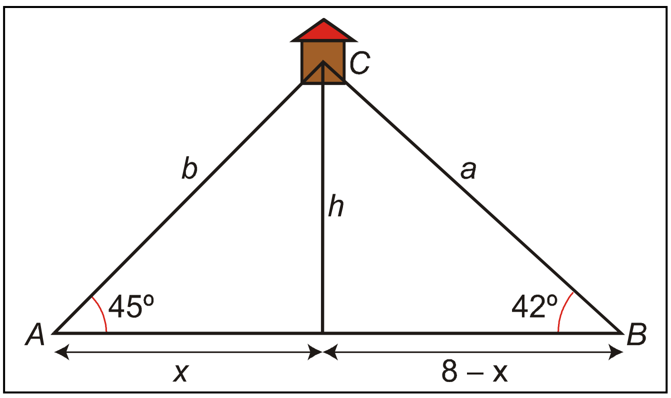
$$\mathrm{tg}(B) = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ contiguo} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5};$$

$$B = arc\ \mathrm{tg}\left(\frac{3}{5}\right) = 30^\circ 57'50''; \quad C = 90^\circ - B = 59^\circ 2'10''$$

$$\acute{A}rea = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ cm^2$$

Solución: hipotenusa: a=5,83 cm ; B=59º2'10'' ; C=59º2'10'' ; Área=7,5 cm^2

2.- Desde A y B hay dos caminos hasta la casa, como se ve en la figura. Calcula la medida de ambos caminos. ¿Cuál es mas corto?.



Trazando la altura desde la casa al lado AB, conseguimos dos triángulos rectángulos: CHA y CHB.

Del dibujo deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} tg(45^\circ) = \dfrac{h}{x};\ h = x \cdot tg(45^\circ) = x \\ tg(42^\circ) = \dfrac{h}{8-x};\ h = 8 \cdot tg(42^\circ) - x \cdot tg(42^\circ) \end{array}\right\}$$

$x = 8 \cdot tg(42^\circ) - x \cdot yg(42^\circ);\ x = 7{,}203232354 - x \cdot 0{,}9004040443;$
$1{,}9004040443 \cdot x = 7{,}203232354;\ x = 3{,}79\ cm \Rightarrow h = 3{,}79\ cm$

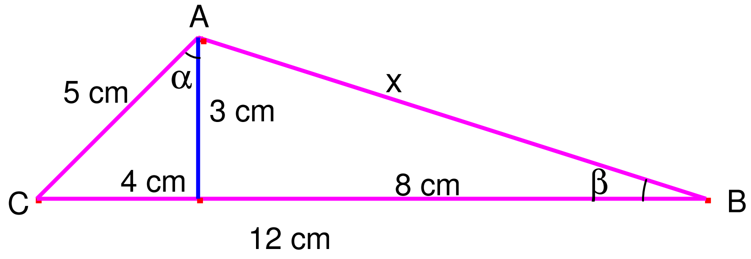
De este modo hemos calculado el valor de los catetos en ambos triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la hipotenusa en cada caso:

$a^2 = h^2 + (8-x)^2 = 32{,}087;\ a = +5{,}664\ km$; $b^2 = h^2 + x^2 = 28{,}8041;\ b = +5{,}367\ km$

Solución: El camino de A a la casa mide b=5,367 km. y desde B a la casa mide a=5,664 km. **Es más corto desde A.**

NOTA: Esto se podía saber sin calcular a y b, porque el ángulo opuesto al lado **"b"** mide B=42º y es menor que el ángulo opuesto al lado **"a"**, B=45º.

3.- SIN CALCULADORA, dado el triángulo del dibujo, calcula x, su área, sen(α) y tg(β).



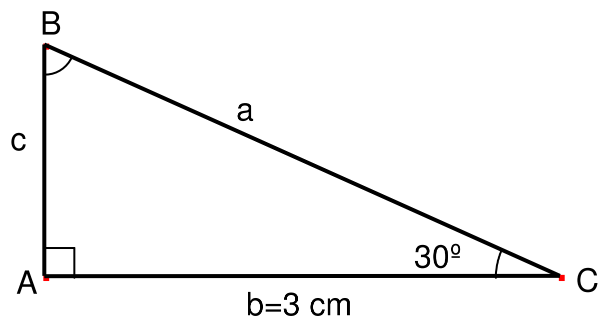
$$5^2 = 3^2 + y^2 \rightarrow y = +4\ cm;$$
$$z = 12 - y = 8\ cm;$$
$$x^2 = 9 + 64 = 73; \quad x = +\sqrt{73}\ cm$$
$$Área = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \quad cm^2$$

$$sen(\alpha) = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ hipotenusa} = \frac{4}{5} \quad ; \quad tg(\beta) = \frac{medida\ cateto\ opuesto}{medida\ cateto\ contiguo} = \frac{3}{8}$$

Solución: $x = \sqrt{73}\ cm;$ **; Área=18 cm^2 ;** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{8}$

4.- SIN CALCULADORA, resuelve el triángulo ABC y calcula su área sabiendo que C=30º y el cateto b mide 3 cm.

