C.E.I.P "N^{TRA} S^{RA} MISERICORDIA"
TORREPEROGIL

PROPUESTA METODOLÓGICA:

" REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA $\sqrt{}$ "

Pedro Hurtado

Curso 2011/2012

LA RAIZ CUADRADA (√)

- DEFINICIÓN:

> *"Es el nº de baldosas que tendría el lado de una habitación que formara un cuadrado perfecto".*

1.- √ DE LOS CUADRADOS PERFECTOS.-

La raíz cuadrada (√) es la operación contraria a elevar un nº al cuadrado. Se averigua contando las "baldositas" del borde de un cuadrado perfecto. Observa :

 $1^2 = 1x1=1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$

 $2^2 = 2x2= 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

 $3^2 = 3x3=9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$

 $4^2 = 4x4=16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$

Etc…

Conclusión: Averiguar la raíz cuadrada (√) de un número es lo contrario de elevar ~~un~~ dicho nº al cuadrado (multiplicarlo por sí mismo).

Podríamos pensar que bastaría con dividir el nº resultante por el nº que lo originó.

Ejs: $5^2 = 5x5 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$

$6^2 = 6x6 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

$7^2 = 7x7 = 49 \Rightarrow \sqrt{49} = 7$

$8^2 = 8x8 = 64 \Rightarrow \sqrt{64} = 8$ Etc…

Eso es cierto, en principio, y nos vale siempre que la habitación sea un cuadrado perfecto. Pero la realidad es más compleja: la mayoría de los números no forman ese cuadrado y averiguar su √ es algo más complicado. Piensa, por ejemplo, en la tabla de multiplicar: sólo es un cuadrado perfecto uno de cada diez números de cada tabla y en una proporción cada vez menor. Observa la siguiente secuencia:

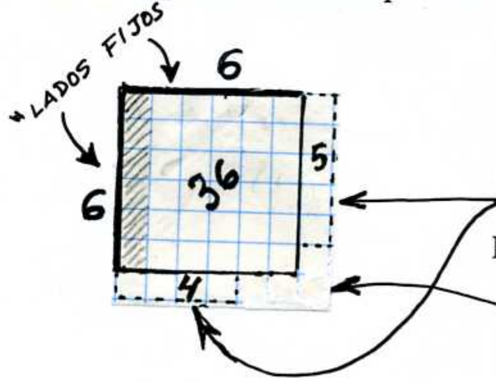
-CUADRADOS PERFECTOS →	**1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 64 - 81…**
-Nºs QUE NO SON CUADRADOS PERFECTOS (A estas cantidades, por tramos, que crecen hasta el infinito se les llama " progresión aritmética") →	**2 Nºs** (2y3) **4 Nºs** (5,6..) **6 Nºs** (10,11..) **8 Nºs** (17,18..) **10 Nºs** (26,27..) **12 Nºs** (36,37..) **14 Nºs** (50,51..) **…** … etc

2.- CÓMO DIBUJAR Y RESOLVER UNA √ .-

Tratemos de formar un cuadrado perfecto, por ejemplo, con 45 baldosas. Pueden ocurrir dos cosas:

a) Supongamos que las ordenamos por DEFECTO (me faltan baldosas en el borde):

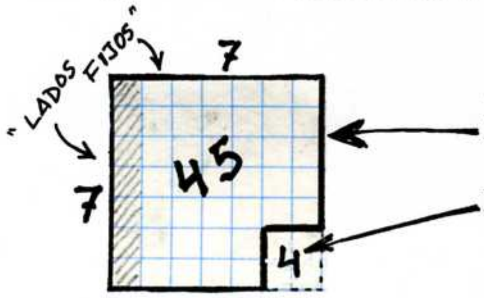
Probemos poniendo en el borde menos baldosas del total necesario para tratar de formar un primer cuadrado perfecto: $\sqrt{45} = 6$



45 baldosas totales
- 36 baldosas del cuadrado perfecto inicial
9 baldosas que me sobran y añado después
Problema: queda un pico sin cuadrar

b) Supongamos que las ordenamos por EXCESO (pongo demasiadas en el borde).