B+C=90º; B=90º-30º = 60º



$$\operatorname{sen} 60^{\circ} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{a};$$
$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b}; \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{c}{3}; c = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ cm$$

$$Área = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

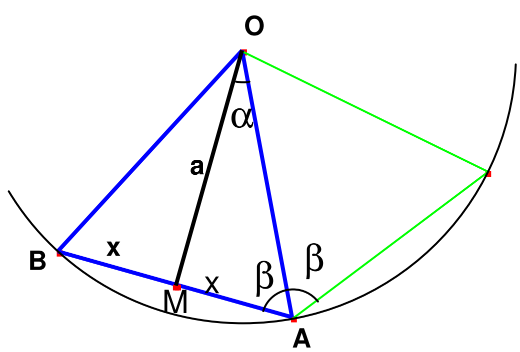
Solución: hipotenusa: $a = 2\sqrt{3}\ cm$; cateto $c = \sqrt{3}\ cm$ **; B=60º ;** $Área = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

5.- Calcula el área del pentágono regular de lado 6 cm. y la medida de cada uno de los ángulos, del radio de la circunferencia inscrita y del radio de la circunferencia circunscrita

Hay cinco triángulos como los dibujados.

lado = 2x= 16 cm (→ x= 8 cm) ; radio circunferencia circunscrita= r ; apotema = a

Ángulo central: $\hat{O} = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}; \alpha = \frac{\hat{O}}{2} = 36^{\circ}$



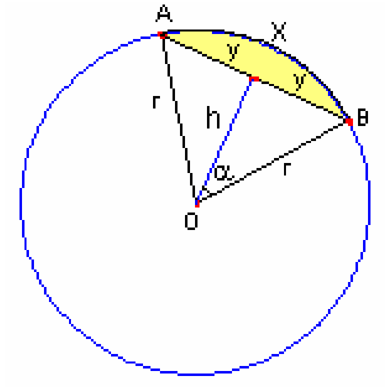
Razones trigonométricas de α=36º

$$r^2 = a^2 + 8^2 \quad Teorema\ \ Pitágoras$$
$$sen36^{\circ} = \frac{x}{r} = \frac{8}{r}; \quad r = \frac{8}{sen36^{\circ}} = 13{,}61\ cm$$
$$tg36^{\circ} = \frac{8}{a}; \quad a = \frac{8}{tg36^{\circ}} = 11{,}01\ cm$$
$$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 54^{\circ}$$

Soluciones: apotema: a= 11,01 cm; radio de la circunferencia circunscrita: r= 13,61 cm

$Área\ Pentágono = 5\frac{2x \cdot a}{2} = 440{,}4\ cm^2$; Ángulos del polígono = A=B =2β=108º

6.- La cuerda de un segmento circular mide 12 cm; si el radio de la circunferencia es 9 cm, calcula el ángulo central y el área del segmento circular.



Lo primero es dibujarlo y poner los datos
Longitud de la cuerda: 2y = 12 cm F y=6 cm
radio: r=9 cm

$$sen\alpha = \frac{y}{r} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arc\ sen\left(\frac{2}{3}\right) = 41º48'37''$$

Ángulo central del segmento circular: $\hat{O} = 2\alpha = 83º37'14''$

$$\cos\alpha = \frac{h}{r};\ \cos(48º35'25'') = \frac{h}{9} = 0{,}7454;\ h = 6{,}71\ cm$$

Altura del triángulo isósceles: **h=6,71 cm**

Área del segmento circular = Área del sector circular – Área del triángulo =

$$= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{O}}{360º} - \frac{2y \cdot h}{2} = 59{,}11 - 40{,}26 = 18{,}85\ cm^2$$

Soluciones:

Ángulo central del segmento circular: $\hat{O} = 83º37'14''$
Área del segmento circular = 18,85 cm²

Resuelve:

1. La altura de un triángulo equilátero mide 15 cm.; calcula la medida de cada lado y su área, sin utilizar calculadora

2. En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos iguales mide 40º y el lado desigual mide 8 cm. Calcula la medida de sus lados y sus ángulos y su área.

3. La apotema de un polígono regular de 16 lados mide 20 cm.; calcula su área y la medida de cada uno de los ángulos, de cada uno de los lados, del radio de la circunferencia inscrita y del radio de la circunferencia circunscrita

4. En una circunferencia de radio 25 cm. tenemos un segmento circular cuya cuerda mide 28 cm.; calcula su área

NOTA: estos ejercicios hay que hacerlos como los que están resueltos; con sus definiciones, sus dibujos, sus fórmulas, sus unidades,…..

II) TRIGONOMETRÍA DE 1º de BACHILLERATO:

A) Dada una razón trigonométrica, calcular las demás.

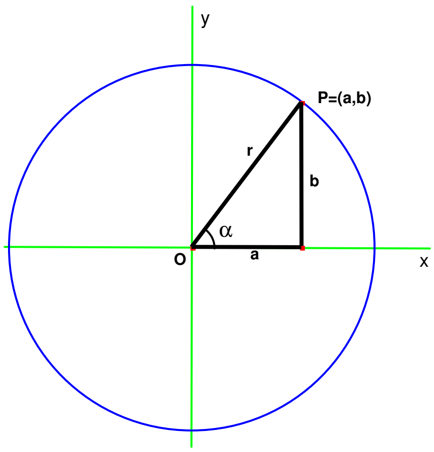
Observaciones:

- ✓ **Si te doy cosecante, secante o cotangente, lo primero es calcular seno, coseno o tangente**
- ✓ **Cuando no se conoce el valor del ángulo y te doy el valor de una razón trigonométrica y el cuadrante del ángulo, lo primero es comprobar si los datos son correctos. (El número y el signo)**
- ✓ **Cuando no se conoce el valor del ángulo y te doy el valor de una razón trigonométrica y no te doy el cuadrante, lo primero es comprobar si el número es correcto y calculas los posibles cuadrantes en que pude estar el ángulo. SIEMPRE SERÁN DOS y el tienes que dar las soluciones de los dos casos. (Ejemplo 3)**
- ✓ **Si te conoces una de las seis razones trigonométricas, hay dos métodos para resolverlo**
- ✓ **Si te doy una suma de razones trigonométricas (seno y coseno), sólo vale el Método II**