Probemos poniendo en el borde más baldosas del total necesario para tratar de formar un primer cuadrado perfecto: $\sqrt{45} = 7$



45 baldosas totales
- 49 baldosas del cuadrado perfecto inicial
Imposible: sólo tengo 45 baldosas

Problema: me faltan 4 baldosas en el pico

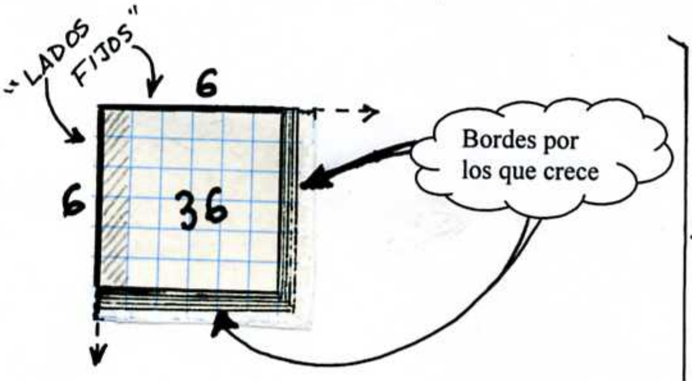
Vemos que las dos opciones son malas, porque no me permiten formar un cuadrado perfecto con las 45 baldosas. ¿Cuál crees que sería la solución correcta?

<u>La solución sería</u>:

Empezar por la opción "a" echando 6 baldosas en cada pared fija. Hemos colocado 6x6 = 36 baldosas, que es el máximo para formar un primer cuadrado perfecto, pero todavía tenemos que colocar 9.

Para ello la única solución posible es hacerlas trozos. Pero, como tienen que ser trocitos cuadrados, con cada baldosa saldrán 100 centésimas. Por lo tanto, tenemos que colocar 900 centésimas en los bordes de crecimiento de ese 1er cuadrado perfecto.

Pero como comprenderlo bien es algo complejo, vamos a analizar primero otros casos más fáciles de dibujar .Después aprenderemos estos casos más complicados.



EL CUADRADO CRECERÍA ASÍ

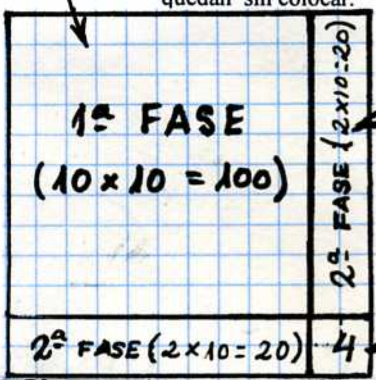
3.- DIBUJAMOS Y RESOLVEMOS UNA √ SIN DECIMALES .-

Así pues, una √ es como una “alfombra mágica” con dos lados fijos (por donde no crece) y otros dos lados “de crecimiento” en donde vamos colocando, siempre de forma cuadrada, las nuevas baldositas.Observa cómo la alfombra crece en tres fases:

Ej1: ***Supongamos que tenemos que hacer un cuadrado perfecto con 144 baldosas…***
=> $\sqrt{144}$ = ¿?

A) REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

1ª FASE: Tengo que coger el máximo nº posible de esas 144 baldosas para hacer un 1er cuadrado perfecto, que luego irá creciendo por esos dos bordes. ¿Cuántas baldosas puedo coger de golpe? Colocaremos inicialmente 100 baldosas, que es lo máximo => 144 – 100 = 44 baldosas nos quedan sin colocar.

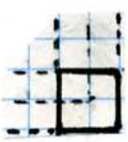


2ª FASE: Crecen los bordes con dos “carriles” de crecimiento => Gasto 20 baldosas en cada borde, pero me falta el “pico”.

3ª FASE: Averiguamos el “pico.

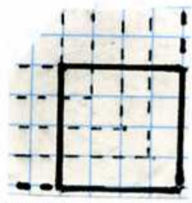
Observa: 100 + (20x2) + 4 = 144
(1ª Fase) (2ª Fase) (3ª Fase)

De todo lo anterior, la clave para comprender la operación de la √ está en las 4 baldosas del “pico”. Fíjate en los dibujos siguientes. Son como la curva de una pista de atletismo: en la 1ª pista, el corredor, al llegar al pico, pisará una sola baldosa; en la 2ª pista pisará 3 baldosas; en la 3ª pista, pisará 5 baldosas, etc…Esto sería injusto, porque unos corredores tendrían un recorrido mayor que otros. Vamos a comprobar un hecho muy importante: **el número de carriles siempre coincide con la media aritmética de las baldosas que cada carril tiene en el “pico”**. Si hiciéramos ésta operación de averiguar la “media”, todos correrían igual y sería más justo. Observa tres situaciones diferentes de posibles “picos”:



1 + 3 = 4 bald. totales del “pico”
=> 4:2 carriles = 2 bald.media/carril

1 + 3 + 5 = 9 bald. tot. del “pico”
=> 9:3 carriles = 3 bald.media/car.