Método I: definiciones de la pregunta nº3, con su gráfico siempre

Ej-1: Si α es un ángulo del II cuadrante y $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5}$**, sin calcular α, calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α.**

1º) **Comprobar que los datos son correctos, porque no conozco el valor del ángulo α:**
Si porque en el II cuadrante sen(α) es positivo y
$-1\le \operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5}\le 1$



2º) **Aplicamos la teoría de la pregunta nº 3. (Método I)**
Por este método es imprescindible el dibujo adjunto
Como el ángulo es del II cuadrante a<0 ; b >0 ; r>0.

$$sen(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{b}{r}=\frac{3}{5}=\frac{-3}{-5}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=3>0; r=5>0 \quad correcto \\ b=-3<0; r=-5<0 \quad incorrecto \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2+b^2=r^2; a^2=16 \\ x=\pm\sqrt{16}=-4 \quad (a<0) \end{matrix}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{abscisa}{radio}=\frac{a}{r}=\frac{-4}{5}\ ;\ \operatorname{tg}(\alpha)=\frac{ordenada}{abscisa}=\frac{y}{x}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

Solución: $sen(\alpha)=\frac{3}{5}; \cos ec(\alpha)=\frac{5}{3}$; $\cos(\alpha)=-\frac{4}{5}; \sec(\alpha)=-\frac{5}{4};$; $tg(\alpha)=-\frac{3}{4}; \cot g(\alpha)=-\frac{4}{3}$

Ej-2: Si α es un ángulo del III cuadrante y $\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{4}{3}$**, sin calcular α, calcula cos(α) y sen(α).**

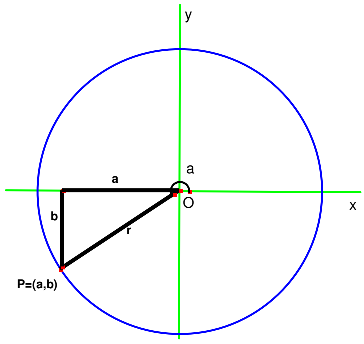
1º) **Comprobar que los datos son correctos:**
Si porque en el II cuadrante sen(α)>0 y –1≤sen(α)≤1

2º) **Aplicamos la ecuación fundamental de la trigonometría. Método I)**
Como el ángulo es del segundo cuadrante a < 0 ; b < 0 ; r >0

$$tg(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto}{abscisa\ del\ punto}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}=\frac{-4}{-3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} b=4>0;\ a=3>0 \quad incorrecto \\ b=-4<0;\ a=-3<0 \quad correcto \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r^2=a^2+b^2=16+9=25; \\ r=\pm\sqrt{25}=+5 \quad (r>0) \end{matrix}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{abscisa}{radio}=\frac{a}{r}=\frac{-4}{5}\ ;\ sen(\alpha)=\frac{ordenada}{radio}=\frac{b}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$$



Solución: $sen(\alpha)=-\frac{4}{5}; \cos ec(\alpha)=-\frac{5}{4}$; $\cos(\alpha)=-\frac{4}{5}; \sec(\alpha)=-\frac{5}{4};$; $tg(\alpha)=\frac{3}{4}; \cot g(\alpha)=\frac{4}{3}$

MÉTODO II: con la ecuación fundamental de la trigonometría

- ✓ **Se plantea un sistema de dos ecuaciones (la ecuación fundamental de la trigonometría y la que te da el enunciado) y dos incógnitas (sen α y cosα).**
- ✓ **El sistema de ecuaciones tiene dos incógnitas, y no se acaba hasta que has calculado las dos (sen α y cos α)**

Repetimos los dos ejercicios anteriores; en los exámenes tú elegirás el que quieras de los dos

Ej.:1: Si α es un ángulo del II cuadrante y $\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5}$, sin calcular α, calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α.

1º) **Comprobar que los datos son correctos, porque no conozco el valor del ángulo α:**

Si porque en el II cuadrante sen(α) es positivo y $-1 \le \operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5} \le 1$

2º) **Aplicamos la ecuación fundamental de la trigonometría. (Método II)**

Como el ángulo es del segundo cuadrante sen(α) > 0 ; cos(α) < 0 ; tg(α) < 0

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \textit{.SUSTITUYENDO} \Rightarrow \frac{9}{25}+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow 9+25\cos^2\alpha=25;\ 25\cos^2\alpha=16$$

$$\cos^2\alpha=\frac{16}{25};\ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\left\{\begin{array}{l}\textit{La solución es}\\ \textit{la negativa}\end{array}\right\}=-\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{5}:\frac{-4}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{-5}{4}=-\frac{3}{4}$$

La solución es la negativa porque el ángulo es del II cuadrante.

Solución: $sen(\alpha)=\frac{3}{5};\ \cos ec(\alpha)=\frac{5}{3}$; $\cos(\alpha)=-\frac{4}{5};\ \sec(\alpha)=-\frac{5}{4};$; $tg(\alpha)=-\frac{3}{4};\ \cot g(\alpha)=-\frac{4}{3}$

Ej-2: Si α es un ángulo del III cuadrante y $\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{4}{3}$, sin calcular α, calcula sen(α) y cos(α).

1º) **Comprobar que los datos son correctos:**

Si porque en el III cuadrante tg(α)>0 y tg(α) es un número cualquiera.

2º) **Como el ángulo es del tercer cuadrante senα <0 ; cosα <0 ; tgα>0.**

$$\left.\begin{array}{l}sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ 3sen\alpha=4\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}sen\alpha=\frac{4\cos\alpha}{3}\\ \frac{16\cos^2\alpha}{9}+\cos^2\alpha=1\end{array}\right. \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}\quad \begin{array}{c}\textit{Teoría}:\\ \cos(\alpha)<0\end{array}$$

$$sen(\alpha)=\frac{4}{3}\cdot\frac{-3}{5}=-\frac{4}{5}$$

Solución: $\operatorname{sen}(\alpha)=-\frac{4}{5}$; $\cos ec(\alpha)=-\frac{5}{4}$; $\cos(\alpha)=-\frac{3}{5}$; $\sec(\alpha)=-\frac{5}{3}$; $\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{4}{3}$; $\cot g(\alpha)=\frac{3}{4}$

NOTA: A partir de aquí, lo primero es elegir el método

Ej-3: SIN CALCULADORA, si sec(α)=4, calcula sen(α), cos(α) y tg(α).

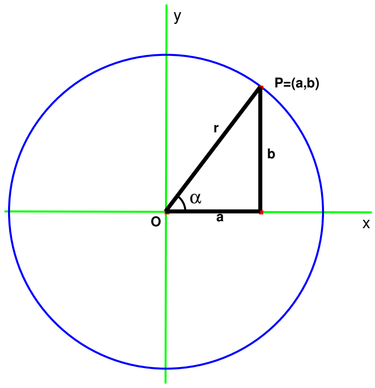
Voy a hacerlo por el Método I; lo primero es calcular el coseno: $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{4}$

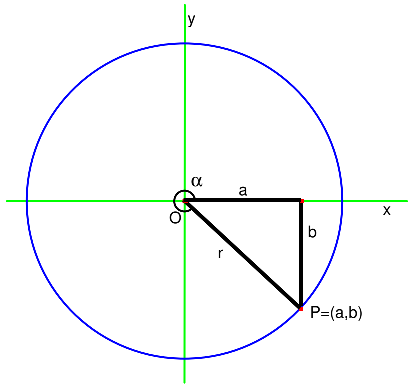
1º) **Comprobar si el número es correcto:**

Si porque -1≤cos(α)≤1

2º) **No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo;** tienes que averiguarlo **El ángulo α puede ser de los cuadrantes I ó IV (el coseno es positivo).**

En ambos cuadrantes a>0 ; r>0. En el I cuadrante b>0 y en el IV cuadrante b<0 (sin los gráficos esto no vale)





$$\cos(\alpha)=\frac{abscisa\ del\ punto\ P}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{a}{r}=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=1>0\\ r=4>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2=a^2+b^2;\quad 16=1+b^2;\quad b^2=15; b=\pm\sqrt{15}\Rightarrow\begin{cases}b=+\sqrt{15}\quad si\quad \alpha\quad es\ del\ I\quad cuadrante\\ b=-\sqrt{15}\quad si\quad \alpha\quad es\ del\ IV\quad cuadrante\end{cases}$$

Soluciones:

Fórmulas	α es del I cuadrante	α es del IV cuadrante
$sen(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto\ \ P}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{b}{r}$	$sen(\alpha)=\frac{\sqrt{15}}{4}$	$sen(\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$
$\cos(\alpha)=\frac{abscisa\ del\ punto\ \ P}{radio\ de\ la\ circunferencia}=\frac{a}{r}$	$\cos(\alpha)=\frac{1}{4}$	$\cos(\alpha)=\frac{1}{4}$
$tg(\alpha)=\frac{ordenada\ del\ punto\ \ P}{abscisa\ del\ punto\ \ P}=\frac{b}{a}$	$tg(\alpha)=\frac{\sqrt{15}}{1}=\sqrt{15}$	$tg(\alpha)=-\frac{\sqrt{15}}{1}=-\sqrt{15}$

Ej-4: Si $13\,\mathrm{sen}\,\alpha+13\cos\alpha=7$ **, calcula sen(α) y cos(α) y el cuadrante de α.**

Como no conocemos ni seno, ni coseno, ni tangente de α, (te doy una suma de razones trigonométricas), sólo se puede hacer por el Método II.
No puedo comprobar si los datos son correctos porque no nos dan una razón trigonométrica, sino una suma. Como seno y coseno pueden valer de –1 a 1, haciendo las operaciones puede dar 7. (NO PODRÍA DAR 80, ¿por qué?).
NOTA: hay que comprobar los datos cuando conozcas senα y cos α (las dos), y como no te doy el cuadrante, tienes que calcularlo

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ 13\,\mathrm{sen}\,\alpha+13\cos\alpha=7\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\mathrm{sen}(\alpha)=\frac{7-13\cos\alpha}{13}\Rightarrow .SUSTITUYENDO\\ \frac{49-182\cos\alpha+169\cos^2\alpha}{169}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 49-182\cos\alpha+169\cos^2\alpha+169\cos^2\alpha=169;\end{array}$$

$$338\cos^2\alpha-182\cos\alpha-120=0; 169\cos^2\alpha-91\cos\alpha-60=0; \cos\alpha=\frac{91\pm\sqrt{48841}}{338}=\frac{91\pm 221}{338}$$

Solución: a) $\cos\alpha=\frac{91+221}{338}=\frac{312}{338}=\frac{12}{13}\Rightarrow \mathrm{sen}\,\alpha=\frac{7-12}{13}=\frac{-5}{13}\Rightarrow$

α es del cuadrante IV (seno negativo y coseno positivo)
Los datos son correctos porque sen α y cos α están entre –1 y 1.

b) $\cos\alpha=\frac{91-221}{338}=\frac{-130}{338}=\frac{-5}{13}\Rightarrow sen\alpha=\frac{7+5}{13}=\frac{12}{13}\Rightarrow$

α es del cuadrante II (seno positivo y coseno negativo)
Los datos son correctos porque sen α y cos α están entre –1 y 1.