1 + 3 + 5 + 7 = 16 bald. total “pico”
=> 16:4 carriles = 4 bald.media/car.
... etc

El trabajo fundamental de la operación de la √ consiste precisamente en averiguar cuántos carriles crece la “alfombra”,sabiendo que ese nº coincide con la “media del pico” .Observa que éstos tienen forma de

El nº de carriles lo averiguaremos por tanteo dividiendo las baldosas sobrantes del 1er cuadrado perfecto entre la longitud de esa , que siempre es un poco mayor que el doble de la √ provisional de ese 1er cuadrado perfecto.

B) ALGORITMO DE LA RAÍZ CUADRADA - Interpretación de sus términos:

De la misma forma que hemos operado con el dibujo, haremos con la cuenta. Primero calcularemos mentalmente en su parte derecha las decenas de la √ imaginando el máximo de un 1ᵉʳ cuadrado perfecto:

10x10= 100 baldosas => √144= 1¿..? → **Solución de la cuenta.**

Aún desconocemos las unidades

Una decena (…de momento)

Imposible que las decenas fueran dos, porque necesitaríamos 20X20=400 baldosas y sólo tenemos 144

Seguidamente restamos en la parte izquierda las 100 baldosas del 1ᵉʳ cuadrado perfecto y averiguamos que nos sobran 44 baldosas.

Después averiguaremos las unidades de la √, que son, a la vez, el nº de "carriles" que vamos a añadir . Para ello colocaremos las 44 baldosas sobrantes en los "bordes de crecimiento"(┘) por lo que, mediante un **tanteo**, las repartiremos entre el doble de la √ provisional, que es precisamente la longitud de esa ┘. Este tanteo lo realizaremos en la parte derecha de la cuenta haciendo pruebas mediante sucesivas multiplicaciones horizontales en las que nos preguntaremos: ¿qué pasaría, por ejemplo, si quisiéramos añadir **3** "carriles" ? En este caso, la longitud media del doble de la √ provisional sería forzosamente de 2**3** baldosas en cada carril (*1). ¿Tendríamos suficientes para embaldosar 3 "carriles"? No, porque necesitaríamos 23x3=69 y sólo tenemos 44.

(*1)No olvides que hemos comprobado antes un hecho que nos va a ayudar mucho: **el número de carriles por el que tenemos que multiplicar siempre coincide con la media aritmética de las baldosas que cada carril tiene en el "pico"**.

En cambio, si tanteamos: ¿qué pasaría, ahora, si quisiéramos añadir **2** "carriles" ? En este caso, la longitud media del doble de la √ provisional sería de 2**2** baldosas en cada carril, por lo que, 22x2 =44.Vemos que viene perfecto porque, precisamente, me sobraban 44. No sobrarían ni faltarían baldosas. Seguidamente hacemos la resta en la parte izquierda y concluimos. Por lo tanto, validamos 2 unidades y lo anotamos en la solución de la cuenta.

Observa atentamente **qué significa cada término** de la cuenta:

Decenas (√ provisional)

Unidades = nº de "carriles(Nº BUSCADO :Se pone cuando comprobamos que con 2 carriles tenemos suficientes baldosas)

√144 | 12

1ᵉʳ cuadr. perf. → - 100

Bald. sobrantes → 44

Bald colocadas en ┘ → - 44

0

22 X **2** (nº de carriles) = 44

Media aritmética del "pico"

Doble de la √ provisional

MEDIA DE BALDOSAS DE CADA CARRIL

"Zona de restas"

"Zona de tanteo" de la longitud media de cada carril y del nº de carriles"

4.- DIBUJAMOS Y RESOLVEMOS UNA √ CON DECIMALES .-

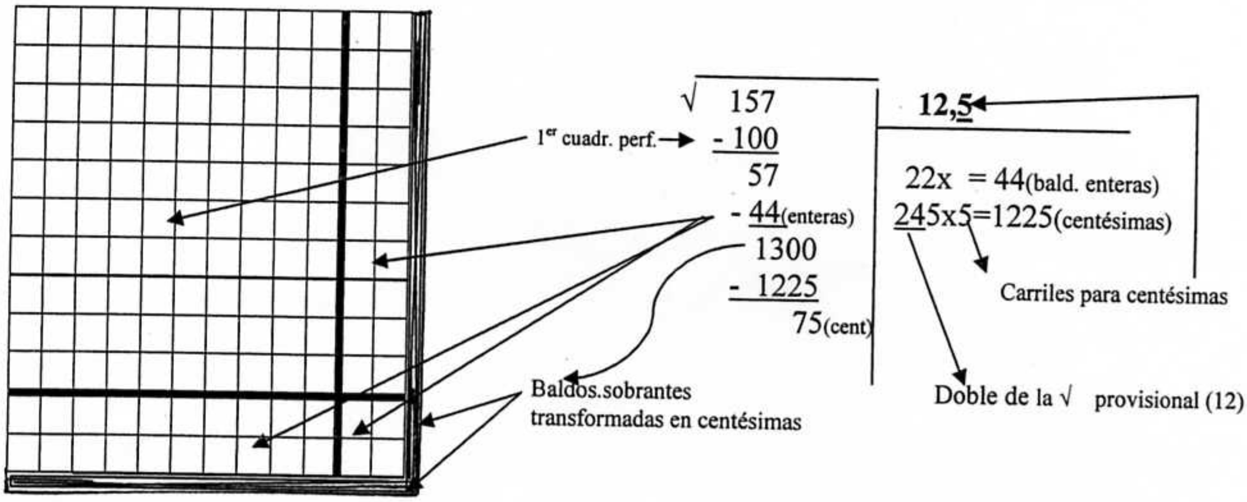
Ej2: ***Supongamos que tenemos que hacer un cuadrado perfecto con 157 baldosas…***
=>√ 157 = ¿?

En este ejemplo la √ no es exacta. Comenzamos colocando el primer cuadrado perfecto para averiguar las **decenas,** cuyo resultado es **1**. Vemos que sobran 57. Para averiguar las unidades, mediante un tanteo, observamos que la longitud de los "bordes de crecimiento"(⅃), es de "veintipico" baldosas (algo más del doble de la √ provisional) , por lo que es evidente que sólo podemos utilizar 2 carriles en los que colocaremos 44 baldosas enteras y nos sobran 13. Por lo tanto, esos 2 carriles equivalen a **2 unidades**, que las anotamos en la solución provisional de la cuenta.

Las 13 baldosas sobrantes las transformaremos directamente en centésimas con objeto de que las "baldositas" resultantes también sean cuadradas y puedan ser colocadas sin que se desvirtúe esta figura geométrica. Aparecen 1.300 centésimas que volveremos a repartir mediante el tanteo descrito anteriormente.

Cada centésima ocupará una décima de baldosa en el "borde de crecimiento"(⅃), por lo que ,éste tendrá una longitud media del doble de la nueva √ provisional ("doscientascuarenta y pico" baldositas del tamaño de una centésima). El tanteo me indica que nuevamente podemos añadir otros 5 "carrilitos" de una una anchura de una décima de baldosa (245x5=1225). Restamos en la parte izquierda y comprobamos que nos sobran 0,75 baldosas Por lo tanto, anotamos **5 centésimas** en la solución de la cuenta .

REPRESENTACIÓN GRÁFICA : OPERACIÓN:



5.- PRUEBA DE LA √ :

Sólo hay que elevar el resultado de la √ al cuadrado y añadir el resto. Así por ejemplo, en la operación anterior sería: $12,5^2 = 12,5 \times 12,5 = 156,25$

$156,25 + 0,75 = \mathbf{157}$

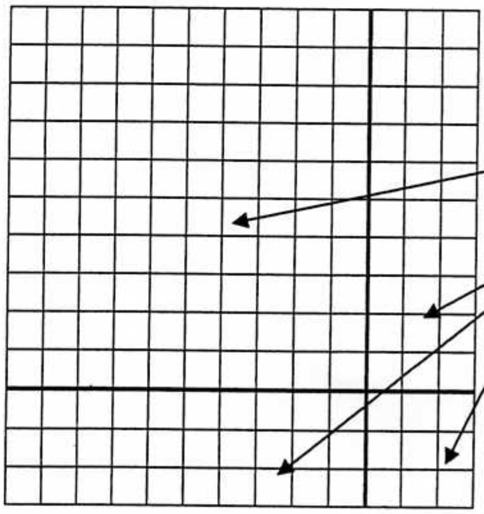
6.-AUTOMATISMO DE LA √ :

Ej3: ***Supongamos que tenemos que hacer un cuadrado perfecto con 1.216 baldosas…***
=>$\sqrt{1.216}$ = *¿?*