Ejercicios propuestos:

1. SIN CALCULADORA, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, calcula las demás razones trigonométricas de α

2. SIN CALCULADORA, si $tg\alpha=\frac{12}{5}$ y α es un ángulo del III cuadrante, calcula sen α y cos α

3. SIN CALCULAR el ángulo α y trabajando con fracciones, calcula seno, coseno y tangente del ángulo α y su cuadrante, sabiendo que $4sen(\alpha)+7\cos(\alpha)=-4$

NOTA: estos ejercicios hay que hacerlos como los que están resueltos; indicando el método que aplicas, sus dibujos, sus fórmulas,…..

B) Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y otro del primer cuadrante. (Pregunta nº 4)

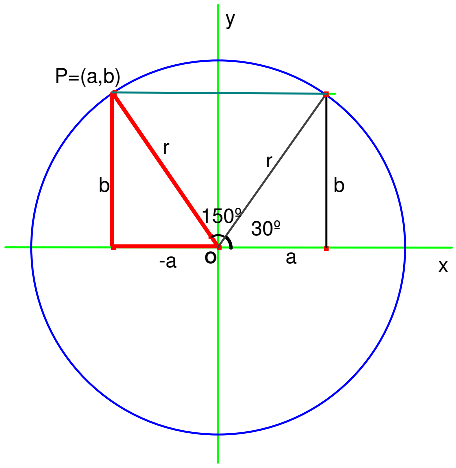
1º) Si el ángulo tiene vueltas, se le quitan y la razón trigonométrica no varía.
2º) Si es negativo, se convierte en positivo con la fórmula: **-α = 360º - α**
3º) Se averigua el cuadrante del ángulo y el signo de la razón trigonométrica en dicho cuadrante.

Ejercicios resueltos:

1.- Sin calculadora, calcula sen(-7410º)

Método 1: con las fórmulas de la página 76 (es el mejor)
sen (- 7410º)= sen(-210º-360º.20)=sen(-210º)=sen(150º)=sen(180º- 30º)={*}= + sen(30º)=+0,5
{*}Fórmula de la página 76: sen(180º-α) = + sen α (y en este ejemplo α=30º)

Método 2: Utilizando los gráficos de la página 76 (ver dibujo)
sen (- 7410º)= sen(-210º-360º.20)=sen(-210º)=
=sen(150º)=$\frac{b}{r}=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}$; $sen30^{o}=\frac{b}{r}=\frac{b}{1}=b=\frac{1}{2}$
(con la tabla)



2.- Sin calculadora, calcula tg(1020º) y cos(-480º)

Soluciones: tg (1020º)=$-\sqrt{3}$ **; cos (-480º)= - 0,5**

3.- Sin calculadora, calcula sen(300º); cosec (-120º) y cos(-240º)

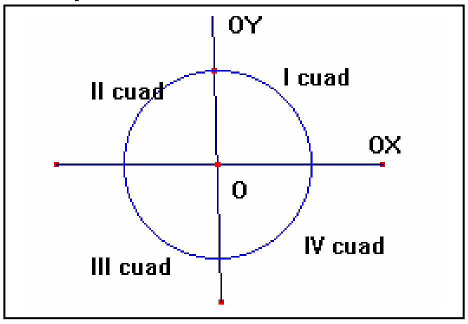
NOTA: estos ejercicios hay que hacerlos como los que están resueltos; indicando el método que aplicas, sus dibujos, sus fórmulas, …..

III) Ecuaciones trigonométricas (pregunta nº9)

Consiste en calcular todos los valores de la incógnita.
En cada ejercicio hay que saber quién es el ángulo y quién la incógnita
Necesito una razón trigonométrica del ángulo y su cuadrante.

a) Comprueba si los datos son correctos.

- **Comprueba si el número es correcto (senα tiene que estar entre -1 y 1, ………)**
- **Comprueba si el signo del número (+ ó -) es correcto, sabiendo que:**
  - ✓ **En el I cuadrante senα >0 ; cosα>0 y tgα>0**
  - ✓ **En el II cuadrante senα >0 ; cosα<0 y tgα<0**
  - ✓ **En el III cuadrante senα <0 ; cosα<0 y tgα>0**
  - ✓ **En el IV cuadrante senα <0 ; cosα>0 y tgα<0**



b) Calcula el ángulo auxiliar w del primer cuadrante.
(Si nos dan cosα = n → cosw=│cosα│ = │n│)

c) Con el ángulo w calcula el ángulo α sabiendo:

- ❖ **Si α ∈ I cuadrante → α = w + 360ºK**
- ❖ **Si α ∈ II cuadrante → α =180º - w + 360ºK**
- ❖ **Si α ∈ III cuadrante → α = 180º + w + 360ºK**
- ❖ **Si α ∈ IV cuadrante → α = 360º - w + 360ºK**

Ejercicios resueltos:

Ej-7: Si sen(α) = 0,45 y α es un ángulo del II cuadrante, calcula todos los valores de α.

Ángulo: α ; incógnita:α

1º) Comprobar si el número es correcto : Si porque –1≤sen(α)=0,45 ≤1
2º) Comprobar si el signo es correcto: Sí porque en el II cuadrante sen(α) es positivo
3º) Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante y tal que sen(w)=│sen(α)│=0,45
w = arc sen(0,45) = 26º44'37" → α = 180º - w + 360º.k = 153º15'23" + 360º.k ; ∀ k ∈ Z
Soluciones: α = 153º15'23" + 360º.k ; ∀ k ∈ Z

Ej-8: Si tg(α) = -3, calcula todos los valores de α.

1º) Comprobar si el número es correcto: Si porque la tangente puede valer cualquier número real.
2º) No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo; tienes que averiguarlo El ángulo α puede ser de los cuadrantes II o IV
3º) Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante y tal que tg(w)=│tg(α)│=3

w = arc tg(3) =71º33'54" $\begin{cases} si\ \alpha \in II\ cuadrante \to \alpha = 180º - w + 360º \cdot k = 108º26'6'' + 360º \cdot k \\ si\ \alpha \in IV\ cuadrante \to \alpha = 360º - w + 360º \cdot k = 288º26'6'' + 360º \cdot k \end{cases}$ $\forall k \in Z$

Soluciones: $\begin{cases} si\ \alpha \in II\ cuadrante \to \alpha = 108º26'6'' + 360º \cdot k \\ si\ \alpha \in IV\ cuadrante \to \alpha = 288º26'6'' + 360º \cdot k \end{cases}$ $\forall k \in Z$. INFINITAS SOLUCIONES

Ej-9: Si sec(α) = -3, calcula todos los valores de α comprendidos entre 0º y 360º.

Necesito una razón trigonométrica que venga en la calculadora:→ $\cos(\alpha) = \frac{-1}{3}$

NOTA: como α tiene que estar entre 0º y 360º, no tiene vueltas.

Ángulo: α ; incógnita:α

1º) Comprobar si el número es correcto: Si porque –1≤cos(α)≤1
2º) No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo; tienes que averiguarlo El ángulo α puede ser de los cuadrantes II o III
3º) Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante y tal que cos(w)=│cos(α)│=1/3

$$w = arc\cos\left(\frac{1}{3}\right) = 70º31'43'' \begin{cases} si\ \alpha \in II\ cuadrante \to \alpha = 180º - w = 109º28'16'' \\ si\ \alpha \in IV\ cuadrante \to \alpha = 360º - w = 250º31'44'' \end{cases}$$

Soluciones: α_1=109º 28'16" ; α_2=250º31'44" DOS SOLUCIONES

Ej-10: Si sen(α) = - 0,5, calcula todos los valores de α en radianes y sin calculadora.

Ángulo: α ; incógnita:α

1º) **Comprobar si el número es correcto:** Si porque $-1 \le sen(\alpha) \le 1$

2º) **No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo;** tienes que averiguarlo. **El ángulo α puede ser de los cuadrantes III o IV**

3º) **Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante y tal que sen(w)=│sen(α)│=0,5**

$$sen(w) = \frac{1}{2} \Rightarrow w = 30^{o} = \frac{\pi}{6} \quad rad \Rightarrow \begin{cases} si\ \alpha \in III\ cuadrante \rightarrow \alpha = \pi + w + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ si\ \alpha \in IV\ cuadrante \rightarrow \alpha = 2\pi - w + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Soluciones: $\alpha = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **y** $\alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \forall k \in Z$ → **HAY INFINITAS SOLUCIONES**

Ej-11: Si cos(3x) = 0,5, calcula todos los valores de x en radianes y sin calculadora.

Ángulo: 3x ; incógnita: x

1º) **Comprobar si el número es correcto:** Si porque $-1 \le cos(3x) \le 1$

2º) **No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo;** tienes que averiguarlo. **El ángulo 3x puede ser de los cuadrantes I o IV**

3º) **Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante y tal que cos(w)=│cos(α)│=0,5**

$$\cos(w) = \frac{1}{2} \Rightarrow w = 60^{o} = \frac{\pi}{3} \quad rad \Rightarrow \begin{cases} si\ \alpha \in I\ cuadrante \rightarrow 3x = w + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ si\ \alpha \in IV\ cuadrante \rightarrow 3x = 2\pi - w + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Soluciones: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ **y** $x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \forall k \in Z$ → **HAY INFINITAS SOLUCIONES**

Ej-12: Calcula todas las soluciones de la ecuación tg(5x)=-1. ¿Cuántas soluciones tiene?