PROCESO :	**EXPLICACIÓN :**
1er Paso.- - Separar el nº en grupos de 2 cifras (comenzando por la derecha)	Para averiguar el mayor nº de baldosas que forman el 1er cuadrado perfecto.
- Hallar la √ del grupo de la izquierda. Elevar al cuadrado y restar.	Vemos que la **decena** de la √ es **3**, porque $3^2 = 9$, que es el nº que más se aproxima a 12 (=>30^2 =30x30=900)
√12 16 | 3… - 9 00 316	Ya sé que la √ será de "treinta y tantos".
2º Paso.- - Restamos 900:	- Para averiguar las baldosas que me sobran (316) y que tengo que colocar en el "borde de crecimiento" ( )
3er Paso.- - Escribimos debajo de la √ provisional su doble: √12 16 | 3… - 9 00 | 6…x… 316	- Para averiguar, mediante tanteo, la longitud aproximada de los "bordes de crecimiento" del cuadrado ( ) .Se mide por la media del nº de baldosas de éstos. Vemos que será de "sesenta y tantas" baldosas cada uno de los "carriles" que añadiremos a estos bordes.
4º Paso.- (El más complejo) - De 316 se separa el 6 y el 31 se divide entre el doble de la raíz (6). El conciente (5) se añade a éste y el nº resultante (65) se multiplica por él mismo (65x5)	- Para averiguar el nº de "carriles" que crecerá la √ ,que siempre coincide con la madia de baldosas del "pico" de los "bordes de crecimiento" del cuadrado ( )
5º Paso.- (Tanteo) - Si el resultado es > 316, no vale el 5 y bajamos a 4 (64x4)	- Porque sólo nos sobraron 316 baldosas. No disponemos de 325.
√12 16 | 3 4 - 9 00 | 65x5=325=> **NO** 316 | 64x4=256=> **SÍ**=> - 256 60	- Porque si agrandamos el cuadrado añadiendo 4 carriles de 64 baldosas de media cada uno, gastaremos 256 (=>tenemos suficientes).Por lo tanto, **4 unidades** es correcto y lo anotamos en el resultado provisional. Así averiguamos las baldosas que vuelven a sobrarnos (60).
6º Paso.- - Para sacar decimales hay que añadir dos ceros al resto TRANSFORMANDOLO TODO EN CENTÉSIMAS y se procede como en los pasos anteriores. √12 16 | 3 4'8 - 9 00 | 65x5=325=> **NO** 316 | 64x4=256=> **SÍ** - 256 | 688 x8= 5.504=> **SÍ** 60 00 - 55 04 | Doble de la √ provisional(34) 496(Centés.)	- Realizamos el mismo proceso que en los pasos anteriores. Las 60 baldosas restantes las transformamos en 6.000 "baldositas" del tamaño de las centésimas. Averiguo el nuevo nº de "carrilitos" (de una anchura de una décima de baldosa cada uno) que crecerá la √ .Vemos que **8 décimas** es correcto y lo anotamos en el resultado definitivo. También observamos que nos vuelven a sobrar 4'96 baldosas=496 centésimas. Podríamos transformarlas nuevamente en diezmilésimas y repetir el mismo proceso, pero no lo vamos a hacer. Puedes imaginarlo.
PRUEBA: $34'8^2$= 34'8 x 34'8 = 1211'04 1211'04 + 4'96 = **1.216**	

7.- EJEMPLIFICACIONES DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE LA √ :

REPRESENTACIÓN GRÁFICA : OPERACIÓN:



√ 169 | **13**

1er cuadr. perf. → - 100

69

bald. sobrantes - 69

00

23 x 3 = 69(bald. sobrantes)

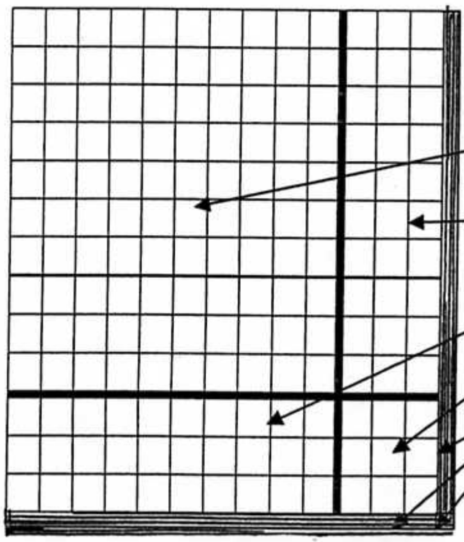
Carriles

Media de bald. en cada carril

PRUEBA:Se puede hacer de dos formas:

a) 100+ (30x2)+9 = 169

b) 13^2 = 13x13= 169



√ 183 | **13,5**

1er cuadr. perf. → - 100

83

- 69(enteras)

1400

- 1325

75(cent)

23 x 3 = 69(bald. enteras)

265x5=1325(centésimas)

Carriles para centésimas

Baldos.sobrantes transformadas en centésimas

Doble de la √ provisional (12)

PRUEBA:Se puede hacer de dos formas:

a) 100+ (30x2)+9 + 14 = 183

b) $13{,}5^2$ = 13,5 x13,5 = 182,25

182,25 + 0,75 = 183