Ángulo: 5x ; incógnita: x

1º) **Comprobar que los datos son correctos:** Si porque $-1 \le tg(5x) \le 1$

2º) **No se comprueba el signo porque no doy el cuadrante del ángulo;** tienes que averiguarlo. **El ángulo 3x puede ser de los cuadrantes I o IV**

3º) **Calculo el valor del ángulo auxiliar w del primer cuadrante⇒ tg(w)=│-1│=1⇒** w=arc tg(1)=45º'

$$\left.\begin{array}{l} Si\ 5x \in II\ cuad \Rightarrow 5x = 180^{o} - w + 360^{o} \cdot k = 135^{o} + 360^{o} \cdot k; \quad x = 27^{o} + 72^{o} \cdot k \\ Si\ 5x \in IV\ cuad \Rightarrow 5x = 360^{o} - w + 360^{o} \cdot k = 315^{o} + 360^{o} \cdot k; \quad x = 63^{o} + 72^{o} \cdot k \end{array}\right\} \forall\ k \in Z$$

Resuelve:

1. **Resuelve la ecuación sec(3x)=-3**
2. **Resuelve la ecuación sen(x)=1**
3. **Resuelve la ecuación cos(5x)=0**
4. **Resuelve la ecuación tag(2x)=-1**

NOTA: estos ejercicios hay que hacerlos como los que están resueltos; numerando los distintos pasos que hay que dar y no olvidándose del ángulo auxiliar w

IV) Resolución de triángulos (pregunta nº11 del libro)

Resolver un triángulo consiste en calcular la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos. Para ello nos tienen que dar tres datos, siendo, al menos uno, la medida de un lado o una relación entre ellos. (Área, perímetro, medida de una altura, el lado b mide 2cm más que el lado c, radio de la circunferencia circunscrita, ...)

Para resolver un triángulo tenemos las siguientes propiedades:

1.- Los tres ángulos suman 180º. Se utiliza para calcular el tercer ángulo
2.- A mayor ángulo se opone mayor lado. Se utiliza para comprobar una vez resuelto el triángulo.
3.- El lado mayor es menor que la suma de los otros dos. Se utiliza cuándo conocemos los tres lados.
4.- Al dibujar una altura obtenemos dos triángulos rectángulos, y para ellos hay que saber:
a) Teorema de Pitágoras b) Definiciones de la pregunta 2 del tema 5.
5.- El teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$, y tenemos que tener en cuenta:

- **a)** No se debe calcular el ángulo mayor por el teorema de los senos. **Si no hay otro camino**, tenemos que hacerlo dos veces, una suponiendo que el ángulo es del I cuadrante y otra suponiendo que es del II cuadrante. **(Aquí están la mayoría de las equivocaciones en los exámenes, y supone un cero)**
- b) Lo utilizaremos cuando conocemos una fracción completa o cuándo no se pueda utilizar el teorema del coseno.

6.- El teorema del coseno. $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos C\end{cases}$.

Se aplica cuando sólo hay una incógnita

7.- Área del triángulo $=\frac{a\cdot b\cdot\operatorname{sen} C}{2}=\frac{base\ x\ altura}{2}$

✓ Se pueden dar cinco casos, los cuatro del libro (página 85) y el caso V)

Caso V: Nos dan la medida de dos ángulos y una relación entre la medida de los lados.

- ✓ Como A+B+C=180º, calculamos el ángulo que falta.
- ✓ Formamos un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas haya en la relación entre los lados. (Las incógnitas sólo pueden ser las medidas de los lados).
- ✓ Una ecuación es la relación que nos dan entre los lados y las otras las sacamos del teorema de los senos. Se resuelve el sistema por sustitución y calculamos la medida de los lados. Si alguno no aparece en el sistema, lo calculamos por el teorema de los senos.

NOTA: En el caso III, puedes tener que hacerlo dos veces (ejercicio 2º)

Ejercicio resuelto:

1.- Resuelve el triángulo ABC sabiendo a= 47 cm, b= 108 cm y c=82 cm. Calcula la medida de la altura del vértice A y el área del triángulo.

Solución: **a= 47 cm., A= 24º0'49'' ;**
b=108 cm. ; B= 110º45'4'' **(Se cumple la propiedad 2ª)**
c= 82 cm. C = 45º14'7''

Resolución del triángulo:

a) Se cumple que b<a+c → 108 < 47+82=129. Datos correctos
b) De las fórmulas del teorema del coseno y del teorema de los senos, utilizamos las que sólo tienen una incógnita, para calcular lo que falta

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos(C);\quad 2\cdot a\cdot b\cdot \cos(C) = a^2 + b^2 - c^2;\quad 10152\cdot\cos(C) = 7149;\quad \cos(C) = \frac{7149}{10152};$

$C = arc\cos\left(\frac{7149}{10152}\right) = 45º14'7''\ ;\qquad \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{a\cdot\text{sen } C}{c} \Rightarrow A = 24º0'49''$

c) Los tres ángulos suman 180º$\Rightarrow B = 180º - (A + C) = 110º45'4''$

d) Altura del vértice C → Fórmula: $h_C = b\cdot senA = 43{,}95 \quad cm$

e) $Área = \frac{base\cdot altura}{2} = \frac{c\cdot h_C}{2} = 1801{,}99 \quad cm^2$ ó $Área = \frac{a\cdot b\cdot\text{sen } C}{2} = 1801{,}99 \quad cm^2$

NOTA: **Para calcular el área es mejor la segunda fórmula.**

2.- Resuelve el triángulo ABC sabiendo que **b=20 cm, c=30 cm y B=35º**

$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \Rightarrow b\cdot senC = c\cdot senB;\quad senC = \frac{c\cdot senB}{b} = \frac{30\cdot sen35º}{20} = 0{,}8603646545 \Rightarrow correcto$

¿Puede ser **C** el ángulo mayor? Sí → hay que hacer el ejercicio dos veces, porque C puede pertenecer al primer cuadrante (C=w) o C puede pertenecer al segundo cuadrante (C=180º-w)

Ángulo auxiliar w∈ I cuadrante → senw = 0,8603646545 → w=arc sen(0,8603646545)=59º21'27"

Caso I: a= 34,77 cm ; A=85º38'33" **b= 20 cm ; B= 35º** **c= 30 cm. ; C= w=59º21'27"** Se cumple la propiedad 2ª Se cumple la propiedad 3ª a<b+c Sí	**Caso II: a= 14,38 cm A= 24º21'27"** **b= 20 cm ; B= 35º** **c= 30 cm. ; C=180º-w=120º38'33"** Se cumple la propiedad 2ª Se cumple la propiedad 3ª a<b+c Sí
Prop 1º: A+B+C=180º → A=180º-(B+C)=85º38'33" $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow a\cdot senB = b\cdot senA;$ $a = \frac{b\cdot senA}{senB} = 34{,}77\ cm$	**Prop 1º: A+B+C=180º → A=180º-(B+C)**=24º21'27" $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow a\cdot senB = b\cdot senA;$ $a = \frac{b\cdot senA}{senB} = 14{,}38\ cm$

Ejercicios propuestos y soluciones:

Ejemplo - 1: Resuelve el triángulo ABC sabiendo que a=8 cm, b=19 cm y c=23 cm.

Soluciones: A=19º4'37" ; B=50º55'4" y C=110º19"

Ejemplo - 2: Resuelve el triángulo ABC si A=18º , B=46º y su perímetro mide 35 cm.

Soluciones: a= 5,61 cm ; b= 13,06 cm ; c= 16,33 cm y C=116º

Ejemplo - 3: Resuelve el triángulo ABC si que B=46º, C= 102º y su área es de 105 cm^2.

Soluciones: a= 12,58 cm ; b=17,07 cm ; c= 23,21 cm y A=32º

Ejemplo - 4 Resuelve el triángulo ABC sabiendo que a=18 cm. , b=12 cm. y B= 43º.

Soluciones: Como sen(A)= 1,023>1, los datos son incorrectos. No hay solución.

Ejemplo - 5 Resuelve el triángulo ABC sabiendo que a=15 cm. , b=12 cm. y B= 43º.

Soluciones: Como A puede ser el ángulo mayor puede estar en los cuadrantes I o II

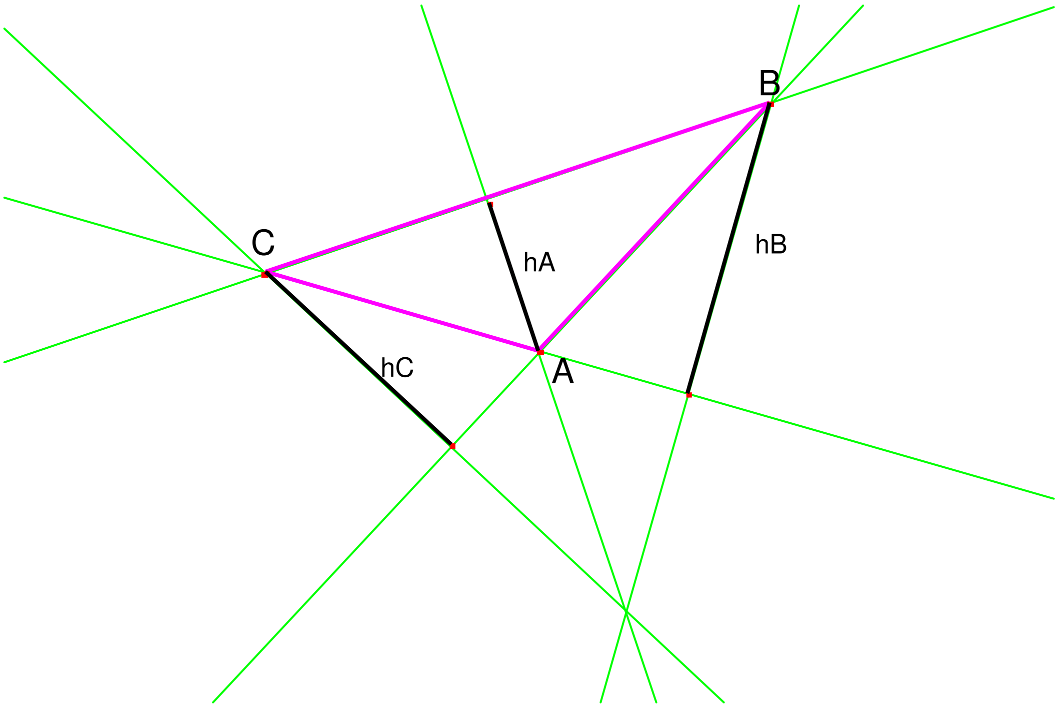
a) Si A∈I cuadrante⇒ a= 15 cm ; b= 12 cm ; c= 17,24 cm
A= 58º29'4" ; B= 43º ; C= 78º30'56"

b) Si A∈II cuadrante⇒ a= 15 cm ; b= 12 cm ; c= 4,70 cm
A= 121º30'56" ; B= 43º ; C= 15º29'4"

NOTA: estos ejercicios hay que hacerlos como los que están resueltos; numerando los distintos pasos que hay que dar y escribiendo lo hay que hacer y poniendo las fórmulas que necesitas
Obligatorio siempre comprobar que se cumplen los apartados 2 y 3 de la teoría

Dibujo de las tres alturas de un triángulo obtusángulo:

Nota: Diferencia entre la recta altura y el segmento altura
Las tres rectas altura se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO



Dibujo de las tres alturas de un triángulo acutángulo:

Nota: diferencia entre la recta altura y el segmento altura
Las tres rectas altura se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO