

# Matemáticas 2<sup>ESO</sup>

Biblioteca del profesorado  
**SOLUCIONARIO**

El Solucionario de **Matemáticas** para 2.º ESO es una obra colectiva, concebida, diseñada y creada en el departamento de Ediciones Educativas de Santillana, dirigido por **Enric Juan Redal**.

En su realización han intervenido:

**Ana María Gaztelu**  
**Augusto González**

EDICIÓN  
**Rafael Nevado**  
**Carlos Pérez**

DIRECCIÓN DEL PROYECTO  
**Domingo Sánchez Figueroa**



# Presentación

El nombre de la serie, **La Casa del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de la etapa obligatoria de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.

## 3 Números decimales

**NÚMEROS DECIMALES**

- DECIMALES EXACTOS
- DECIMALES PERIÓDICOS
  - PERIÓDICOS Puros
  - PERIÓDICOS Mixtos
- DECIMALES NO EXACTOS NI PERIÓDICOS

**OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES**

- SUMA
- RESTA
- MULTIPLICACIÓN
- DIVISIÓN

**A lomos del viento**

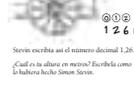
El encargo estaba terminado, y a medida que la nave iba ganando velocidad con avidez del viento, y desvuelta kilómetros de playa en dirección a tiempos quietos, la cara de los pasajeros se transformaba. La tez de unos se volvía blanca, mientras que se seguían atemorizados a los andares del barco por el contrario, la faz de otros empezaba, a la vez que giraban como aperechados, a mirar a los revolvellos cubiertos que movían el curso.

Se anunciaba el conde-Manrico de Naxos, sucesora de la obra, se sentía plenamente satisfecho.

— Señor Stevin, este carro movido por la fuerza del viento que flutaba se veía, supevo con certeza mi encargo. Vamos más de veintimiles personas y dejamos atrás a los hombres, que nos siguen a toda galope mudados en sus calchales.

Simón Stevin se demoró un momento, el tiempo justo que tardó en amasar unas cuerditas:

— Como puedes ver en los cálculos, la velocidad se puede aumentar si utilizamos ruedas más pequeñas, de un metro y veinticinco centímetros.



126 N

Stevin escribió así el número decimal 1,26.

— ¿Cuál es el altura en metros? Escríbela como la hubiera hecho Simón Stevin.

*Por ejemplo, si un alumno mide 1,76 m, se escribe el número 176, poniendo encima del número 2 un círculo con un 0 en su interior; encima del 7, un círculo con un 1 en su interior, y encima del 6, un círculo con un 2 en su interior.*

## Expresiones algebraicas

**EN LA VIDA COTIDIANA**

**007** Tus amigos dibujan sobre vivienda y habitabilidad se han estado una serie de conclusiones sobre las dimensiones idóneas que debe tener una vivienda.

En el caso de viviendas de dos dormitorios, las recomendaciones son:

- El largo del recibidor debe ser el triple que el ancho.
- La cocina y los dormitorios deben tener de ancho el doble que el del recibidor, y de largo, el triple que el ancho del recibidor.
- El ancho del pasillo debe ser la mitad que el de la cocina, y el largo, cinco veces el ancho del recibidor.
- El baño debe tener un ancho igual al largo de la cocina, y un largo, cinco veces el ancho del recibidor.
- El servicio debe ser cuadrado, y su lado, igual al ancho de la cocina.

Considerando que el ancho del recibidor no puede ser inferior a 1,5 m, ¿cuál es la superficie mínima de una vivienda de estas características?



Ancho del recibidor:  $x = 1,5$  m  $\Rightarrow$  Largo del recibidor:  $3x = 4,5$  m.  
 Área del recibidor:  $1,5 \cdot 4,5 = 6,75$  m<sup>2</sup>.  
 Ancho de la cocina y dormitorios:  $2x = 3$  m.  
 Largo de la cocina y dormitorios:  $3x = 4,5$  m.  
 Área de la cocina y dormitorios:  $4,5 \cdot 4,5 = 20,25$  m<sup>2</sup>.  
 Ancho del pasillo:  $\frac{2x}{2} = x = 1,5$  m  $\Rightarrow$  Largo del pasillo:  $5x = 7,5$  m.  
 Área del pasillo:  $1,5 \cdot 7,5 = 11,25$  m<sup>2</sup>.  
 Ancho del baño:  $3x = 4,5$  m  $\Rightarrow$  Largo del baño:  $9 = 7,5$  m.  
 Área del baño:  $4,5 \cdot 7,5 = 33,75$  m<sup>2</sup>.  
 Ancho del servicio:  $2x = 3$  m  $\Rightarrow$  Largo del servicio:  $2x = 3$  m.  
 Área del servicio:  $3 \cdot 3 = 9$  m<sup>2</sup>.  
 Área total =  $6,75 + 3 \cdot 13,5 + 11,25 + 33,75 + 9 = 101,25$  m<sup>2</sup>.

SOLUCIONARIO

**007** La editorial Sarrutxua va a lanzar una colección de novela de ciencia ficción. Los diseñadores gráficos quieren dar un aspecto innovador a esta colección y proponen usar, además del tipo de letra, el formato de los libros, como las páginas 5 cm más anchas que largas.

El equipo directivo, por su parte, ha propuesto tres opciones:

- a) Aumentar en 3 cm el ancho de la página.
- b) Aumentar en 3 cm el largo de la página.
- c) Aumentar en 3 cm los dos dimensiones.

Se te pide que el coste en tinta de una página impresa es de 0,007 €/cm<sup>2</sup>, ¿qué diferencia de coste hay entre las cuatro propuestas?

Ancho habitual  $x$  Largo habitual  $y$  Área habitual  $xy$   
 Área para 3 cm más de ancho:  $xy + 3y$  Diferencia de coste:  $0,021y$  €  
 Área para 3 cm más de largo:  $xy + 3x$  Diferencia de coste:  $0,021x$  €  
 Área para 3 cm más de ancho y 3 cm más largo:  $xy + 3x + 3y$   
 Diferencia de coste:  $0,021 \cdot (x + y)$  €.

**008** La constructora Toño ha adquirido un solar de forma cuadrada y han realizado un proyecto de urbanización que han presentado al ayuntamiento. Según el reglamento de urbanismo han de ceder un terreno de 3 m de ancho a lo largo de uno de los lados del solar.

a) ¿En cuánto disminuirá la superficie del solar?  
 b) ¿Qué gasto supone este e inicialmente el solar (se iba a repartir unos beneficios de 422.000 €)?

Considerando que el solar es:

- a) La superficie disminuye en  $3x$  m<sup>2</sup>.  
 $422.000 - 3x$
- b) El beneficio por metro cuadrado es  $\frac{422.000}{x^2}$ .  
 $422.000 - 3x = \frac{1.266.000}{x}$  €.

# Índice

<b>Unidad 0</b>	Repaso	4-15
<b>Unidad 1</b>	Números enteros	16-47
<b>Unidad 2</b>	Fracciones	48-81
<b>Unidad 3</b>	Números decimales	82-109
<b>Unidad 4</b>	Sistema sexagesimal	110-131
<b>Unidad 5</b>	Expresiones algebraicas	132-153
<b>Unidad 6</b>	Ecuaciones de primer y segundo grado	154-185
<b>Unidad 7</b>	Sistemas de ecuaciones	186-221
<b>Unidad 8</b>	Proporcionalidad numérica	222-251
<b>Unidad 9</b>	Proporcionalidad geométrica	252-283
<b>Unidad 10</b>	Figuras planas. Áreas	284-315
<b>Unidad 11</b>	Cuerpos geométricos	316-347
<b>Unidad 12</b>	Volumen de cuerpos geométricos	348-371
<b>Unidad 13</b>	Funciones	372-403
<b>Unidad 14</b>	Estadística	404-429

## NÚMEROS

001

Escribe en lenguaje matemático.

a) 12 es mayor que 7.    b) 25 es mayor que 21.    c) 45 es menor que 46.

a)  $12 > 7$

b)  $25 > 21$

c)  $45 < 46$

002

Ordena, de mayor a menor, estos números: 356, 3.467, 34.671, 346.710, 346.709, 34.609, 3.469, 349.

$$346.710 > 346.709 > 34.671 > 34.609 > 3.469 > 3.467 > 356 > 349$$

003

Busca el número que falta para que estas operaciones sean correctas.

a)  $498 + \square = 657$

c)  $698 - \square = 359$

e)  $95 \cdot \square = 6.270$

b)  $\square + 1.324 = 6.570$

d)  $\square - 489 = 51$

f)  $\square \cdot 39 = 1.638$

a) 159

c) 339

e) 66

b) 5.246

d) 540

f) 42

004

En una división, el cociente es 37, el dividendo 1.340 y el resto 8. Calcula el divisor.

$$D = d \cdot c + r \rightarrow 1.340 = d \cdot 37 + 8 \rightarrow d = 36$$

005

En una división, el divisor es 42, el cociente 33 y el resto 71. ¿Está bien resuelta la división?

No está bien resuelta, ya que el resto de una división no puede ser mayor que el divisor.

006

Carlos utiliza su moto para ir a trabajar. Cada día recorre 18 km por la mañana y 12 km por la tarde. ¿Cuántos kilómetros recorre en un mes? ¿Y en un año?

Como  $18 + 12 = 30$ , Carlos recorre en su moto 30 km cada día que va a trabajar.En un mes hay 22 días laborables, luego en un mes recorre:  
 $22 \cdot 30 = 660$  km.En un año se trabajan 11 meses, por lo que en un año recorre:  
 $11 \cdot 660 = 7.260$  km.

**007** Resuelve las siguientes operaciones.

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) $1.250 + 350 - 1.256$ | d) $3.456 - (945 - 654) + 12$ |
| b) $2.345 - 98 - 127$    | e) $(234 - 56) + (23 - 18)$   |
| c) $897 - 456 - 23$      | f) $(876 - 345) - (128 - 79)$ |
- 
- |          |          |        |
|----------|----------|--------|
| a) 344   | c) 418   | e) 183 |
| b) 2.120 | d) 3.177 | f) 482 |

**008** Calcula.

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| a) $25 + 2 \cdot (9 - 7) - 4$ | d) $25 - 7 : (76 - 13) + 3 \cdot 4$     |
| b) $37 - 4 + 3 \cdot (8 - 6)$ | e) $5 \cdot 7 - 6 \cdot 4 + 250 : 5$    |
| c) $2 \cdot (10 + 5) - 7$     | f) $400 - 150 \cdot 2 + 15 \cdot 6 - 8$ |
- 
- |       |        |        |
|-------|--------|--------|
| a) 25 | c) 23  | e) 61  |
| b) 39 | d) 478 | f) 182 |

**009** Opera y relaciona las expresiones que dan el mismo resultado.

- a)  $78 + 34 - 12 - 12 \cdot 4 - 2 \cdot 6 : 3$   
 b)  $78 + (34 - 12) - 12 \cdot (4 - 2) \cdot 6 : 3$   
 c)  $78 + 34 - (12 - 12) \cdot 4 - 2 \cdot (6 : 3)$   
 d)  $78 + (34 - 12 - 12) \cdot 4 - (2 \cdot 6) : 3$   
 e)  $78 + 34 - 12 - 12 \cdot (4 - 2 \cdot 6 : 3)$   
 f)  $(78 + 34 - 12 - 12) \cdot 4 - 2 \cdot 6 : 3$   
 g)  $78 + 34 - 12 - (12 \cdot 4 - 2 \cdot 6) : 3$   
 h)  $(78 + 34 - 12 - 12 \cdot 4 - 2 \cdot 6) : 3$

Si estas operaciones tienen los mismos números y los mismos signos aritméticos, ¿por qué dan resultados distintos?

- |       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| a) 48 | c) 108 | e) 100 | g) 88  |
| b) 52 | d) 114 | f) 348 | h) 100 |

Las únicas operaciones que tienen el mismo resultado son las de los apartados e) y h). Se dan resultados distintos por la utilización de los paréntesis, lo que cambia el orden para efectuar las operaciones.

**010** El primer día del mes tenía en mi cuenta 1.000 €. Ese día ingresé 345 €. A la semana siguiente saqué 276 € y luego volví a sacar 193 €. El último día del mes ingresé 315 €. ¿Qué dinero me quedó al final?

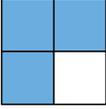
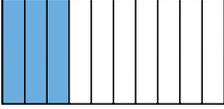
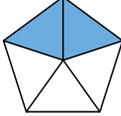


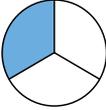
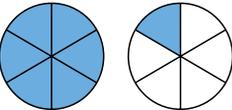
$$1.000 + 345 - 276 - 193 + 315 = 1.191$$

Al final me quedaron 1.191 € en la cuenta.

# Repaso

**011** Escribe la fracción que representa la parte coloreada de cada figura, indica cómo se lee e identifica su numerador y denominador.

a)  c)  e) 

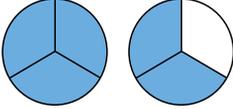
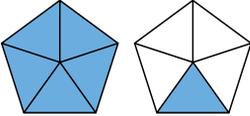
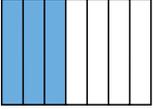
b)  d) 

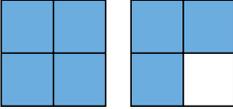
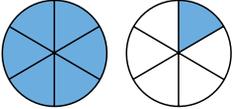
a)  $\frac{3}{4}$     b)  $\frac{1}{3}$     c)  $\frac{3}{10}$     d)  $\frac{7}{6}$     e)  $\frac{2}{5}$

**012** Representa gráficamente las siguientes fracciones.

a)  $\frac{5}{3}$     b)  $\frac{7}{4}$     c)  $\frac{6}{5}$     d)  $\frac{7}{6}$     e)  $\frac{3}{7}$

¿Cómo representas gráficamente el numerador de la fracción? ¿Y el denominador?

a)  c)  e) 

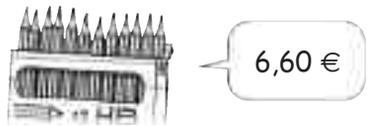
b)  d) 

**013** Pon dos ejemplos de:

- Fraciones con denominador 11 y que sean mayores que la unidad.
  - Fraciones con denominador 11 y que sean menores que la unidad.
  - Fraciones con numerador 11 y que sean mayores que la unidad.
  - Fraciones con numerador 11 y que sean menores que la unidad.
- a)  $\frac{12}{11}$  y  $\frac{13}{11}$     b)  $\frac{1}{11}$  y  $\frac{2}{11}$     c)  $\frac{11}{2}$  y  $\frac{11}{3}$     d)  $\frac{11}{12}$  y  $\frac{11}{13}$

**014** Una caja de 12 lápices vale 6,60 €.

- ¿Cuántos lápices son los  $\frac{2}{3}$  de la caja?
- Di cuánto valen esos lápices.



a)  $\frac{2}{3}$  de 12 =  $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$  lápices    b)  $\frac{2}{3}$  de 6,60 =  $\frac{2}{3} \cdot 6,60 = 4,40$  €

015 Descompón estos números decimales y escribe cómo se leen.

	Parte entera		Parte decimal		
	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
6,478	0	6	4	7	8
95,809	9	5	8	0	9
0,076	0	0	0	7	6
32,003	3	2	0	0	3

6,478 se lee «seis unidades cuatrocientas setenta y ocho milésimas».

95,809 se lee «noventa y cinco unidades ochocientos nueve milésimas».

0,076 se lee «setenta y seis milésimas».

32,003 se lee «treinta y dos unidades tres milésimas».

016 Escribe con cifras e indica la parte entera y la parte decimal.

- Cuarenta y cuatro unidades cuatrocientas quince milésimas.
- Sesenta y dos unidades setenta y tres milésimas.
- Cuatro unidades veintidós centésimas.
- Doce unidades tres centésimas.
- Cinco unidades dos décimas.
- Cinco décimas.

	Parte entera		Parte decimal		
	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
44,415	4	4	4	1	5
62,073	6	2	0	7	3
4,22		4	2	2	
12,03	1	2	0	3	
5,2		5	2		
0,5		0	5		

017 Escribe dos números mayores y otros dos menores.

- |            |         |          |          |
|------------|---------|----------|----------|
| a) 543,005 | c) 3,08 | e) 3,004 | g) 3,124 |
| b) 12,067  | d) 2,4  | f) 2,03  | h) 12,7  |

a)  $543,001 < 543,002 < \mathbf{543,005} < 543,006 < 543,007$

b)  $12,065 < 12,066 < \mathbf{12,067} < 12,068 < 12,069$

c)  $3,06 < 3,07 < \mathbf{3,08} < 3,09 < 3,1$

d)  $2,3 < 2,35 < \mathbf{2,4} < 2,45 < 2,5$

e)  $3,002 < 3,003 < \mathbf{3,004} < 3,005 < 3,006$

f)  $2,01 < 2,02 < \mathbf{2,03} < 2,04 < 2,05$

g)  $3,122 < 3,123 < \mathbf{3,124} < 3,125 < 3,126$

h)  $12,5 < 12,6 < \mathbf{12,7} < 12,8 < 12,9$

# Repaso

**018** Escribe dos números comprendidos entre:

a) 6,2 y 6,9

c) 4,202 y 4,212

b) 3,12 y 3,45

d) 0,234 y 0,26

a) 6,2 < 6,3 < 6,4 < 6,9

c) 4,202 < 4,203 < 4,204 < 4,212

b) 3,12 < 3,25 < 3,35 < 3,45

d) 0,234 < 0,24 < 0,25 < 0,26

**019** Julián compra 1 kilo de tomates que vale 35 céntimos, 1 kilo de peras por 1,22 € y 1 kilo de manzanas por 2 € y 5 céntimos. Si paga con un billete de 5 €, ¿cuánto le devolverán?



$$5 - (0,35 + 1,22 + 2,05) = 5 - 3,62 = 1,38 \text{ €}$$

**020** Averigua si las razones forman una proporción.

a)  $\frac{3}{8}$  y  $\frac{9}{24}$

b)  $\frac{7}{5}$  y  $\frac{21}{14}$

c)  $\frac{12}{8}$  y  $\frac{3}{2}$

d)  $\frac{0,5}{3}$  y  $\frac{0,75}{4,5}$

a)  $3 \cdot 24 = 72 = 8 \cdot 9 \rightarrow \frac{3}{8} = \frac{9}{24} \rightarrow$  Forman una proporción.

b)  $7 \cdot 14 = 98 \neq 105 = 5 \cdot 21 \rightarrow \frac{7}{5} \neq \frac{21}{14} \rightarrow$  No forman una proporción.

c)  $12 \cdot 2 = 24 = 8 \cdot 3 \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow$  Forman una proporción.

d)  $0,5 \cdot 4,5 = 2,25 = 3 \cdot 0,75 \rightarrow \frac{0,5}{3} = \frac{0,75}{4,5} \rightarrow$  Forman una proporción.

**021** Calcula  $x$  para que estas igualdades formen una proporción.

a)  $\frac{3}{8} = \frac{9}{x}$

b)  $\frac{7}{5} = \frac{x}{14}$

c)  $\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$

d)  $\frac{x}{3} = \frac{0,75}{4,5}$

a)  $\frac{3}{8} = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 9}{3} = 24$

b)  $\frac{7}{5} = \frac{x}{14} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 14}{5} = 19,6$

c)  $\frac{12}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8$

d)  $\frac{x}{3} = \frac{0,75}{4,5} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 0,75}{4,5} = 0,5$

**022** Halla los siguientes porcentajes.

a) El 10 % de 520

c) El 42 % de 21

b) El 70 % de 52

d) El 22,5 % de 1.422

$$a) \text{ El } 10\% \text{ de } 520 = 520 \cdot \frac{10}{100} = 52$$

$$b) \text{ El } 70\% \text{ de } 52 = 52 \cdot \frac{70}{100} = 36,4$$

$$c) \text{ El } 42\% \text{ de } 21 = 21 \cdot \frac{42}{100} = 8,82$$

$$d) \text{ El } 22,5\% \text{ de } 1.422 = 1.422 \cdot \frac{22,5}{100} = 319,95$$

**023** El precio por alquilar un coche durante 3 días es 92 €, y por 5 días, 114 €. ¿Guarda proporción el precio por alquilar el vehículo y el número de días?

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 114 = 342 \\ 5 \cdot 92 = 460 \end{array} \right\} \rightarrow \text{El precio por alquilar el vehículo y el número de días} \\ \text{no guardan proporción.}$$

**024** ¿Cuál es el precio de la traducción de una novela de 285 páginas, si por las 30 primeras páginas se han pagado 175 €?

Suponemos que se mantiene la misma proporción:

$$\frac{30}{175} = \frac{285}{x} \rightarrow x = \frac{175 \cdot 285}{30} = 1.662,5$$

El precio de traducción de la novela es 1.662,50 €.

**025** Un pastelero tarda 40 minutos en elaborar una tarta. ¿Cuánto tardará en hacer dos tartas?



Manteniendo la misma proporción, se tardará el doble de tiempo:

$$40 \cdot 2 = 80 \text{ min} = 1 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

**026** El 60 % de los 25 alumnos de la clase van a una excursión. ¿Cuántos alumnos de la clase no van?

$$\text{El } 60\% \text{ de } 25 = 25 \cdot \frac{60}{100} = 15 \text{ alumnos van a la excursión.}$$

Por tanto,  $25 - 15 = 10$  alumnos no van a la excursión.

# Repaso

**027** Completa.

a)  $56,3 \text{ hm} = \dots \text{ m}$

d)  $1.234 \text{ mm} = \dots \text{ dm}$

b)  $1,8 \text{ dam} = \dots \text{ dm}$

e)  $987,5 \text{ dm} = \dots \text{ hm}$

c)  $127 \text{ cm} = \dots \text{ dam}$

f)  $0,76 \text{ m} = \dots \text{ mm}$

a)  $56,3 \text{ hm} = 5.630 \text{ m}$

d)  $1.234 \text{ mm} = 12,34 \text{ dm}$

b)  $1,8 \text{ dam} = 180 \text{ dm}$

e)  $987,5 \text{ dm} = 0,9875 \text{ hm}$

c)  $127 \text{ cm} = 0,127 \text{ dam}$

f)  $0,76 \text{ m} = 760 \text{ mm}$

**028** Calcula.

a)  $3,6 \text{ dam}^2 = \dots \text{ m}^2$

d)  $1.500 \text{ mm}^2 = \dots \text{ dm}^2$

b)  $5,1 \text{ km}^2 = \dots \text{ hm}^2$

e)  $4,67 \text{ dm}^2 = \dots \text{ cm}^2$

c)  $8,3 \text{ m}^2 = \dots \text{ dm}^2$

f)  $578,9 \text{ hm}^2 = \dots \text{ km}^2$

a)  $3,6 \text{ dam}^2 = 360 \text{ m}^2$

d)  $1.500 \text{ mm}^2 = 0,15 \text{ dm}^2$

b)  $5,1 \text{ km}^2 = 510 \text{ hm}^2$

e)  $4,67 \text{ dm}^2 = 467 \text{ cm}^2$

c)  $8,3 \text{ m}^2 = 830 \text{ dm}^2$

f)  $578,9 \text{ hm}^2 = 5,789 \text{ km}^2$

**029** Un camión transporta 20 hl 34 ℓ de leche. Si el precio es 0,92 €/ℓ, ¿cuál es el precio total de la leche?

$$20 \text{ hl } 34 \text{ ℓ} = 2.000 + 34 = 2.034 \text{ ℓ}$$

$$\text{El precio es: } 2.034 \cdot 0,92 = 1.871,28 \text{ €}.$$

**030** Una pieza de ternera pesa 43,24 kg. Si la dividimos en 4 partes iguales, ¿cuánto pesa cada parte?

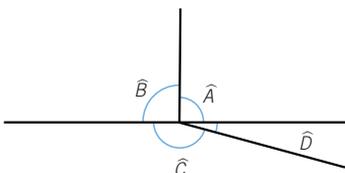
$$\text{Cada parte pesa: } 43,24 : 4 = 10,81 \text{ kg}.$$

**031** Hemos heredado una finca de 3 hectáreas. ¿Cuántos metros cuadrados nos tocarán a cada uno de los 5 herederos?

$$\text{Como } 3 : 5 = 0,6, \text{ cada heredero obtendrá } 0,6 \text{ ha} = 6.000 \text{ m}^2.$$

## GEOMETRÍA

**032** Determina la amplitud de los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  y  $\hat{D}$ .



$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{B} \text{ y } \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{D} = 15^\circ$$

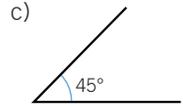
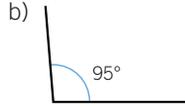
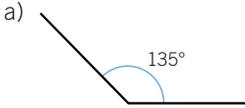
$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ \rightarrow \hat{C} = 165^\circ$$

$$\hat{C} = 165^\circ$$

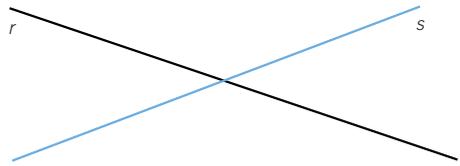
$$\hat{D} = 15^\circ$$

033 Dibuja.

- Un ángulo obtuso mayor de  $80^\circ$ .
- Un ángulo obtuso menor de  $100^\circ$ .
- Un ángulo agudo menor de  $100^\circ$ .



034 Dibuja en tu cuaderno dos rectas,  $r$  y  $s$ , que se corten como las de la figura. Mide con el transportador los cuatro ángulos que forman.

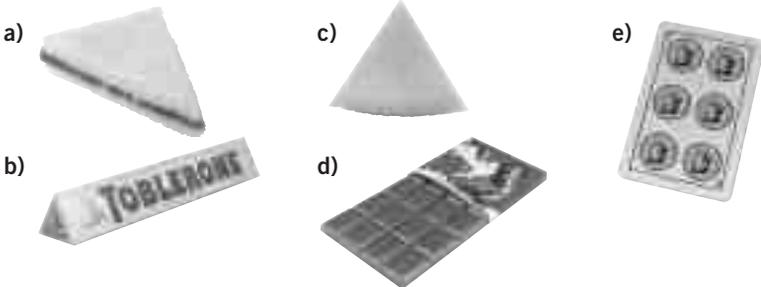


- ¿Cuánto suman los ángulos?
- ¿Hay ángulos iguales?
- ¿Siempre se da este resultado?

Los ángulos obtusos miden  $141^\circ$  y los agudos miden  $39^\circ$ .

- La suma de los cuatro ángulos es  $360^\circ$ .
- Los ángulos obtusos son iguales entre sí y los agudos también.
- Sí, ya que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

035 ¿Se pueden representar estas figuras mediante un polígono?



- Si consideramos que es una figura plana, se podría representar con un triángulo.
- Sus caras son polígonos, triángulos y rectángulos, pero como es un cuerpo no se puede representar con un polígono.
- La parte de la corteza del queso es curva, luego no se puede representar mediante un polígono.
- Si consideramos que es una figura plana, la tableta de chocolate se puede representar con un rectángulo, así como cada una de sus onzas.
- La carta de la baraja no se puede representar con un polígono, puesto que sus esquinas son redondeadas.

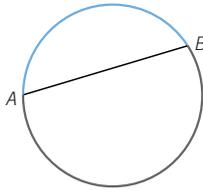
# Repaso

036 Dado un polígono:

- a) ¿Puede haber más vértices que lados?
- b) ¿Y más lados que ángulos?

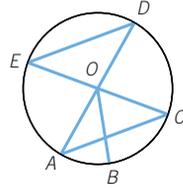
- a) No, pues el número de vértices y lados de un polígono es el mismo.
- b) No, ya que el número de ángulos coincide con el número de vértices y, por tanto, será igual que el número de lados.

037 Traza una circunferencia con un compás. Después, traza una cuerda y los dos arcos que determina.

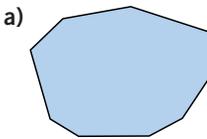


038 En esta circunferencia, señala los segmentos que son cuerdas, los que son radios y los que son diámetros.

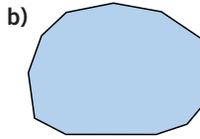
- Cuerdas:  $AC$ ,  $AD$ ,  $CE$  y  $DE$ .
- Radios:  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  y  $OE$ .
- Diámetros:  $AD$  y  $CE$ .



039 Indica el nombre de los polígonos.

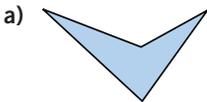


a) Eneágono

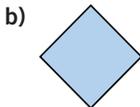


b) Endecágono

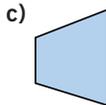
040 Clasifica estos cuadriláteros.



a) Trapezoide



b) Cuadrado



c) Trapecio escaleno



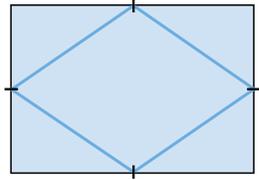
d) Rectángulo



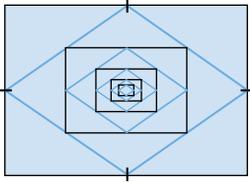
e) Romboide

**041** Dibuja en tu cuaderno un rectángulo. Une los puntos medios de los lados.

- a) ¿Qué paralelogramo obtienes?  
 b) Une los puntos medios del paralelogramo obtenido.



Repite esta operación varias veces. ¿Cómo son los nuevos paralelogramos que resultan?



- a) Se obtiene un rombo.  
 b) Se obtiene un rectángulo.

**042** Contesta a estas preguntas.

- a) ¿Existe un triángulo obtusángulo con los tres ángulos mayores de  $90^\circ$ ?  
 b) ¿Y con dos ángulos mayores de  $90^\circ$ ?  
 c) ¿Puede haber un triángulo isósceles y rectángulo a la vez?  
 d) ¿Existe algún triángulo equilátero y rectángulo a la vez?
- a) No, porque su suma excedería de  $180^\circ$ , que es lo que suman los tres ángulos de un triángulo.  
 b) Tampoco existe, por la razón anterior.  
 c) Sí, un ángulo sería de  $90^\circ$  y los otros dos ángulos iguales de  $45^\circ$ . Este triángulo sería rectángulo por tener un ángulo de  $90^\circ$  e isósceles por tener dos ángulos iguales.  
 d) No, porque los triángulos equiláteros tienen sus ángulos de  $60^\circ$ .

**043** Indica cuáles de estas ternas de longitudes corresponden a los lados de un triángulo.

- a) 3 cm, 4 cm y 5 cm                      c) 5 cm, 15 cm y 30 cm  
 b) 1 cm, 2 cm y 3 cm                      d) 15 cm, 8 cm y 20 cm
- a) Sí corresponde.  
 b) No corresponde, porque el lado mayor es igual a la suma de los otros dos:  $1 + 2 = 3$ .  
 c) No corresponde, porque el lado mayor es mayor que la suma de los otros dos:  $30 > 15 + 5$ .  
 d) Sí corresponde.

**044** En un triángulo  $\widehat{ABC}$ , el ángulo  $\widehat{A}$  mide  $105^\circ$ . ¿Cuánto suman los ángulos  $\widehat{B}$  y  $\widehat{C}$ ?

Si el ángulo  $\widehat{A} = 105^\circ$ , entonces la suma de los otros ángulos es  $75^\circ$ , porque  $180 - 105 = 75$ .

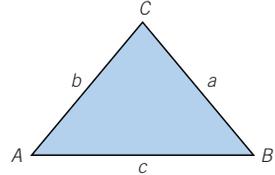
# Repaso

**045** Dos triángulos tienen iguales sus tres lados y dos de sus ángulos. ¿Podemos afirmar que son iguales?

Sí son iguales, porque un triángulo queda determinado por sus tres lados.

**046** ¿Cuál será el valor de los ángulos en un triángulo equilátero?

En un triángulo equilátero, los ángulos miden  $60^\circ$  cada uno.



**047** Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de  $50^\circ$ . ¿Cuánto miden los ángulos iguales?

$$180 - 50 = 130 \rightarrow \frac{130}{2} = 65. \text{ Cada uno de los ángulos iguales mide } 65^\circ.$$

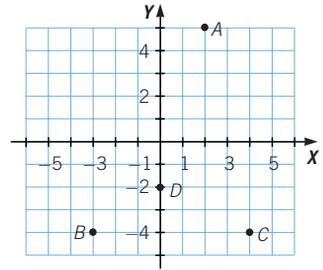
**048** ¿Cuál será el valor de los ángulos iguales en un triángulo rectángulo isósceles?

$$180 - 90 = 90 \rightarrow \frac{90}{2} = 45. \text{ Cada uno de los ángulos iguales mide } 45^\circ.$$

## FUNCIONES

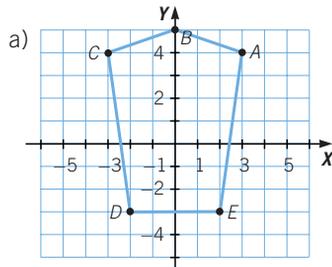
**049** Representa los siguientes puntos en el plano.

- $A(2, 5)$
- $B(-3, -4)$
- $C(4, -4)$
- $D(0, -2)$



**050** Dados los puntos  $A(3, 4)$ ,  $B(0, 5)$ ,  $C(-3, 4)$ ,  $D(-2, -3)$  y  $E(2, -3)$ :

a) Representálos mediante un eje de coordenadas.



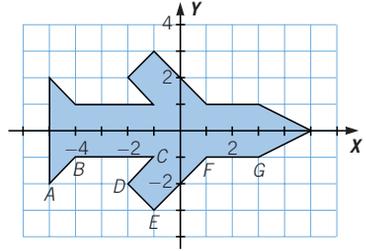
b) Une los puntos en orden alfabético y el punto E con A.

¿Qué figura obtienes?

b) Uniendo los puntos se obtiene un pentágono.

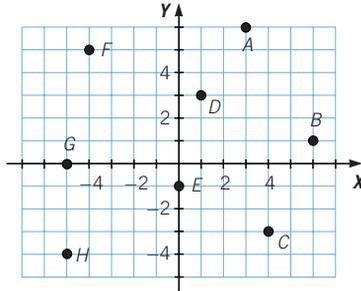
**051** ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que faltan para completar el avión de la figura?

- |             |             |
|-------------|-------------|
| $A(-5, -2)$ | $E(-1, -3)$ |
| $B(-4, -1)$ | $F(1, -1)$  |
| $C(-1, -1)$ | $G(3, -1)$  |
| $D(-2, -2)$ |             |



**052** Indica las coordenadas de los puntos de la figura. Señala las coincidencias entre los siguientes pares de puntos.

- a)  $A$  y  $D$       b)  $B$  y  $E$       c)  $E$  y  $D$       d)  $B$  y  $F$

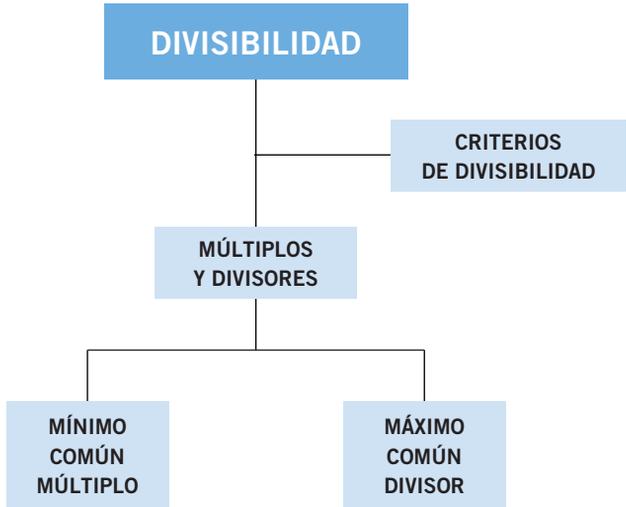


- |            |             |
|------------|-------------|
| $A(3, 6)$  | $E(0, -1)$  |
| $B(6, 1)$  | $F(-4, 5)$  |
| $C(4, -3)$ | $G(-5, 0)$  |
| $D(1, 3)$  | $H(-5, -4)$ |

- Los puntos tienen las coordenadas positivas.
- No tienen ninguna coincidencia.
- No tienen ninguna coincidencia.
- En ambos puntos, la segunda coordenada es positiva, lo que indica que los puntos se encuentran por encima del eje de abscisas.

# 1

# Números enteros



## El año cero

El pequeño monje corría por los pasillos del palacio papal, y su cara denotaba una satisfacción que difícilmente lograba reprimir.

Cuando por fin llegó a la sala donde se encontraba el Papa, se arrodilló, besó su anillo y, con falsa modestia, dijo:

–Lo encontré, Su Santidad: el Año de la Salvación, cuando Nuestro Señor vino al mundo.

El Papa leyó con avidez el documento que Dionisio *el Exiguo* le había entregado, en el que databa el nacimiento de Cristo en el año 753 de la fundación de Roma. Al mismo tiempo, el monje repetía:

–El año 754 de la fundación de Roma es nuestro primer año: *primus anno Domini*, el año primero de la Era del Señor.

Pero lo que estos dos personajes no podían imaginar es que, al contar los años de forma ordinal: año primero, año segundo, año tercero..., eliminaban el año cero. Este hecho provocó una enorme polémica hace algunos años; así, mientras unas personas mantenían que el siglo XXI comenzaba el 1 de enero de 2000, los hechos demostraban que este siglo comenzó el 1 de enero de 2001.

*Jesucristo nació durante el mandato de César Augusto. Si este nació en el año 63 a.C. y murió en el año 14 d.C., ¿cuántos años tenía cuando falleció?*

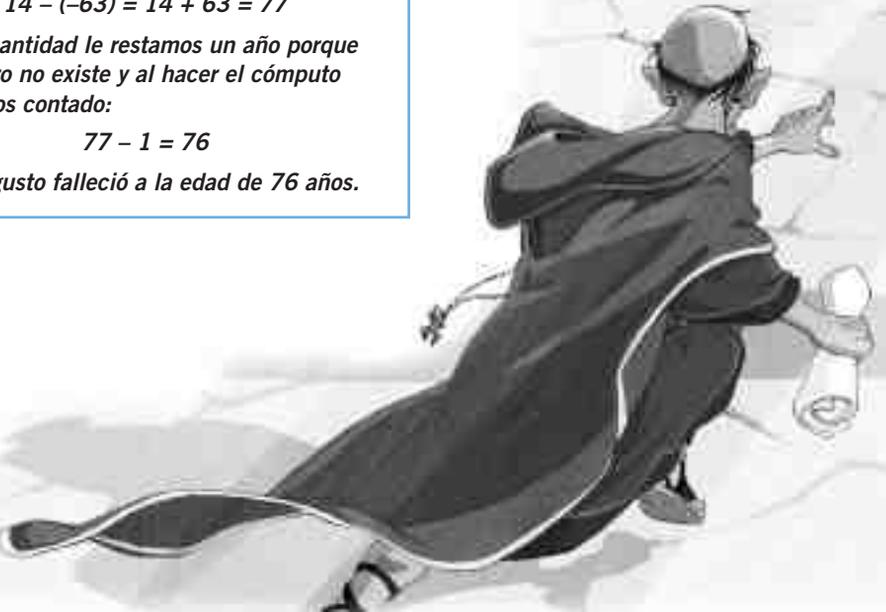
**Para calcular la edad, al año de la muerte se le resta el año del nacimiento:**

$$14 - (-63) = 14 + 63 = 77$$

**Y a esta cantidad le restamos un año porque el año cero no existe y al hacer el cómputo sí lo hemos contado:**

$$77 - 1 = 76$$

**César Augusto falleció a la edad de 76 años.**



# Números enteros

## EJERCICIOS

**001** Expresa con números enteros.

- a) El avión vuela a una altura de tres mil metros.
  - b) El termómetro marca tres grados bajo cero.
  - c) Le debo cinco euros a mi hermano.
- a) +3.000 m
  - b)  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$
  - c)  $-5\text{ }\text{€}$

**002** Halla el valor absoluto de:

$$-4, +5, -13, +27, -1, +18$$

$$|-4| = 4$$

$$|+27| = 27$$

$$|+5| = 5$$

$$|-1| = 1$$

$$|-13| = 13$$

$$|+18| = 18$$

**003** Escribe situaciones que correspondan a estos números.

- a) **+57 €**
  - b) **-100 m**
  - c) **-6 °C**
  - d) **+2**
- a) El precio del taladro es cincuenta y siete euros.
  - b) El calamar vive a cien metros de profundidad.
  - c) La temperatura mínima en enero fue de seis grados bajo cero.
  - d) Somos dos hermanos.

**004** El valor absoluto de un número entero  $a$  es 7. ¿Qué número es?

$$\text{Si } |a| = 7, \text{ entonces } a = +7 \text{ o } a = -7.$$

**005** Escribe el opuesto de estos números.

- a) **-8**
  - b) **+54**
  - c) **+3**
  - d) **-5**
- a) +8
  - b) -54
  - c) -3
  - d) +5

**006** Completa con el signo  $<$  o  $>$ , según corresponda.

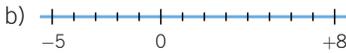
- a)  $-2 \square -5$
  - b)  $-7 \square 0$
  - c)  $-1 \square +2$
  - d)  $-3 \square -4$
- a)  $-2 > -5$
  - b)  $-7 < 0$
  - c)  $-1 < +2$
  - d)  $-3 > -4$

**007** Comprueba gráficamente que se cumplen estas desigualdades.

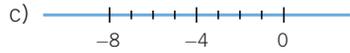
a)  $-4 < +9$



b)  $+8 > -5$



c)  $-8 < -4$



d)  $-4 > -9$



**008** Si  $a < -3$ , ¿puede ser  $a < 0$ ?

Como  $a < -3$  y  $-3 < 0$ , entonces  $a < 0$ .

**009** Calcula utilizando los dos métodos estudiados.

a)  $-11 + 8 - 6 - 7 + 9$

b)  $3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4$

c)  $15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6$

d)  $-(4 - 9 + 3) + (11 - 8 - 7) + (-15)$

e)  $(+3) - (4 + 7 - 9) - (-19 + 3 - 10) + (-2)$

f)  $-8 - 3 - (4 - 6) - (9 + 3) - 5$

$$\begin{aligned} \text{a) } -11 + 8 - 6 - 7 + 9 &= -3 - 6 - 7 + 9 = -9 - 7 + 9 = -16 + 9 = -7 \\ -11 + 8 - 6 - 7 + 9 &= (8 + 9) - (11 + 6 + 7) = 17 - 24 = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 &= -5 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 = \\ &= 7 - 15 - 1 + 10 - 4 = -8 - 1 + 10 - 4 = -9 + 10 - 4 = 1 - 4 = -3 \\ 3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 &= (3 + 12 + 10) - (8 + 15 + 1 + 4) = \\ &= 25 - 28 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6 &= 1 + 9 - 21 - 13 + 6 = 10 - 21 - 13 + 6 = \\ &= -11 - 13 + 6 = -24 + 6 = -18 \\ 15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6 &= (15 + 9 + 6) - (14 + 21 + 13) = \\ &= 30 - 48 = -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -4 + 9 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 &= 5 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 = \\ &= 2 + 11 - 8 - 7 - 15 = 13 - 8 - 7 - 15 = 5 - 7 - 15 = -2 - 15 = -17 \\ -4 + 9 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 &= (9 + 11) - (4 + 3 + 8 + 7 + 15) = \\ &= 20 - 37 = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 3 - 4 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 &= -1 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 = \\ &= -8 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 = 1 + 19 - 3 + 10 - 2 = \\ &= 20 - 3 + 10 - 2 = 17 + 10 - 2 = 27 - 2 = 25 \\ 3 - 4 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 &= (3 + 9 + 19 + 10) - \\ &= (4 + 7 + 3 + 2) = 41 - 16 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } -8 - 3 - 4 + 6 - 9 - 3 - 5 &= -11 - 4 + 6 - 9 - 3 - 5 = \\ &= -15 + 6 - 9 - 3 - 5 = -9 - 9 - 3 - 5 = -18 - 3 - 5 = -21 - 5 = -26 \\ -8 - 3 - 4 + 6 - 9 - 3 - 5 &= 6 - (8 + 3 + 4 + 9 + 3 + 5) = \\ &= 6 - 32 = -26 \end{aligned}$$

# Números enteros

- 010** Cathy tenía en el banco 250 €. Después, ha pagado un recibo de 485 € y ha cobrado 900 €. ¿Cuál es su saldo actual?

$$250 - 485 + 900 = -235 + 900 = 665 \text{ €}$$

- 011** Calcula el valor de  $a$ .

$$4 - (a + 2) - 3 = -1$$

$$4 - a - 2 - 3 = -1 \rightarrow -1 - a = -1 \rightarrow a = 0$$

- 012** Resuelve estas multiplicaciones.

a)  $(-3) \cdot (+2)$

d)  $(+2) \cdot (+7)$

b)  $(-2) \cdot (-8)$

e)  $(+5) \cdot (-4)$

c)  $(+7) \cdot (-4)$

f)  $(-5) \cdot (-7)$

a) -6

d) 14

b) 16

e) -20

c) -28

f) 35

- 013** Calcula las divisiones.

a)  $(-12) : (+6)$

d)  $(+21) : (+7)$

b)  $(-6) : (-2)$

e)  $(+24) : (-4)$

c)  $(+28) : (-4)$

f)  $(-42) : (-7)$

a) -2

d) 3

b) 3

e) -6

c) -7

f) 6

- 014** Resuelve estas operaciones.

a)  $(-4) \cdot (+2) \cdot (-6)$

d)  $(+20) : (+2) : (-5)$

b)  $(+8) \cdot (-3) \cdot (-4)$

e)  $(-32) : (-4) : (-8)$

c)  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$

f)  $(-80) : (-20) : (-4)$

a) 48

d) -2

b) 96

e) -1

c) -24

f) -1

- 015** Completa con los números adecuados.

a)  $(\square) : 4 = -10$

c)  $(-100) : (\square) = -25$

b)  $40 : (\square) = -8$

d)  $(\square) : (-12) = 6$

a)  $(-40) : 4 = -10$

c)  $(-100) : 4 = -25$

b)  $40 : (-5) = -8$

d)  $(-72) : (-12) = 6$

**016** Escribe cómo se leen las potencias y calcula su valor.

- |          |             |           |             |
|----------|-------------|-----------|-------------|
| a) $3^5$ | c) $(-8)^6$ | e) $10^3$ | g) $(-4)^2$ |
| b) $2^2$ | d) $(-5)^3$ | f) $4^2$  | h) $(-2)^3$ |
- a) 3 elevado a 5 es 243.                      e) 10 al cubo es 1.000.  
b) 2 al cuadrado es 4.                      f) 4 al cuadrado es 16.  
c)  $-8$  elevado a 6 es 262.144.              g)  $-4$  al cuadrado es 16.  
d)  $-5$  al cubo es  $-125$ .                      h)  $-2$  al cubo es  $-8$ .

**017** Expresa en forma de potencia y halla su valor.

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| a) $6 \cdot 6 \cdot 6$                 | c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$ |
| b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | d) $(-5) \cdot (-5)$            |
- a)  $6^3 = 216$                                       c)  $(-2)^3 = -8$   
b)  $2^5 = 64$                                       d)  $(-5)^2 = 25$

**018** Calcula el exponente de estas potencias.

- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| a) $3^{\square} = 27$     | c) $4^{\square} = 64$    |
| b) $(-3)^{\square} = -27$ | d) $(-2)^{\square} = 16$ |
- a)  $3^3 = 27$                                       c)  $4^3 = 64$   
b)  $(-3)^3 = -27$                               d)  $(-2)^4 = 16$

**019** Busca dos números tales que, al elevarlos a la cuarta potencia, tengan el mismo valor. ¿Cuántos números cumplen esta condición?

Por ejemplo,  $2^4 = 16 = (-2)^4$ .

Todo número y su opuesto elevados a la cuarta dan el mismo resultado.

**020** Escribe estos números con potencias de 10.

- |            |                    |
|------------|--------------------|
| a) 20.000  | c) 493.000.000     |
| b) 493.000 | d) 315.000.000.000 |
- a)  $2 \cdot 10^4$                                       c)  $493 \cdot 10^6$   
b)  $493 \cdot 10^3$                                       d)  $315 \cdot 10^9$

**021** Realiza las operaciones con potencias.

- |                    |                |                          |                      |
|--------------------|----------------|--------------------------|----------------------|
| a) $3^4 \cdot 3^5$ | b) $6^7 : 6^4$ | c) $(-3)^6 \cdot (-3)^7$ | d) $(-6)^8 : (-6)^4$ |
| a) $3^9$           | b) $6^3$       | c) $(-3)^{13}$           | d) $(-6)^4$          |

**022** Indica el número que expresan las sumas.

- |   |   |
|---|---|
| a) $3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2$ | b) $2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10$ |
| a) 3.412  | b) 2.050.070                                  |

# Números enteros

**023** Calcula el exponente que falta.

a)  $4^6 \cdot 4^{\square} = 4^9$

b)  $(-7)^{\square} : (-7)^3 = (-7)^3$

a)  $4^6 \cdot 4^3 = 4^9$

b)  $(-7)^6 : (-7)^3 = (-7)^3$

**024** Calcula estas potencias.

a)  $(7^4)^6$

c)  $4^0$

e)  $(-4)^1$

b)  $((-2)^3)^4$

d)  $(-2)^0$

f)  $23^1$

a)  $7^{24}$

d) 1

b)  $(-2)^{12}$

e) -4

c) 1

f) 23

**025** Expresa como un producto o una división de potencias.

a)  $(3 \cdot 2)^3$

c)  $[(-3) \cdot 2]^3$

e)  $[(-3) \cdot (-2)]^3$

b)  $(8 : 4)^4$

d)  $[(-8) : 4]^4$

f)  $[(-8) : (-4)]^4$

a)  $3^3 \cdot 2^3$

d)  $(-8)^4 : 4^4$

b)  $8^4 : 4^4$

e)  $(-3)^3 \cdot (-2)^3$

c)  $(-3)^3 \cdot 2^3$

f)  $(-8)^4 : (-4)^4$

**026** Expresa como una sola potencia.

a)  $8^3 \cdot 2^3$

c)  $(-12)^5 \cdot 4^5$

e)  $(-14)^8 \cdot (-7)^8$

b)  $8^3 : 2^3$

d)  $(-12)^5 : 4^5$

f)  $(-14)^8 : (-7)^8$

a)  $16^3$

c)  $(-48)^5$

e)  $98^8$

b)  $4^3$

d)  $(-3)^5$

f)  $2^8$

**027** Sin operar, di si las desigualdades son ciertas.

a)  $(1 : 2)^3 < \frac{1}{4}$

b)  $(-2 : 7)^3 > 1$

a) Cierta

b) Falsa

**028** Halla la raíz cuadrada de estos números.

a) 169

c) 196

e) 225

b) 400

d) 900

f) 1.600

a) 13

c) 14

e) 15

b) 20

d) 30

f) 40

**029** Calcula la raíz cuadrada entera y el resto.

a) 45

b) 87

c) 115

a) Raíz: 6, resto: 9.

b) Raíz: 9, resto: 6.

c) Raíz: 10, resto: 15.

**030** Obtén un número cuya raíz cuadrada entera sea 6 y su resto 2.

$$6 \cdot 6 + 2 = 36 + 2 = 38$$

**031** ¿Cuánto puede valer como máximo el resto de una raíz cuadrada entera?

El resto es como máximo el doble de la raíz entera.

**032** Calcula.

a)  $(+4) \cdot (-7) + (-3) \cdot (-2)$

c)  $(-4) \cdot (-5) - (+3) \cdot (-2)$

b)  $(+16) : (-8) + (-24) : (-6)$

d)  $(-12) : (-3) - (+4) : (-2)$

a)  $-28 + 6 = -22$

c)  $20 - (-6) = 26$

b)  $-2 + 4 = 2$

d)  $4 - (-2) = 6$

**033** Haz estas operaciones.

a)  $(+7) - (-12) \cdot (+5)$

c)  $(\sqrt{64} - \sqrt{16}) : (2 \cdot (-2))$

b)  $(-5) - [(-6) - (-5) \cdot (-9)]$

d)  $(\sqrt{81} - 4) \cdot \sqrt{25} - 1$

a)  $(+7) - (-12) \cdot (+5) = 7 + 60 = 67$

b)  $(-5) - [(-6) - (-5) \cdot (-9)] = -5 - [-6 - 45] = -5 - (-51) = -5 + 51 = 46$

c)  $(\sqrt{64} - \sqrt{16}) : (2 \cdot (-2)) = (8 - 4) : (-4) = 4 : (-4) = -1$

d)  $(\sqrt{81} - 4) \cdot \sqrt{25} - 1 = (9 - 4) \cdot \sqrt{25} - 1 = 5 \cdot \sqrt{25} - 1 = 5 \cdot 5 - 1 = 25 - 1 = 24$

**034** Resuelve las operaciones.

a)  $(+45) : [(-7) + (+2)]$

d)  $(-8) \cdot [(+21) : (-3)]$

b)  $(+2) \cdot [(-63) : (-7)]$

e)  $(-7) - [(-14) : (+2) - (-7)]$

c)  $(-25) : [(+3) - (+8)]$

a)  $(+45) : [(-7) + (+2)] = 45 : [-7 + 2] = 45 : (-5) = -9$

b)  $(+2) \cdot [(-63) : (-7)] = 2 \cdot 9 = 18$

c)  $(-25) : [(+3) - (+8)] = -25 : (-5) = 25 : 5 = 5$

d)  $(-8) \cdot [(+21) : (-3)] = -8 \cdot (-7) = 56$

e)  $(-7) - [(-14) : (+2) - (-7)] = -7 - (-7 + 7) = -7$

**035** Calcula.

a)  $(+50) - (-4)^2 + (-3)^3$

b)  $-\sqrt{64} - (-5)^2 - (-12)$

a)  $(+50) - (-4)^2 + (-3)^3 = 50 - (+16) + (-27) = 50 - 16 - 27 = 50 - 43 = 7$

b)  $-\sqrt{64} - (-5)^2 - (-12) = -8 - (+25) + 12 = -8 - 25 + 12 = -33 + 12 = -21$

# Números enteros

**036** Calcula diez múltiplos y todos los divisores de estos números.

- a)  $-8$                       b)  $-7$                       c)  $4$                                       d)  $-10$

¿Cuántos múltiplos tiene un número entero?

a)  $(-8) = \{0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \pm 32, \pm 40\}$      $\text{Div}(-8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

b)  $(-7) = \{0, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \pm 35\}$      $\text{Div}(-7) = \{\pm 1, \pm 7\}$

c)  $4 = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20\}$      $\text{Div}(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

d)  $(-10) = \{0, \pm 10, \pm 20, \pm 30, \pm 40, \pm 50\}$      $\text{Div}(-10) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Un número entero tiene infinitos múltiplos.

**037** ¿Cuáles de los siguientes números son primos? ¿Por qué?

**4, -5, 9, 11, -14, 17, -21**

$-5$  es primo, porque solo tiene dos divisores:  $\{\pm 1, \pm 5\}$ .

$11$  es primo, porque solo tiene dos divisores:  $\{\pm 1, \pm 11\}$ .

$17$  es primo, porque solo tiene dos divisores:  $\{\pm 1, \pm 17\}$ .

**038** Completa.

**Div  $(-18) = \{\pm 1, \square, \square, \pm 6, \square, \pm 18\}$     Div  $(45) = \{\pm 1, \square, \square, \square, \square, \pm 45\}$**

$\text{Div}(-18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$      $\text{Div}(45) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45\}$

**039** Halla los divisores de estos números.

- a)  $-28$                       b)  $-36$                       c)  $100$                                       d)  $-23$

a)  $\text{Div}(-28) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$

b)  $\text{Div}(-36) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$

c)  $\text{Div}(100) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100\}$

d)  $\text{Div}(-23) = \{\pm 1, \pm 23\}$

**040** Comprueba si son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11.

- a) **145**                      b) **3.467**                      c) **12.624**                                      d)  **$-212$**

a) 145 es divisible por 5.

b) 3.467 no es divisible por ninguno de estos números.

c) 12.624 es divisible por 2 y 3.

d)  $-212$  es divisible por 2 y 11.

**041** Descompón en factores primos.

- a) **210**                      b)  **$-210$**                       c)  **$-66$**                                       d) **92**

a)  $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

c)  $-66 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$

b)  $-210 = (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

d)  $92 = 2^2 \cdot 23$

**042** Escribe todas las parejas de números cuyo producto dé como resultado 30.

1 y 30, 2 y 15, 3 y 10, 5 y 6;  $-1$  y  $-30$ ,  $-2$  y  $-15$ ,  $-3$  y  $-10$ ,  $-5$  y  $-6$

**043** Calcula  $a$  para que  $3a6$  sea múltiplo de 11.

$$a = 3 + 6 = 9$$

**044** Descompón estos números en factores primos, y calcula su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

**a) 18 y 20**

**d) 18 y 32**

**b) 28 y 42**

**e) 48 y 32**

**c) 18 y 4**

**f)  $-21$  y 28**

a)  $18 = 2 \cdot 3^2$

$20 = 2^2 \cdot 5$

m.c.d. (18, 20) = 2

m.c.m. (18, 20) = 180

d)  $18 = 2 \cdot 3^2$

$32 = 2^5$

m.c.d. (18, 32) = 2

m.c.m. (18, 32) = 288

b)  $28 = 2^2 \cdot 7$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

m.c.d. (28, 42) = 14

m.c.m. (28, 42) = 84

e)  $48 = 2^4 \cdot 3$

$32 = 2^5$

m.c.d. (48, 32) = 16

m.c.m. (48, 32) = 96

c)  $18 = 2 \cdot 3^2$

$4 = 2^2$

m.c.d. (18, 4) = 2

m.c.m. (18, 4) = 36

f)  $-21 = (-1) \cdot 3 \cdot 7$

$28 = 2^2 \cdot 7$

m.c.d. ( $-21$ , 28) = 7

m.c.m. ( $-21$ , 28) = 84

**045** Halla el m.c.d. y el m.c.m. de estos números.

**a) 10, 12 y 35**

**b) 15, 20 y 27**

$$\left. \begin{array}{l} a) \ 10 = 2 \cdot 5 \\ \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \\ \quad 35 = 5 \cdot 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{m.c.d. (10, 12, 35)} = 1 \\ \text{m.c.m. (10, 12, 35)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \ 15 = 3 \cdot 5 \\ \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \\ \quad 27 = 3^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{m.c.d. (15, 20, 27)} = 1 \\ \text{m.c.m. (15, 20, 27)} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540 \end{array}$$

**046** ¿Es único el valor que cumple que  $\text{m.c.m.}(x, 8) = 40$ ?

No es único, ya que  $x$  puede valer 5, 10, 20 o 40.

# Números enteros

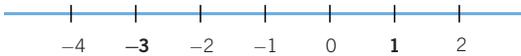
## ACTIVIDADES

047 Expresa con un número entero.

- a) Luis ganó 6.000 € en la lotería.
- b) El termómetro marcó 7 °C bajo cero.
- c) Marta vive en el cuarto piso.
- d) La tienda está en el segundo sótano.

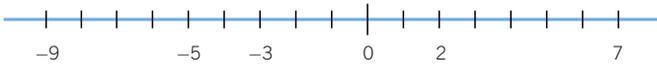
- a) +6.000
- b) -7
- c) +4
- d) -2

048 Completa la siguiente recta numérica.



049 Representa estos números enteros en una recta numérica.

-5, 7, -9, 0, -3, 2



050 ¿Cuántos números enteros hay entre -4 y 4?



Hay 7 números.

051 Completa con el signo < o >.

- a)  $-9 \square -12$
- b)  $3 \square -2$
- c)  $-1 \square -4$
- d)  $-7 \square -5$
- a)  $-9 > -12$
- b)  $3 > -2$
- c)  $-1 > -4$
- d)  $-7 < -5$

052 Escribe el número anterior y posterior.

- a)  $\square < 4 < \square$
- b)  $\square < 12 < \square$
- c)  $\square < -4 < \square$
- d)  $\square < -8 < \square$
- a)  $3 < 4 < 5$
- b)  $11 < 12 < 13$
- c)  $-5 < -4 < -3$
- d)  $-9 < -8 < -7$

**053** Halla un número entero que esté comprendido entre los números que se indican.

a)  $-3 < \square < 0$

c)  $7 < \square < 10$

b)  $-8 < \square < -5$

d)  $-4 < \square < -2$

a)  $-3 < -2 < 0$

c)  $7 < 9 < 10$

b)  $-8 < -6 < -5$

d)  $-4 < -3 < -2$

**054** Escribe dos números enteros.

a) Menores que  $+3$  y mayores que  $-1$ .

b) Menores que  $-3$ .

c) Mayores que  $-6$ .

d) Mayores que  $-2$  y menores que  $+1$ .

a)  $-1 < 0 < +2 < +3$

c)  $-6 < -4 < -3$

b)  $-6 < -5 < -3$

d)  $-2 < -1 < 0 < +1$

**055** Ordena, de menor a mayor, los siguientes números.

$$-4, 6, -7, 11, -9, -6, 0, 2, -1$$

$$-9 < -7 < -6 < -4 < -1 < 0 < 2 < 6 < 11$$

**056** El opuesto de un número es  $-5$ . ¿Cuál es el número?

Si  $\text{op}(n) = -5$ , entonces  $n = 5$ .

**057** El opuesto del opuesto de un número es  $+3$ . ¿Cuál es ese número?

Si  $\text{op}(\text{op}(n)) = +3$ , entonces  $n = 3$ .

**058** ¿Qué valores puede tomar  $a$  en cada caso?

a)  $|a| = 6$

b)  $|a| = 17$

a)  $a = -6$  o  $a = 6$

b)  $a = -17$  o  $a = 17$

**059** ¿Cómo es el valor absoluto de un número cualquiera y de su opuesto?

El valor absoluto es siempre positivo; por ejemplo,  $|-3| = 3$  y  $|3| = 3$ .

**060** ¿Puede ser  $|x| = -1$ ? Razónalo.

No, porque el valor absoluto de cualquier número es siempre positivo.

# Números enteros

**061** Calcula las siguientes sumas y restas.

- a)  $(+12) + (+25)$
- b)  $(-9) + (+13)$
- c)  $(-3) + (-11)$
- d)  $(+17) + (-8)$
- e)  $(+19) - (+5)$
- f)  $(-21) - (+33)$
- g)  $(-7) - (-11)$
- h)  $(+22) - (-15)$

- a) 37
- b) 4
- c) -14
- d) 9
- e) 14
- f) -54
- g) 4
- h) 37

**062** Completa la siguiente tabla.

Fíjate en las dos últimas columnas. ¿Qué observas?

$a$	$b$	$a - b$	$b - a$	$a + b$	$b + a$
-7	+9	-16	16	2	2
-12	-5	-7	7	-17	-17
+11	-18	29	-29	-7	-7
+23	+17	6	-6	40	40

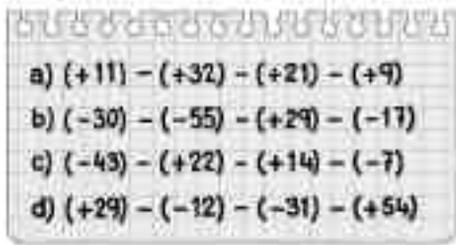
La suma cumple la propiedad conmutativa, pero la resta no la cumple.

**063** Realiza las siguientes sumas.

- a)  $(+10) + (-5) + (+7) + (-9)$
- b)  $(-29) + (-12) + (-9) + (+17)$
- c)  $(-20) + (+33) + (+21) + (-23)$
- d)  $(-23) + (-41) + (-16) + (+50)$

- a)  $(+10) + (-5) + (+7) + (-9) = 10 - 5 + 7 - 9 = 17 - 14 = 3$
- b)  $(-29) + (-12) + (-9) + (+17) = -29 - 12 - 9 + 17 = 17 - 50 = -33$
- c)  $(-20) + (+33) + (+21) + (-23) = -20 + 33 + 21 - 23 = 54 - 43 = 11$
- d)  $(-23) + (-41) + (-16) + (+50) = -23 - 41 - 16 + 50 = 50 - 80 = -30$

064 Calcula estas restas.



a)  $(+11) - (+32) - (+21) - (+9)$   
 b)  $(-30) - (-55) - (+29) - (-17)$   
 c)  $(-43) - (+22) - (+14) - (-7)$   
 d)  $(+29) - (-12) - (-31) - (+54)$

- a)  $(+11) - (+32) - (+21) - (+9) = 11 - 32 - 21 - 9 = 11 - 62 = -51$   
 b)  $(-30) - (-55) - (+29) - (-17) = -30 + 55 - 29 + 17 = 72 - 59 = 13$   
 c)  $(-43) - (+22) - (+14) - (-7) = -43 - 22 - 14 + 7 = 7 - 79 = -72$   
 d)  $(+29) - (-12) - (-31) - (+54) = 29 + 12 + 31 - 54 = 72 - 54 = 18$

065 Realiza estas sumas y restas combinadas.

- a)  $(-21) + (-12) - (+9)$   
 b)  $(+17) - (+23) + (+34)$   
 c)  $(-32) + (-19) - (-11)$   
 d)  $(-54) - (+22) + (-10)$

- a)  $(-21) + (-12) - (+9) = -21 - 12 - 9 = -42$   
 b)  $(+17) - (+23) + (+34) = 17 - 23 + 34 = 51 - 23 = 28$   
 c)  $(-32) + (-19) - (-11) = -32 - 19 + 11 = 11 - 51 = -40$   
 d)  $(-54) - (+22) + (-10) = -54 - 22 - 10 = -86$

066 Calcula.

- a)  $8 - 7 + 4 - 3 - 2$   
 b)  $-7 - 5 + 3 - 9 - 1 + 11$   
 c)  $-4 - 2 + 5 - 1 - 4 + 1$   
 d)  $6 - 3 + 3 - 10 - 4 + 13$   
 e)  $-9 - 14 + 4 - 56 - 16 + 1$   
 f)  $9 + 14 - 6 - 93 + 19$

- a) 0  
 b) -8  
 c) -5  
 d) 5  
 e) -90  
 f) -57

# Números enteros

## 067 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE SUMAS Y RESTAS COMBINADAS CON PARÉNTESIS?

Calcula:  $-3 + (-8 + 9) - (3 - 6)$ .

**PRIMERO.** Se eliminan los paréntesis.

– Si están precedidos por el signo +, se dejan las operaciones del interior como aparecen.

– Si están precedidos por el signo –, todos los signos del interior se transforman en sus opuestos.

$$\begin{array}{r} \xrightarrow{\quad} +(-8+9) = -8+9 \\ -3 + \overbrace{(-8+9)} \quad - \overbrace{(3-6)} = -3 - 8 + 9 - 3 + 6 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad -(3-6) = -3+6 \end{array}$$

**SEGUNDO.** Se agrupan los sumandos positivos, por un lado, y los negativos, por otro.

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \overbrace{\quad\quad\quad} \\ -3 - 8 + 9 - 3 + 6 = (9 + 6) - (3 + 8 + 3) = \\ \underbrace{\quad\quad\quad} \quad \quad \quad = 15 - 14 = 1 \end{array}$$

## 068 Realiza estas operaciones.



a)  $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1)$

c)  $3 + (2 - 3) - (1 - 5 - 7)$

b)  $7 - (4 - 3) + (-1 - 2)$

d)  $-8 + (1 + 4) + (-7 - 9)$

a)  $6 - 4 + 2 + 3 + 1 = 8$

c)  $3 + 2 - 3 - 1 + 5 + 7 = 13$

b)  $7 - 4 + 3 - 1 - 2 = 3$

d)  $-8 + 1 + 4 - 7 - 9 = -19$

## 069 Completa los huecos para que las igualdades sean ciertas.



a)  $(-11) + \square = +4$

d)  $(+3) - \square = -7$

b)  $(+13) + \square = +12$

e)  $(-15) - \square = +9$

c)  $\square + (-20) = -12$

f)  $\square - (+8) = +7$

a)  $(-11) + 15 = +4$

d)  $(+3) - 10 = -7$

b)  $(+13) + (-1) = +12$

e)  $(-15) - (-24) = +9$

c)  $8 + (-20) = -12$

f)  $15 - (+8) = +7$

## 070 Calcula los siguientes productos.



a)  $(+12) \cdot (+4)$

c)  $(+5) \cdot (-35)$

b)  $(-42) \cdot (-3)$

d)  $(-14) \cdot (+5)$

a) 48

c) -175

b) 126

d) -70

071 Completa esta tabla.

¿Qué observas en las dos últimas columnas?

$a$	$b$	$a \cdot b$	$b \cdot a$
-4	-6	24	24
+6	-8	-48	-48
-9	+5	-45	-45
+7	+8	56	56

La multiplicación cumple la propiedad conmutativa.

072 Calcula los siguientes productos.

a)  $(+21) \cdot (+3) \cdot (+4)$

b)  $(+19) \cdot (-2) \cdot (+3)$

c)  $(+13) \cdot (-5) \cdot (-6)$

d)  $(-20) \cdot (-9) \cdot (-3)$

a) 252

b) -114

c) 390

d) -540

073 Completa estos productos.

a)  $(-5) \cdot \square = -30$

b)  $\square \cdot (+3) = 45$

c)  $(-9) \cdot \square = 27$

d)  $\square \cdot (-8) = -48$

a)  $(-5) \cdot 6 = -30$

c)  $(-9) \cdot (-3) = 27$

b)  $15 \cdot (+3) = 45$

d)  $6 \cdot (-8) = -48$

074 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE SACA FACTOR COMÚN EN OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS?

Calcula:  $-12 \cdot (-27) + (-12) \cdot (+17)$ .

**Sacar factor común** consiste en aplicar la propiedad distributiva en sentido inverso:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

**PRIMERO.** Se determina si existe un factor que se repite en todos los sumandos.

$$-12 \cdot (-27) + (-12) \cdot (+17)$$

└──────────┬──────────┘ ── -12 se repite en los dos sumandos

**SEGUNDO.** El factor que se repite multiplica la suma o resta de los sumandos.

$$-12 \cdot (-27) + (-12) \cdot (+17) =$$

$$= -12 \cdot [(-27) + (+17)] = -12 \cdot (-10) = 120$$

# Números enteros

**075** Resuelve sacando factor común.



a)  $(-3) \cdot (-4) + (-3) \cdot (-9)$

b)  $7 \cdot (-12) + 7 \cdot (+6)$

c)  $(-5) \cdot (+11) + (-5) \cdot (-10)$

a)  $(-3) \cdot [(-4) + (-9)] = 39$

b)  $7 \cdot [(-12) + (+6)] = -42$

c)  $(-5) \cdot [(+11) + (-10)] = -5$

**076** Completa sacando factor común.



a)  $5 \cdot (-4) + 5 \cdot (-7) = 5 \cdot [\square + (-7)]$

b)  $(-9) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4) = \square \cdot [2 + (-4)]$

a)  $5 \cdot (-4) + 5 \cdot (-7) = 5 \cdot [(-4) + (-7)]$

b)  $(-9) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4) = (-9) \cdot [2 + (-4)]$

**077** Realiza estas divisiones.



a)  $(+35) : (-7) : (-5)$

c)  $(+32) : (-8) : (-2)$

b)  $(-21) : (-7) : (-1)$

d)  $(-4) : (+4) : (-1)$

a) 1

c) 2

b) -3

d) 1

**078** Opera.



a)  $(+21) \cdot (+2) : (-14)$

d)  $[(-2) \cdot (+7)] : (-14) \cdot (+3)$

b)  $(+5) : (-5) \cdot (-4)$

e)  $(+36) : [(-9) : (+3)] \cdot (+5)$

c)  $(+2) \cdot (+9) : (-3)$

f)  $(+36) : (-9) : (+2) \cdot (+5)$

a)  $42 : (-14) = 3$

d)  $(-14) : (-14) \cdot (+3) = -3$

b)  $(-1) \cdot (-4) = 4$

e)  $(+36) : (-3) \cdot (+5) = -60$

c)  $18 : (-3) = -6$

f)  $(-4) : (+2) \cdot (+5) = -10$

**079** Completa las siguientes divisiones.



a)  $(-36) : \square = -4$

d)  $(+48) : \square = -6$

b)  $(-54) : \square = +9$

e)  $(-63) : \square = -7$

c)  $\square : (-6) = -42$

f)  $\square : (+8) = +2$

a)  $(-36) : (+9) = -4$

d)  $(+48) : (-8) = -6$

b)  $(-54) : (-6) = +9$

e)  $(-63) : (+9) = -7$

c)  $(+252) : (-6) = -42$

f)  $(+16) : (+8) = +2$

**080** Escribe en forma de potencia, e indica la base y el exponente.

a)  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

b)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

c)  $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

a)  $7^4 \longrightarrow$  Base: 7, exponente: 4.

b)  $(-2)^3 \rightarrow$  Base: -2, exponente: 3.

c)  $(-5)^5 \rightarrow$  Base: -5, exponente: 5.

**081** Escribe en forma de potencia y en forma de producto.

a) Base 11 y exponente 4.

b) Base -2 y exponente 3.

a)  $11^4 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$

b)  $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

**082** Calcula las siguientes potencias.

a)  $4^5$

c)  $14^2$

e)  $7^3$

g)  $5^4$

b)  $(-2)^6$

d)  $(-4)^4$

f)  $(-9)^2$

h)  $(-6)^4$

a) 1.024

e) 343

b) 64

f) 81

c) 196

g) 625

d) 256

h) 1.296

**083** Completa.

a)  $(-2)^{\square} = 4$

c)  $(-2)^{\square} = -8$

b)  $(-3)^{\square} = 9$

d)  $(-3)^{\square} = -27$

a)  $(-2)^2 = 4$

c)  $(-2)^3 = -8$

b)  $(-3)^2 = 9$

d)  $(-3)^3 = -27$

**084** Calcula las siguientes potencias.

a)  $5^0$

b)  $23^1$

c)  $(-3)^0$

d)  $(-57)^1$

a) 1

c) 1

b) 23

d) -57

**085** Expresa como una sola potencia.

a)  $5^3 \cdot 5^4$

c)  $(-3)^5 \cdot (-3)^3$

b)  $11^6 \cdot 11^4$

d)  $(-8)^4 \cdot (-8)^7$

a)  $5^7$

c)  $(-3)^8$

b)  $11^{10}$

d)  $(-8)^{11}$

# Números enteros

**086** Expresa como una sola potencia.

- a)  $4^3 \cdot 4^3 \cdot 4$  c)  $(-2)^6 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)$
- b)  $9^5 \cdot 9^2 \cdot 9^4$  d)  $(-7)^3 \cdot (-7) \cdot (-7)^6$
- a)  $4^7$  c)  $(-2)^{11}$
- b)  $9^{11}$  d)  $(-7)^{10}$

**087** Completa.

- a)  $5^4 \cdot 5^\square \cdot 5^2 = 5^9$
- b)  $13 \cdot 13^3 \cdot 13^\square = 13^5$
- c)  $(-11)^\square \cdot (-11)^4 \cdot (-11) = (-11)^7$
- d)  $(-21)^8 \cdot (-21)^3 \cdot (-21)^\square = (-21)^{11}$
- a)  $5^3$  c)  $(-11)^2$
- b)  $13$  d)  $(-21)^0$

**088** Expresa como una sola potencia.

- a)  $7^5 : 7^3$  c)  $(-9)^6 : (-9)^3$
- b)  $12^8 : 12^5$  d)  $(-6)^7 : (-6)^3$
- a)  $7^2$  c)  $(-9)^3$
- b)  $12^3$  d)  $(-6)^4$

**089** Expresa como una sola potencia.

- a)  $(2^8 : 2^3) \cdot 2^3$  c)  $[(-4)^6 : (-4)] : (-4)^2$
- b)  $3^5 : (3^7 : 3^4)$  d)  $(-5)^3 : [(-5)^4 : (-5)]$
- a)  $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$  c)  $(-4)^5 : (-4)^2 = (-4)^3$
- b)  $3^5 : 3^3 = 3^2$  d)  $(-5)^3 : (-5)^3 = (-5)^0$

**090** Expresa como una sola potencia.

- a)  $(5^4)^3$  c)  $[(-3)^4]^3$
- b)  $(7^5)^2$  d)  $[(-9)^3]^3$
- a)  $5^{12}$  c)  $(-3)^{12}$
- b)  $7^{10}$  d)  $(-9)^9$

**091** Completa.

- a)  $(3^6)^\square = 3^{18}$  c)  $[(-2)^\square]^4 = (-2)^8$
- b)  $(8^5)^\square = 8^{20}$  d)  $[(-7)^3]^\square = (-7)^9$
- a)  $(3^6)^3 = 3^{18}$  c)  $[(-2)^2]^4 = (-2)^8$
- b)  $(8^5)^4 = 8^{20}$  d)  $[(-7)^3]^3 = (-7)^9$

092 Expresa como una sola potencia.

a)  $(2^5)^2 \cdot (2^2)^4$

b)  $(10^3)^3 \cdot (10^2)^4$

a)  $2^{10} \cdot 2^8 = 2^{18}$

b)  $10^9 \cdot 10^8 = 10^{17}$

c)  $[(-3^5)]^3 \cdot [(-3^4)]^3$

d)  $[(-10^2)]^2 \cdot [(-10^3)]^3$

c)  $(-3)^{15} \cdot (-3)^{12} = (-3)^{27}$

d)  $(-10)^4 \cdot (-10)^9 = (-10)^{13}$

093 Expresa como una sola potencia.

a)  $(6^2)^5 : (6^3)^3$

b)  $(23^7)^2 : (23^3)^4$

a)  $6^{10} : 6^9 = 6$

b)  $23^{14} : 23^{12} = 23^2$

c)  $[(-14^9)]^2 : [(-14^3)]^5$

d)  $[(-2^8)]^3 : [(-2^4)]$

c)  $(-14)^{18} : (-14)^{15} = (-14)^3$

d)  $(-2)^{24} : (-2)^4 = (-2)^{20}$

094 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CUANDO LAS BASES TIENEN FACTORES PRIMOS COMUNES?

Simplifica estos productos de potencias.

a)  $8^4 \cdot 16^2$

b)  $3^4 \cdot 9^2$

c)  $(-3)^4 \cdot 18^2$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en producto de factores primos.

a)  $8 = 2^3$

b)  $3 = 3$

c)  $-3 = (-1) \cdot 3$

$16 = 2^4$

$9 = 3^2$

$18 = 2 \cdot 3^2$

SEGUNDO. Se sustituyen las bases por su descomposición en factores y se opera.

a)  $8^4 \cdot 16^2 = (2^3)^4 \cdot (2^4)^2 = 2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

b)  $3^4 \cdot 9^2 = 3^4 \cdot (3^2)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$

c)  $(-3)^4 \cdot 18^2 = (-1 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 =$   
 $= (-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4 =$   
 $= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^8 = 2^2 \cdot 3^8$

095 Simplifica estos productos de potencias.

a)  $5^4 \cdot 25^3$

b)  $8^4 \cdot 16^2$

c)  $6^3 \cdot 12^5$

d)  $4^7 \cdot 32$

e)  $(-12)^3 \cdot 18^5$

f)  $(-63)^5 \cdot 21^2$

g)  $32^2 \cdot (-24)^3$

h)  $-72^3 \cdot (-4)^7$

a)  $5^4 \cdot 5^6 = 5^{10}$

b)  $2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

c)  $2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 = 2^{13} \cdot 3^8$

d)  $2^{14} \cdot 2^5 = 2^{19}$

e)  $(-1) \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = (-1) \cdot 2^{11} \cdot 3^{13}$

f)  $(-1) \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (-1) \cdot 3^{12} \cdot 7^7$

g)  $2^{10} \cdot (-1) \cdot 2^9 \cdot 3^3 = (-1) \cdot 2^{19} \cdot 3^3$

h)  $(-1) \cdot 2^9 \cdot 3^6 \cdot (-1) \cdot 2^{14} = 2^{23} \cdot 3^6$

# Números enteros

096

Escribe como potencia de una potencia.



a)  $7^9$

b)  $6^8$

c)  $(-12)^6$

d)  $(-8)^{12}$

a)  $(7^3)^3$

b)  $(6^4)^2$

c)  $[(-12)^2]^3$

d)  $[(-8)^4]^3$

097

Completa.



a)  $(\square)^4 = 256$

c)  $(\square)^3 = -27$

b)  $(\square)^5 = 243$

d)  $(\square)^7 = -128$

a)  $(4)^4 = 256$

c)  $(-3)^3 = -27$

b)  $(3)^5 = 243$

d)  $(-2)^7 = -128$

098

Calcula la raíz cuadrada de estos números.



a) 64

b) 121

c) 144

d) 196

a) 8

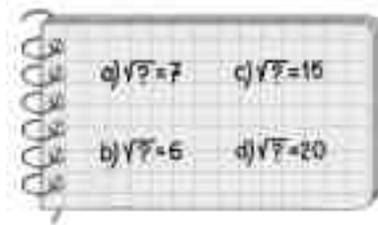
b) 11

c) 12

d) 14

099

Completa.



a)  $\sqrt{49} = 7$

b)  $\sqrt{36} = 6$

c)  $\sqrt{225} = 15$

d)  $\sqrt{400} = 20$

100

Calcula, sin operar, la raíz cuadrada y el resto de estos números.



a) 93

b) 59

c) 130

d) 111

a)  $\sqrt{93} = 9 \rightarrow \text{Resto} = 12$

c)  $\sqrt{130} = 11 \rightarrow \text{Resto} = 9$

b)  $\sqrt{59} = 7 \rightarrow \text{Resto} = 10$

d)  $\sqrt{111} = 10 \rightarrow \text{Resto} = 11$

101

Halla el resto en cada caso.



a) Raíz = 12

Radicando = 160

c) Raíz = 30

Radicando = 901

b) Raíz = 23

Radicando = 532

d) Raíz = 32

Radicando = 1.030

a) Resto = radicando - (raíz)<sup>2</sup> = 160 - 12<sup>2</sup> = 160 - 144 = 16

b) Resto = radicando - (raíz)<sup>2</sup> = 532 - 23<sup>2</sup> = 532 - 529 = 3

c) Resto = radicando - (raíz)<sup>2</sup> = 901 - 30<sup>2</sup> = 901 - 900 = 1

d) Resto = radicando - (raíz)<sup>2</sup> = 1.030 - 32<sup>2</sup> = 1.030 - 1.024 = 6

**102** Señala, sin realizar cálculos, cuáles de las afirmaciones son falsas.

- a)  $\sqrt{23} = 4$  y resto 7      e)  $\sqrt{80} = 9$  y resto 1  
 b)  $\sqrt{30} = 5$  y resto 10      f)  $\sqrt{85} = 9$  y resto 5  
 c)  $\sqrt{45} = 7$  y resto 4      g)  $\sqrt{96} = 9$  y resto 15  
 d)  $\sqrt{60} = 7$  y resto 11      h)  $\sqrt{204} = 14$  y resto 2

- a) Verdadera      e) Falsa  
 b) Falsa      f) Falsa  
 c) Falsa      g) Verdadera  
 d) Verdadera      h) Falsa

**103** Escribe todos los números enteros de dos cifras cuya raíz cuadrada entera tenga de resto 2.

6, 11, 18, 27, 38, 51, 66 y 83

**104** Escribe todos los números de tres cifras menores de 500 cuya raíz tenga de resto 10.

110, 131, 154, 206, 235, 266, 299, 334, 371, 410, 451 y 494

**105** Un número tiene por raíz cuadrada entera 5 y su resto es el máximo posible. ¿Cuál es el resto? ¿Y cuál es el número?

El resto es 10 y el número es 35.

**106** Halla el menor número que sumado a 265 da un cuadrado perfecto.

El número es 24, ya que  $265 + 24 = 289 = 17^2$ .

**107** Resuelve las siguientes operaciones.

- a)  $(-13) \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7)$       d)  $[(-25) + 5 - (-4)] : (-8)$   
 b)  $(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4)$       e)  $[(-16) + (-9) + 5] : (-4)$   
 c)  $(-35) : (-7) + (-54) : (+9)$       f)  $[(-4) + (-3) \cdot (-6)] : 7$

- a)  $(-13) \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7) = -39 + 84 = 45$   
 b)  $(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4) = 36 - 60 = -24$   
 c)  $(-35) : (-7) + (-54) : (+9) = 5 + (-6) = 5 - 6 = -1$   
 d)  $[(-25) + 5 - (-4)] : (-8) = [-25 + 5 + 4] : (-8) = -16 : (-8) = 2$   
 e)  $[(-16) + (-9) + 5] : (-4) = [-16 - 9 + 5] : (-4) = -20 : (-4) = 5$   
 f)  $[(-4) + (-3) \cdot (-6)] : 7 = [-4 + 18] : 7 = 14 : 7 = 2$

# Números enteros

108

Resuelve las operaciones.

- a)  $(-11) \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)]$
- b)  $(-8) \cdot [5 - (-2)] - 48 : [6 + (-14)]$
- c)  $42 : [(-6) - (-3)] + 28 : [-6 - (-8)]$
- d)  $32 : [(-19) + 3] - 24 : [(-11) - (-5)]$

$$\begin{aligned} \text{a) } (-11) \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)] &= (-11) \cdot 3 + 36 : 9 = \\ &= -33 + 4 = -29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-8) \cdot [5 - (-2)] - 48 : [6 + (-14)] &= (-8) \cdot 7 - 48 : (-8) = \\ &= -56 + 6 = -50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 42 : [(-6) - (-3)] + 28 : [-6 - (-8)] &= 42 : (-3) + 28 : 2 = \\ &= -14 + 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 32 : [(-19) + 3] - 24 : [(-11) - (-5)] &= 32 : (-16) - 24 : (-6) = \\ &= -2 + 4 = 2 \end{aligned}$$

109

Efectúa estas operaciones combinadas.

- a)  $(-5)^2 \cdot [3 + 28 : (-4)]$
- b)  $(+2)^2 \cdot [-5 \cdot 2 - 32 : (-8)]$
- c)  $(+3)^3 : [-5 + (-7) \cdot (-2)]$
- d)  $(-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)]$

$$\begin{aligned} \text{a) } (-5)^2 \cdot [3 + 28 : (-4)] &= (-5)^2 \cdot [3 - 7] = (-5)^2 \cdot (-4) = \\ &= 25 \cdot (-4) = -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (+2)^2 \cdot [-5 \cdot 2 - 32 : (-8)] &= 2^2 \cdot [-10 + 4] = 2^2 \cdot (-6) = \\ &= 4 \cdot (-6) = -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (+3)^3 : [-5 + (-7) \cdot (-2)] &= 3^3 : [-5 + 14] = 3^3 : 9 = 27 : 9 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-4)^3 : [(-15) : 5 - (-45) : (-9)] &= (-4)^3 : [-3 - 5] = (-4)^3 : (-8) = \\ &= -64 : (-8) = 8 \end{aligned}$$

110

Resuelve las operaciones considerando solo el resultado positivo de la raíz.

- a)  $\sqrt{9} + (-3) \cdot [12 + (-7)]$
- b)  $\sqrt{81} : 3 + 4 \cdot [-12 - 2 \cdot (-3)]$
- c)  $7 \cdot (5 + 3) - \sqrt{36} : (-3)$
- d)  $-3 - (-4) \cdot [\sqrt{64} - 5 \cdot (-2)]$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{9} + (-3) \cdot [12 + (-7)] &= \sqrt{9} + (-3) \cdot 5 = 3 - 15 = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{81} : 3 + 4 \cdot [-12 - 2 \cdot (-3)] &= \sqrt{81} : 3 + 4 \cdot [-12 + 6] = \\ &= 9 : 3 + 4 \cdot (-6) = 3 - 24 = -21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 7 \cdot (5 + 3) - \sqrt{36} : (-3) &= 7 \cdot 8 - \sqrt{36} : (-3) = 7 \cdot 8 - 6 : (-3) = \\ &= 56 + 2 = 58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -3 - (-4) \cdot [\sqrt{64} - 5 \cdot (-2)] &= -3 - (-4) \cdot [8 + 10] = \\ &= -3 - (-4) \cdot 18 = -3 + 72 = 69 \end{aligned}$$

**111** Calcula, utilizando solo el resultado positivo de la raíz.

a)  $\sqrt{100} : 5 + 3^3 : (-3)$

b)  $12 - 18 : 2 + (-4) \cdot \sqrt{121}$

c)  $(-5) \cdot 3^2 - \sqrt{49} : [(-5) \cdot (-2) - 3^1]$

d)  $(-8)^5 : (-8)^3 - (-4)^2 \cdot (\sqrt{16} - 2^0)$

e)  $\sqrt{144} : [7 + (-5)]^2 + (-2)^3$

a)  $\sqrt{100} : 5 + 3^3 : (-3) = 10 : 5 + 27 : (-3) = 2 - 9 = -7$

b)  $12 - 18 : 2 + (-4) \cdot \sqrt{121} = 12 - 9 + (-4) \cdot 11 = 12 - 9 - 44 =$   
 $= 12 - 53 = -41$

c)  $(-5) \cdot 3^2 - \sqrt{49} : [(-5) \cdot (-2) - 3^1] = (-5) \cdot 9 - 7 : [10 - 3] =$   
 $= -45 - 7 : 7 = -45 - 1 = -46$

d)  $(-8)^5 : (-8)^3 - (-4)^2 \cdot (\sqrt{16} - 2^0) = (-8)^2 - 16 \cdot (4 - 1) =$   
 $= 64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$

e)  $\sqrt{144} : [7 + (-5)]^2 + (-2)^3 = 12 : [7 - 5]^2 - 8 = 12 : 2^2 - 8 =$   
 $= 12 : 4 - 8 = 3 - 8 = -5$

**112** Encuentra los errores en estas igualdades.

a)  $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 - 8) = 0$

b)  $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 - 2 = -1 + 7 - 2 = -6 - 2 = -8$

c)  $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 + 2 = 11 - 5 = 6$

d)  $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 - 10 = -22$

e)  $4 - 5 \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$

a)  $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 + 8) = -16$

b)  $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 + 2 = -1 + 7 + 2 = -6 + 2 = -4$

c)  $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 - 2 = 11 - 9 = 2$

d)  $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 + 10 = -2$

e)  $4 - 5 \cdot (-2) = 4 - (-10) = 14$

**113** Completa con múltiplos de 12.

$\dot{1}2 = \{\dots, -24, \square, 0, 12, \square, 36, \square, 60, \dots\}$

$\dot{1}2 = \{\dots, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$

**114** Halla los múltiplos de 7 comprendidos entre  $-40$  y  $+40$ .

$\dot{7} = \{\dots, -35, -28, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$

**115** Halla los múltiplos de  $-4$  comprendidos entre  $-30$  y  $+30$ .

$(-4) = \{\dots, -28, -24, -20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$

# Números enteros

**116** Calcula todos los divisores de:

- a) 28                      b) 54                      c) 63                      d) 90

- a)  $\text{Div}(28) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$   
b)  $\text{Div}(54) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54\}$   
c)  $\text{Div}(63) = \{\pm 1, \pm 7, \pm 9, \pm 63\}$   
d)  $\text{Div}(90) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 18, \pm 30, \pm 45, \pm 90\}$

**117** Completa los divisores de 42.

- $\text{Div}(42) = \{\pm 1, \pm 2, \square, \square, \square, \pm 14, \square, \square\}$

$$\text{Div}(42) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$$

**118** Dados los números: 12, -15, 18, 24, -4, -423, 10, 267, -23, -2, di cuáles son múltiplos de:

- a) 2                      b) -2                      c) 3                      d) -3                      e) 6

- a) 12, 18, 24, -4, 10 y -2                      d) 12, -15, 18, 24, -423 y 267  
b) 12, 18, 24, -4, 10 y -2                      e) 12, 18 y 24  
c) 12, -15, 18, 24, -423 y 267

**119** Escribe los múltiplos de -5 comprendidos entre -30 y 15.

- a) ¿Cuáles de ellos son múltiplos de 7?  
b) ¿Y cuáles tienen un valor absoluto menor que 15?

$$(-5) = \{\dots, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$$

- a) Ninguno es múltiplo de 7.                      b) -10, -5, 0, 5 y 10

**120** Di cuáles de los siguientes números son primos. Razona la respuesta.

- a) 21                      b) 19                      c) 43                      d) 39

Son primos 19 y 43, porque solo tienen dos divisores: ellos mismos y la unidad.

**121** Averigua si los números son primos o compuestos: 72, -147, -282, 331, -407.

- Compuestos: 72, -147, -282 y -407.  
Primo: 331.

**122** Realiza la descomposición factorial de:

- a) 3.850                      b) -432                      c) -561

- a)  $3.850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$                       c)  $-561 = (-1) \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$   
b)  $-432 = (-1) \cdot 2^4 \cdot 3^3$

**123** Calcula el máximo común divisor de cada par de números.



a) 45 y -27

b) -28 y 21

c) -18 y 12

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad 45 = 3^2 \cdot 5 \\ \quad -27 = (-1) \cdot 3^3 \end{array} \right\}$$

$$\text{m.c.d.}(45, -27) = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} c) \quad -18 = (-1) \cdot 2 \cdot 3^2 \\ \quad \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{m.c.d.}(-18, 12) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad -28 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 7 \\ \quad \quad 21 = 3 \cdot 7 \end{array} \right\}$$

$$\text{m.c.d.}(-28, 21) = 7$$

**124** Halla el máximo común divisor.



a) 6, -8, 12

b) 16, 20, -28

c) 40, -10, 25

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad 6 = 2 \cdot 3 \quad \quad -8 = (-1) \cdot 2^3 \quad \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \\ \quad \quad \text{m.c.d.}(6, -8, 12) = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad 16 = 2^4 \quad \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \quad \quad -28 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 7 \\ \quad \quad \text{m.c.d.}(16, 20, -28) = 2^2 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} c) \quad 40 = 2^3 \cdot 5 \quad \quad -10 = (-1) \cdot 2 \cdot 5 \quad \quad 25 = 5^2 \\ \quad \quad \text{m.c.d.}(40, -10, 25) = 5 \end{array} \right\}$$

**125** Si m.c.d.  $(x, 12) = 6$ , halla el valor de  $x$ .



El valor de  $x$  será cualquier número múltiplo de 6 y que no lo sea de 12, por ejemplo: 6, 18, 30, 42...

**126** Calcula el mínimo común múltiplo.



a) -12 y 18

b) 15 y -45

c) 27 y -18

$$a) \quad -12 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \quad \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(-12, 18) = 36$$

$$b) \quad 15 = 3 \cdot 5 \quad \quad -45 = (-1) \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(15, -45) = 45$$

$$c) \quad 27 = 3^3 \quad \quad -18 = (-1) \cdot 2 \cdot 3^2 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(27, -18) = 54$$

**127** Obtén el mínimo común múltiplo de los siguientes números.



a) 12, -9, 10

b) -4, 18, 27

c) -8, 30, 24

$$a) \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \quad \quad -9 = (-1) \cdot 3^2 \quad \quad 10 = 2 \cdot 5 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(12, -9, 10) = 180$$

$$b) \quad -4 = (-1) \cdot 2^2 \quad \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad \quad 27 = 3^3 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(-4, 18, 27) = 108$$

$$c) \quad -8 = (-1) \cdot 2^3 \quad \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad \longrightarrow \quad \text{m.c.m.}(-8, 30, 24) = 120$$

**128** Halla dos números cuyo m.c.d. sea 6 y su m.c.m sea 36.



Los números son 36 y 6.

**129** A las 7 de la mañana el termómetro marcaba  $4^\circ\text{C}$  bajo cero, y cinco horas después marcaba  $3^\circ\text{C}$  sobre cero. ¿Cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?



Hay  $3 - (-4) = 7^\circ\text{C}$  de diferencia.

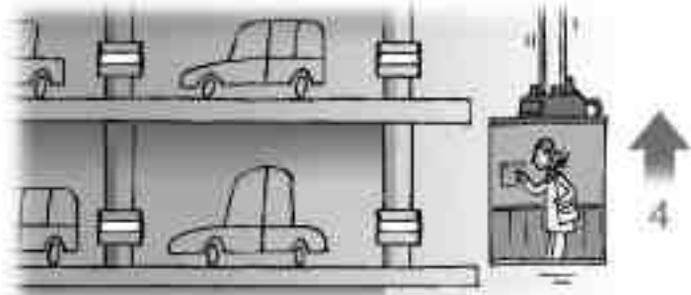
# Números enteros

- 130** ●● María vive en el 3.<sup>er</sup> piso. Baja 5 plantas para ir al trastero y luego sube 7 para visitar a su amigo Alberto. ¿En qué piso vive Alberto?

$$3 - 5 + 7 = 10 - 5 = 5$$

Alberto vive en el 5.<sup>o</sup> piso.

- 131** ●● Sara deja el coche en el tercer sótano y sube 4 plantas hasta su casa. ¿En qué piso vive?



$$-3 + 4 = 1$$

Sara vive en el 1.<sup>er</sup> piso.

- 132** ●● Luis tiene 123 €. A fin de mes recibe 900 € de sueldo y paga su hipoteca de 546 €. ¿Cuánto dinero le queda finalmente?

$$123 + 900 - 546 = 1.023 - 546 = 477 \text{ € le quedan.}$$

## 133 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE FORMA UN CUADRADO CON UN DETERMINADO NÚMERO DE ELEMENTOS?

¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede formar con los 23 alumnos de una clase?

**PRIMERO.** Se evalúa si es un cuadrado perfecto.

23 no es un cuadrado perfecto.

**SEGUNDO.** Se calcula su raíz entera.

$$\sqrt{23} = 4 \rightarrow \text{Resto} = 23 - 4^2 = 7$$

Se puede formar un cuadrado con 4 alumnos en cada lado y sobrarían 7 alumnos.

- 134** ●● ¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede formar con 52 sellos?  
¿Cuántos sobran?

El mayor cuadrado que se puede formar es el que tiene 7 sellos en cada lado, ya que  $7^2 = 49$ , y sobran 3 sellos.

## 135 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE EL m.c.d. Y EL m.c.m.?

Resuelve estos problemas.

- a) Tres cuerdas de 4, 6 y 9 m, respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. ¿Cuál es la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer?
- b) Los libros de una estantería se pueden colocar en montones de 4, 6 y 9 libros sin que sobre ninguno. ¿Cuál es la menor cantidad de libros que puede haber?

PRIMERO. Se analiza el problema.



La longitud de cada trozo tiene que ser un divisor de las longitudes de las cuerdas. Y, además, tiene que ser el máximo → PROBLEMA DE m.c.d.

- b) El número total de libros tiene que ser múltiplo de 4, 6 y 9. Y, además, tiene que ser el mínimo → PROBLEMA DE m.c.m.

SEGUNDO. Se realizan los cálculos.

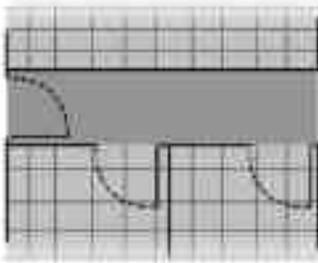
$$4 = 2^2 \quad 6 = 2 \cdot 3 \quad 9 = 3^2$$

$$\text{m.c.d. } (4, 6, 9) = 1$$

$$\text{m.c.m. } (4, 6, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

- a) Los trozos de mayor longitud son de 1 m.
- b) Como mínimo hay 36 libros.

- 136 ●● El pasillo de una vivienda tiene 432 cm de largo y 128 cm de ancho. Se quiere poner baldosas cuadradas del mayor tamaño posible, sin tener que cortar ninguna. Calcula sus dimensiones y el número de baldosas.



$$432 = 2^4 \cdot 3^3 \quad 128 = 2^7$$

$$\text{m.c.d. } (432, 128) = 2^4 = 16$$

Las baldosas medirán 16 cm de lado y serán:  $27 \cdot 8 = 216$  baldosas.

# Números enteros

- 137** ●● Alejandro tiene unas 150 fotografías. Puede pegarlas en un álbum en grupos de 8, 9 o 12 fotografías y sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotografías tiene Alejandro?

$$8 = 2^3 \quad 9 = 3^2$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

El número de fotografías ha de ser múltiplo de 8, 9 y 12, por lo que será múltiplo del m.c.m.  $(8, 9, 12) = 72$ .

Un múltiplo de 72 cercano a 150 es 144.

Por tanto, Alejandro tiene 144 fotografías.

- 138** ●●● Por una vía ferroviaria pasa un tren con dirección a Zaragoza cada 30 minutos y otro con dirección a Gijón cada 18 minutos. Si se han cruzado los dos trenes a las 10:00 de la mañana, halla a qué hora volverán a cruzarse.



$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Los trenes se volverán a cruzar en un número múltiplo de 18 y 30, y como m.c.m.  $(18, 30) = 90$ , se cruzan cada 90 minutos.

El próximo cruce será a las 11:30 horas.

- 139** ●●● Luis viaja a Barcelona cada 15 días y su hermana Marta lo hace cada 20 días. ¿Cuándo coincidirán de nuevo en Barcelona si la última vez que lo hicieron fue el 2 de octubre?

$$15 = 3 \cdot 5 \quad 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m. } (15, 20) = 60$$

Coinciden cada 60 días, luego volverán a coincidir el 1 de diciembre.

- 140** ●●● En una carretera han puesto farolas en ambos lados. En un lado se han colocado cada 12 metros, y en el otro, cada 18 metros. Sabiendo que la primera farola de cada lado está situada a la misma altura, ¿qué distancia debemos recorrer para encontrar dos farolas colocadas una frente a la otra?

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{m.c.m. } (12, 18) = 36$$

Debemos recorrer una distancia de 36 m.

141

Calcula todos los números enteros  $a$  y  $b$  que verifican estas condiciones. Cuando no exista ninguna solución, explica por qué ocurre y, si hay infinitas posibilidades, describe cómo son.

a)  $|a| + |b| = 4$

e)  $|a| \cdot |b| = 12$

i)  $a^2 = 64$

b)  $|a + b| = 4$

f)  $|a \cdot b| = 12$

j)  $a^2 = -64$

c)  $|a| - |b| = 4$

g)  $|a| : |b| = 12$

k)  $a^3 = 64$

d)  $|a - b| = 4$

h)  $|a| : |b| = 1/2$

l)  $a^3 = -64$

a)  $a = 0, b = \pm 4; a = \pm 1, b = \pm 3; a = \pm 2, b = \pm 2; a = \pm 3, b = \pm 1; a = \pm 4, b = 0$

b) Hay infinitas soluciones, siendo  $a + b = \pm 4$ .

c) Hay infinitas soluciones, siendo  $a = -|b| - 4$  o  $a = |b| + 4$ .

d) Hay infinitas soluciones, siendo  $a - b = \pm 4$ .

e)  $a = \pm 1, b = \pm 12; a = \pm 2, b = \pm 6; a = \pm 3, b = \pm 4; a = \pm 4, b = \pm 3; a = \pm 6, b = \pm 2; a = \pm 12, b = \pm 1$

f)  $a = \pm 1, b = \pm 12; a = \pm 2, b = \pm 6; a = \pm 3, b = \pm 4; a = \pm 4, b = \pm 3; a = \pm 6, b = \pm 2; a = \pm 12, b = \pm 1$

g) Hay infinitas soluciones, siendo  $a = \pm 12 \cdot b$ .

h) Hay infinitas soluciones, siendo  $b = \pm 2 \cdot a$ .

i)  $a = \pm 8$

j) Es imposible, pues las potencias pares no son negativas.

k)  $a = 4$

l)  $a = -4$

142

Si  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2 = 5.525$ , di cuál es el valor de  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2$ .

Cada sumando de la segunda suma es el cuádruple del mismo sumando de la primera, luego la segunda suma es cuatro veces la primera.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2 = 4 \cdot 5.525 = 22.100$$

143

Ordena, de menor a mayor, estos números.

$$2^{2.006} - 2 \quad 2^{2.008} \quad 2^{2.005} + 2.007 \quad 2^{2.006} + 2$$

Expresa como una potencia de base 2 la suma de los dos números centrales.

$$2^{2.005} + 2.007 < 2^{2.006} - 2 < 2^{2.006} + 2 < 2^{2.008}$$

$$2^{2.006} - 2 + 2^{2.006} + 2 = 2 \cdot 2^{2.006} = 2^{2.007}$$

144

Si  $m$  y  $n$  son números enteros positivos, ¿cuál es el menor valor de  $m$  para que  $2.940 \cdot m = n^2$ ?

$$2.940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \rightarrow m = 3 \cdot 5 = 15 \text{ y } n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

$$2.940 \cdot 15 = 210^2 = 44.100$$

# Números enteros

## EN LA VIDA COTIDIANA

145



En un pozo minero ha habido un derrumbe. Rápidamente se han ejecutado las medidas de emergencia y se ha formado un equipo de salvamento.

De los 32 mineros que permanecían en el interior de la mina en el momento del derrumbe, tan solo dos de ellos siguen atrapados.



El derrumbe se ha producido en la galería 14. Creemos que es donde permanecen los dos mineros.

La estructura de esta mina subterránea de carbón está formada por galerías horizontales. Además, la distancia vertical entre cada dos galerías es 10 m, y su altura, 2 m.

Los equipos de salvamento están en las galerías 18 y 11.

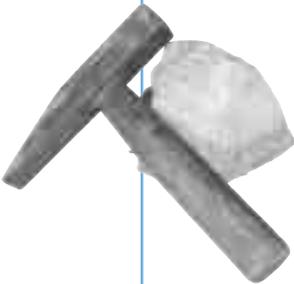


Es necesario perforar para llegar hasta la galería en la que permanecen los mineros atrapados. Según los técnicos, solo se puede perforar 1 m cada 12 minutos al descender y 1 m cada 9 minutos al ascender. ¿Qué grupo llegará primero? ¿Cuánto tiempo tardará?

Para llegar de la galería 11 a la 14 deben perforar 30 m, ya que las galerías son huecas y no hay que perforarlas, por lo que tardarán:  $30 \cdot 12 = 360$  minutos.

Para llegar de la galería 18 a la 14 deben perforar 40 m, y tardarán:  $40 \cdot 9 = 360$  minutos.

Por tanto, los dos equipos de salvamento llegarán a la vez y tardarán el mismo tiempo.



146

La lesión de tobillo de Miguel no le impide hacer la compra semanalmente. Miguel visita periódicamente las páginas de Internet de dos supermercados, y luego compara los precios.

Ha confeccionado una tabla con la diferencia de precios de los artículos que necesita en los dos supermercados, Super1 y Super2.

Artículo	En Super1 es...
Bote de tomate frito	6 cént. más barato
Botella de aceite	72 cént. más cara
Botella de refresco	9 cént. más barata
Botella de zumo	23 cént. más barata
Bolsa de galletas	8 cént. más cara
Lechuga	2 cént. más cara
Kilo de tomates	12 cént. más barato
Barra de pan	3 cént. más cara
Kilo de arroz	16 cént. más barato

¿En qué supermercado es más barato comprar? ¿Cuánto dinero se ahorrará?

La diferencia de precios es:

$$-6 + 72 - 9 - 23 + 8 + 2 - 12 + 3 - 16 = 19$$

La compra en el Super1 es 19 céntimos más cara que en el Super2.

147

En el último año han ingresado nuevos miembros en una banda de cornetas y tambores.

A la hora de desfilar los miembros de la banda siempre han marchado en filas de cuatro.



El problema es que este año no pueden marchar en filas de cuatro, porque la última fila no se completa.



Tampoco pueden hacerlo en fondo de tres, habiendo en este caso tres filas más.

Y si marcharan en fondo de dos, la última fila tampoco se completaría, aunque habría ocho filas más que si marchasen en filas de cuatro.



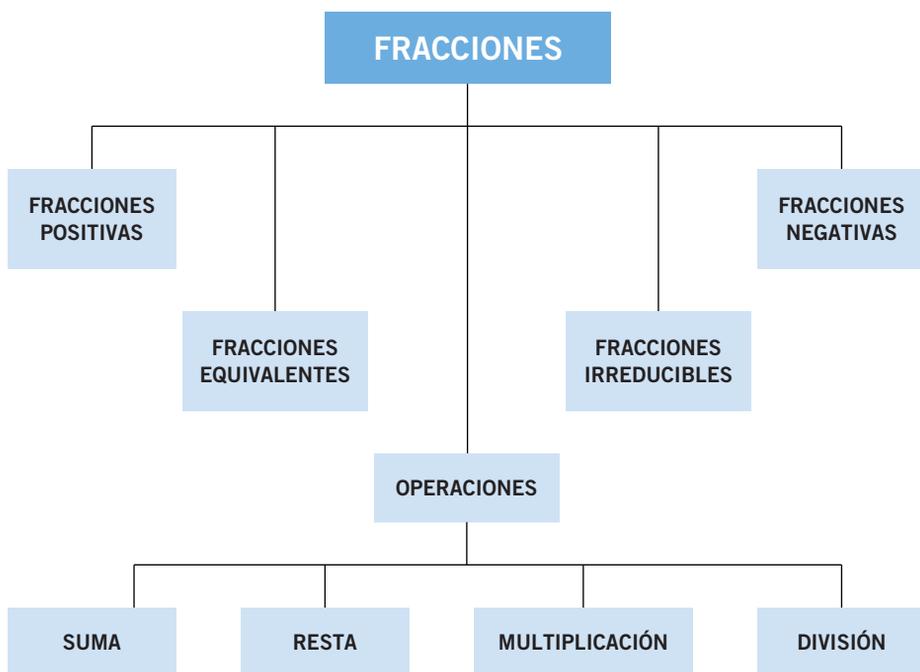
¿Cuántos miembros componen la banda?

Los miembros de la banda son un número impar, por no ser múltiplo de 2, y, además, no puede ser múltiplo de 3.

Como al ir en filas de 2 hay 8 filas más que de 4, tenemos dos posibilidades:

– Que al ir de 4 en 4, sobre 1 músico, por lo que tendría que haber 8 filas completas de 4 músicos y 8 filas completas de 2 músicos. Es decir, habría:  $32 + 8 = 40$  músicos, que no es posible por ser múltiplo de 3.

– Que la fila incompleta, al ir en filas de 4, tenga 3 músicos. La única posibilidad es que, al ir de 4 en 4, hubiera 7 filas completas, lo que daría 15 filas completas de 2 músicos. Por tanto, el número de músicos es:  $4 \cdot 7 + 3 = 31$ .



## Alejandro Magno

En una ocasión, Roxana, la esposa de Alejandro Magno, le preguntó a su marido:

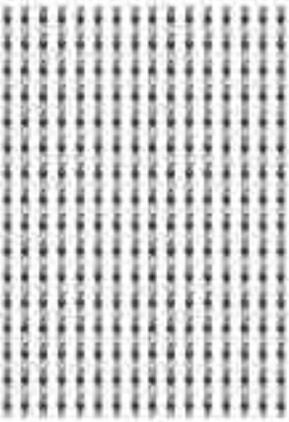
–¿A qué dios le agradeces la conquista del mundo?

A lo que Alejandro le contestó:

–Mi primer agradecimiento va dirigido a mí mismo; y el segundo, al legado de mi padre: su invencible ejército, la *falange macedonia*.

–Pero los imperios conquistados tenían un ejército, generalmente, más numeroso que el tuyo –replicó Roxana.

–La fuerza de mi ejército –explicó Alejandro– reside en su organización, no en su número: cada fila de 16 hoplitas es la cuarta parte de una *tetrarquia*, que a su vez es la cuarta parte de un *syntagma*, y 64 de estas unidades de infantería forman la falange. Su simple presencia infunde respeto a los ejércitos enemigos.



¿Cuántos soldados tenía la falange?  
¿Y cada uno de los syntagmas?

$$\begin{aligned} 16 \text{ soldados} &= 1 \text{ fila} = \frac{1}{4} \text{ tetrarquia} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{4} \text{ syntagma} \right) \rightarrow 1 \text{ syntagma} = \\ &= 16 \cdot 4 \cdot 4 = 256 \text{ soldados} \end{aligned}$$

**Cada syntagma tenía 256 soldados. La falange tenía 64 syntagmas, que equivalen a:**

$$64 \cdot 256 = 16.384 \text{ soldados}$$



# Fracciones

## EJERCICIOS

001 Representa con un gráfico y expresa en forma decimal estas fracciones.

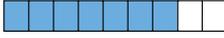
a)  $\frac{3}{5}$

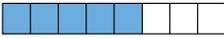
b)  $\frac{5}{8}$

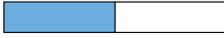
c)  $\frac{7}{9}$

d)  $\frac{1}{2}$

a)   $\frac{3}{5} = 0,6$

c)   $\frac{7}{9} = 0,\bar{7}$

b)   $\frac{5}{8} = 0,625$

d)   $\frac{1}{2} = 0,5$

002 Calcula.

a)  $\frac{2}{3}$  de 30

b)  $\frac{1}{5}$  de 25

c)  $\frac{3}{5}$  de 250

a)  $\frac{2}{3} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 30}{3} = \frac{60}{3} = 20$

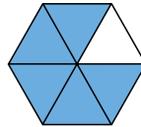
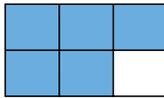
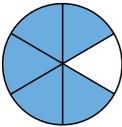
b)  $\frac{1}{5} \cdot 25 = \frac{1 \cdot 25}{5} = \frac{25}{5} = 5$

c)  $\frac{3}{5} \cdot 250 = \frac{3 \cdot 250}{5} = \frac{750}{5} = 150$

003 Ana compra 75 cromos en el kiosco. Al abrirlos, ve que los  $\frac{2}{5}$  de los cromos están repetidos. ¿Cuántos cromos son repetidos?

$$\frac{2}{5} \cdot 75 = \frac{2 \cdot 75}{5} = \frac{150}{5} = 30 \text{ cromos}$$

004 Representa la fracción  $\frac{5}{6}$  con tres figuras distintas.



005 ¿Son equivalentes los siguientes pares de fracciones?

a)  $\frac{15}{6}$  y  $\frac{105}{36}$

b)  $\frac{17}{13}$  y  $\frac{85}{52}$

c)  $\frac{12}{30}$  y  $\frac{5}{2}$

a)  $\frac{15}{6} \stackrel{?}{=} \frac{105}{36} \rightarrow 15 \cdot 36 \stackrel{?}{=} 6 \cdot 105 \rightarrow 540 \neq 630$ . No lo son.

b)  $\frac{17}{13} \stackrel{?}{=} \frac{85}{52} \rightarrow 17 \cdot 52 \stackrel{?}{=} 13 \cdot 85 \rightarrow 884 \neq 1.105$ . No lo son.

c)  $\frac{12}{30} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2} \rightarrow 12 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 30 \cdot 5 \rightarrow 24 \neq 150$ . No lo son.

**006** Escribe tres fracciones equivalentes por simplificación y otras tres por amplificación.

a)  $\frac{72}{120}$

b)  $\frac{140}{320}$

c)  $\frac{450}{650}$

a) Amplificación:  $\frac{72}{120} = \frac{144}{240} = \frac{216}{360} = \frac{288}{480}$ .

Simplificación:  $\frac{72}{120} = \frac{36}{60} = \frac{24}{40} = \frac{18}{30}$ .

b) Amplificación:  $\frac{140}{320} = \frac{280}{640} = \frac{420}{960} = \frac{560}{1.280}$ .

Simplificación:  $\frac{140}{320} = \frac{70}{160} = \frac{35}{80} = \frac{28}{64}$ .

c) Amplificación:  $\frac{450}{650} = \frac{900}{1.300} = \frac{1.350}{1.950} = \frac{1.800}{2.600}$ .

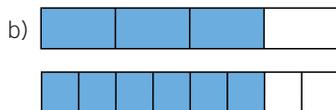
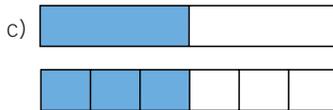
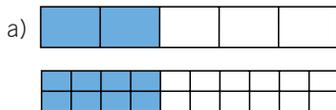
Simplificación:  $\frac{450}{650} = \frac{225}{325} = \frac{90}{130} = \frac{45}{65}$ .

**007** Comprueba gráficamente que son equivalentes.

a)  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{8}{20}$

b)  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{6}{8}$

c)  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{6}$



**008** Halla el término  $a$  para que sean equivalentes.

a)  $\frac{3}{a} = \frac{12}{20}$

b)  $\frac{9}{12} = \frac{45}{a}$

c)  $\frac{14}{11} = \frac{a}{22}$

a)  $\frac{3}{a} = \frac{12}{20} \rightarrow 3 \cdot 20 = a \cdot 12 \rightarrow a = \frac{60}{12} = 5$

b)  $\frac{9}{12} = \frac{45}{a} \rightarrow 9 \cdot a = 12 \cdot 45 \rightarrow a = \frac{540}{9} = 60$

c)  $\frac{14}{11} = \frac{a}{22} \rightarrow 14 \cdot 22 = 11 \cdot a \rightarrow a = \frac{308}{11} = 28$

# Fracciones

**009** Calcula la fracción irreducible de estas fracciones.

a)  $\frac{24}{36}$

b)  $\frac{60}{25}$

c)  $\frac{540}{320}$

d)  $\frac{120}{90}$

a)  $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$   
 m.c.d. (24, 36) = 12

c)  $\frac{540}{320} = \frac{27}{16}$   
 m.c.d. (540, 320) = 20

b)  $\frac{60}{25} = \frac{12}{5}$   
 m.c.d. (60, 25) = 5

d)  $\frac{120}{90} = \frac{4}{3}$   
 m.c.d. (120, 90) = 30

**010** Reduce a común denominador.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{7}{6}, \frac{1}{10}$$

m.c.m. (3, 5, 4, 6, 10) = 60

$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$

$\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$

$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$

$\frac{7}{6} = \frac{70}{60}$

$\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$

**011** Señala las fracciones irreducibles.

a)  $\frac{1}{3}$

b)  $\frac{23}{17}$

c)  $\frac{10}{25}$

d)  $\frac{57}{21}$

a)  $\frac{1}{3}$  es irreducible.

c)  $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$  no es irreducible.

b)  $\frac{23}{17}$  es irreducible.

d)  $\frac{57}{21} = \frac{19}{7}$  no es irreducible.

**012** ¿Puede obtenerse la fracción  $\frac{1}{3}$  simplificando  $\frac{363}{369}$ ?

No, porque las fracciones no son equivalentes:  $\frac{1}{3} \neq \frac{363}{369}$ .

**013** Ordena, de menor a mayor, aplicando los criterios de comparación de fracciones.

a)  $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$

b)  $\frac{2}{9}, \frac{3}{5}, \frac{6}{15}$

c)  $\frac{6}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{10}{8}$

d)  $\frac{4}{5}, \frac{7}{3}, \frac{9}{12}$

a) m.c.m. (3, 2, 1) = 6  $\rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{10}; \frac{2}{5} = \frac{6}{15}; \frac{1}{4} = \frac{6}{24}; \frac{1}{7} = \frac{6}{42}$

$\frac{6}{42} < \frac{6}{24} < \frac{6}{15} < \frac{6}{10} \rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{4} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$

$$b) \text{ m.c.m. } (2, 3, 6) = 6 \rightarrow \frac{2}{9} = \frac{6}{27}; \frac{3}{5} = \frac{6}{10}; \frac{6}{15} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{6}{27} < \frac{6}{15} < \frac{6}{10} \rightarrow \frac{2}{9} < \frac{6}{15} < \frac{3}{5}$$

$$c) \text{ m.c.m. } (8, 4, 6) = 24 \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{18}{24}; \frac{5}{4} = \frac{30}{24}; \frac{5}{6} = \frac{20}{24}; \frac{10}{8} = \frac{30}{24}$$

$$\frac{18}{24} < \frac{20}{24} < \frac{30}{24} = \frac{30}{24} \rightarrow \frac{6}{8} < \frac{5}{6} < \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

$$d) \text{ m.c.m. } (5, 3, 12) = 60 \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{48}{60}; \frac{7}{3} = \frac{140}{60}; \frac{9}{12} = \frac{45}{60}$$

$$\frac{45}{60} < \frac{48}{60} < \frac{140}{60} \rightarrow \frac{9}{12} < \frac{4}{5} < \frac{7}{3}$$

**014** Ordena, de mayor a menor, hallando el valor numérico de cada fracción.

$$a) \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$$

$$b) \frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{2}{8}, \frac{2}{2}$$

$$a) \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$$

$$b) \frac{2}{2} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{8}$$

$$0,25 > 0,2 > 0,125 > 0,1$$

$$1 > 0,5 > 0,4 > 0,25$$

**015** ¿Cuánto vale  $a$  si  $\frac{a}{5}$  es mayor que  $\frac{4}{5}$ ?

$$\frac{a}{5} > \frac{4}{5} \rightarrow a > 4, \text{ por ser los denominadores iguales.}$$

**016** Calcula y simplifica el resultado, si se puede.

$$a) 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

$$c) \frac{3}{4} - \frac{7}{2} - \frac{1}{3}$$

$$e) \frac{9}{5} + \frac{1}{7} - 1$$

$$b) \frac{3}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$d) \frac{4}{7} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2}$$

$$f) \frac{7}{5} - \frac{8}{3} + \frac{9}{10}$$

$$a) 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6 + 4 + 1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$b) \frac{3}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{15 + 2 - 1}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$c) \frac{3}{4} - \frac{7}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9 - 42 - 4}{12} = \frac{-37}{12} = -\frac{37}{12}$$

$$d) \frac{4}{7} + \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{16 + 14 - 14}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

$$e) \frac{9}{5} + \frac{1}{7} - 1 = \frac{63 - 5 - 35}{35} = \frac{23}{35}$$

$$f) \frac{7}{5} - \frac{8}{3} + \frac{9}{10} = \frac{42 - 80 + 27}{30} = \frac{-11}{30} = -\frac{11}{30}$$

# Fracciones

017 **Calcula.**

a)  $\frac{2}{15} + \frac{7}{18} + \left(-\frac{5}{12}\right)$

b)  $\frac{2}{15} + \frac{7}{18} - \left(-\frac{5}{12}\right)$

a)  $\frac{2}{15} + \frac{7}{18} + \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{2}{15} + \frac{7}{18} - \frac{5}{12} = \frac{24 + 70 - 75}{180} = \frac{19}{180}$

b)  $\frac{2}{15} + \frac{7}{18} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{2}{15} + \frac{7}{18} + \frac{5}{12} = \frac{24 + 70 + 75}{180} = \frac{169}{180}$

018 **Calcula el valor de a.**

$$\frac{a}{7} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{45}{14}$$

$$\frac{a}{7} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{45}{14} \rightarrow \frac{2a + 42 - 7}{14} = \frac{45}{14} \rightarrow 2a + 42 - 7 = 45 \rightarrow a = 5$$

019 **Haz estas operaciones.**

a)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}$

b)  $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5}$

a)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$   
(: 6)

b)  $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{180}{210} = \frac{6}{7}$   
(: 30)

020 **Calcula.**

a)  $\frac{2}{3}$  de 60

b)  $\frac{3}{5}$  de 90

a)  $\frac{2}{3} \cdot 60 = \frac{2 \cdot 60}{3} = \frac{120}{3} = 40$

b)  $\frac{3}{5} \cdot 90 = \frac{3 \cdot 90}{5} = \frac{270}{5} = 54$

021 Los  $\frac{3}{4}$  del agua de una localidad son reciclados, y de ese agua reciclada los  $\frac{2}{5}$  se utilizan para riego. ¿Qué fracción del total de agua se utiliza para riego?

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Las  $\frac{3}{10}$  partes del agua de la localidad se utilizan para riego.

- 022** Una vela se consume en  $\frac{1}{4}$  parte cada hora. Si nos queda  $\frac{1}{2}$  de vela, ¿cuántas horas la podremos tener encendida?

Como  $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ , con  $\frac{1}{2}$  vela tendremos luz durante 2 horas.

- 023** Realiza las siguientes operaciones.

$$\text{a) } \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 4$$

$$\text{c) } 3 \cdot \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) : 2$$

$$\text{b) } \left( 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6} \right) : \frac{5}{3}$$

$$\text{d) } 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) - 3 : \frac{1}{2}$$

$$\text{a) } \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot 4 = \left( \frac{12}{30} + \frac{15}{30} - \frac{10}{30} \right) \cdot 4 = \frac{17}{30} \cdot 4 = \frac{68}{30} = \frac{34}{15}$$

m.c.m. (5, 2, 3) = 30 (: 2)

$$\text{b) } \left( 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6} \right) : \frac{5}{3} = \left( \frac{12 + 3 - 4 + 14}{12} \right) : \frac{5}{3} = \frac{25}{12} : \frac{5}{3} = \frac{25 \cdot 3}{12 \cdot 5} = \frac{75}{60} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

m.c.m. (4, 3, 6) = 12 (: 5)    (: 3)

$$\text{c) } 3 \cdot \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) : 2 = \frac{3}{4} - \left( \frac{2 + 4 - 1}{4} \right) : 2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} : 2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6 - 5}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\text{d) } 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) - 3 : \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{4 - 5}{6} \right) - 3 \cdot 2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left( -\frac{1}{6} \right) - 6 = 1 - \frac{1}{24} - 6 = -5 - \frac{1}{24} = \frac{-120 - 1}{24} = -\frac{121}{24}$$

- 024** Haz estas operaciones.

$$\text{a) } \left[ -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \right] \cdot 2$$

$$\text{b) } \left( \frac{4}{5} - 3 \right) \cdot (-2)$$

$$\text{a) } \left[ -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \right] \cdot 2 = \left[ -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{2}{6} \right) \right] \cdot 2 = \left[ -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right] \cdot 2 = \left[ -\frac{5}{12} \right] \cdot 2 = -\frac{5}{6}$$

$$\text{b) } \left( \frac{4}{5} - 3 \right) \cdot (-2) = \left( -\frac{11}{5} \right) \cdot (-2) = \frac{22}{5}$$

# Fracciones

025 Calcula el valor de  $a$ .

$$\text{a) } -\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot (-1) = \frac{11}{6}$$

$$\text{b) } \left(\frac{a}{4} - \frac{a}{3} - a\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{39}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } -\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot (-1) = \frac{11}{6} &\rightarrow -\left(\frac{3a+2}{6}\right) \cdot (-1) = \frac{11}{6} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3a+2}{6} = \frac{11}{6} \rightarrow 3a+2=11 \rightarrow a=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{a}{4} - \frac{a}{3} - a\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{39}{8} &\rightarrow \frac{-13a}{12} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{39}{8} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-39a}{24} = -\frac{117}{24} \rightarrow a=3 \end{aligned}$$

026 Escribe en forma de potencia.

$$\text{a) } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{a) } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

027 Calcula.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{36}{49}}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{81}{25}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$$

028 Escribe en forma de potencia.

$$\text{a) } -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{25}{49}$$

$$\text{a) } -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = -\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$\text{b) } \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{25}{49} = \frac{5^4}{7^4} = \left(\frac{5}{7}\right)^4$$

029 ¿Existe alguna fracción cuya raíz dé como resultado  $\frac{7}{3}$ ?

$$\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}, \text{ porque } \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}.$$

## ACTIVIDADES

## 030 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDE EXPRESAR UNA SITUACIÓN MEDIANTE UNA FRACCIÓN?

Expresa mediante una fracción.

- a) Solo queda una tercera parte del combustible en el depósito del automóvil.  
 b) He recorrido 400 km y faltan 250 km para llegar a mi destino.

**PRIMERO.** Si la fracción viene expresada en el enunciado (la mitad, la tercera parte, un cuarto...), habrá que traducir al lenguaje numérico.

a) Una tercera parte  $\rightarrow \frac{1}{3}$

**SEGUNDO.** Si no ocurre así, el numerador de la fracción será la parte (consumo, gasto...), y el denominador, el total.

b) He recorrido 400 km. Faltan 250 km }  $\rightarrow \frac{400}{650} = \frac{8}{13}$   
 Total del viaje:  $400 + 250 = 650$  km }

031 Expresa estas situaciones mediante fracciones. Encuentra las que sean equivalentes.

- a) Luis se ha comido 3 bombones de una caja que contenía 12 bombones.  
 b) María ha esperado un cuarto de hora.  
 c) Tres de cada nueve niños tienen una mascota.  
 d) El libro de Juan tiene 15 capítulos, de 10 páginas cada uno, y él ha leído 100 páginas.  
 e) Ricardo duerme seis horas diarias.  
 f) El barco ha realizado dos terceras partes del trayecto.  
 g) He bebido media lata de refresco.  
 h) He pagado dos de las cinco letras del coche.  
 i) Ahorro la mitad de mi paga semanal.

a)  $\frac{3}{12}$

d)  $\frac{100}{150}$

g)  $\frac{1}{2}$

b)  $\frac{1}{4}$

e)  $\frac{6}{24}$

h)  $\frac{2}{5}$

c)  $\frac{3}{9}$

f)  $\frac{2}{3}$

i)  $\frac{1}{2}$

Son equivalentes las fracciones correspondientes a estos apartados: a) con b) y con e); d) con f), y g) con i).

# Fracciones

**032** ●● **¿Qué fracción del día representan 22 minutos? ¿Es una fracción irreducible? Razona la respuesta.**

El día tiene 1.440 minutos, luego la fracción es  $\frac{22}{1.440}$ , que no es irreducible, pues se puede simplificar:  $\frac{22}{1.440} = \frac{11}{720}$ .

**033** ●● **¿Qué fracción de la semana representan 2 días? ¿Y qué fracción del mes representan 9 días? ¿Son fracciones irreducibles? Razona la respuesta.**

Los 2 días son  $\frac{2}{7}$  de semana, y los 9 días representan:  $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$  de mes.

Como hemos visto, la primera fracción es irreducible, pero la segunda no, pues se puede simplificar.

**034** ●● **¿Qué fracción del año representan 3 meses? ¿Y qué fracción del año representan 2.160 horas? ¿Son equivalentes? Razona la respuesta.**

Los 3 meses representan:  $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  de año.

Como 2.160 horas = 90 días, representan:  $\frac{90}{365} = \frac{18}{73}$  de año.

Estas fracciones no son equivalentes. Podríamos afirmar que sí son equivalentes si consideramos que 90 días son 3 meses, y construimos la fracción a partir de ese dato.

**035** ● **Di si son equivalentes los siguientes pares de fracciones.**

a)  $\frac{6}{8}$  y  $\frac{36}{48}$

c)  $\frac{5}{4}$  y  $\frac{15}{8}$

e)  $\frac{9}{13}$  y  $\frac{72}{104}$

b)  $\frac{15}{12}$  y  $\frac{60}{48}$

d)  $\frac{8}{5}$  y  $\frac{24}{10}$

f)  $\frac{72}{25}$  y  $\frac{123}{115}$

a)  $\frac{6}{8} = \frac{36}{48} \rightarrow 6 \cdot 48 \stackrel{?}{=} 8 \cdot 36 \rightarrow 288 = 288$ . Sí lo son.

b)  $\frac{15}{12} = \frac{60}{48} \rightarrow 15 \cdot 48 \stackrel{?}{=} 12 \cdot 60 \rightarrow 720 = 720$ . Sí lo son.

c)  $\frac{5}{4} = \frac{15}{8} \rightarrow 5 \cdot 8 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 15 \rightarrow 40 \neq 60$ . No lo son.

d)  $\frac{8}{5} = \frac{24}{10} \rightarrow 8 \cdot 10 \stackrel{?}{=} 5 \cdot 24 \rightarrow 80 \neq 120$ . No lo son.

e)  $\frac{9}{13} = \frac{72}{104} \rightarrow 9 \cdot 104 \stackrel{?}{=} 13 \cdot 72 \rightarrow 936 = 936$ . Sí lo son.

f)  $\frac{72}{25} = \frac{123}{115} \rightarrow 72 \cdot 115 \stackrel{?}{=} 25 \cdot 123 \rightarrow 8.280 \neq 3.075$ . No lo son.

036 Calcula cuatro fracciones equivalentes a cada una de estas.

a)  $\frac{2}{7}$

b)  $\frac{1}{5}$

c)  $\frac{11}{6}$

d)  $\frac{13}{2}$

a)  $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{8}{28} = \frac{10}{35}$

c)  $\frac{11}{6} = \frac{22}{12} = \frac{33}{18} = \frac{44}{24} = \frac{55}{30}$

b)  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25}$

d)  $\frac{13}{2} = \frac{26}{4} = \frac{39}{6} = \frac{52}{8} = \frac{65}{10}$

037 Comprueba si son fracciones equivalentes.

a)  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{24}{20}$  y  $\frac{-12}{10}$

d)  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{7}{4}$ ,  $\frac{28}{4}$  y  $\frac{7}{28}$

b)  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{3}{15}$  y  $\frac{2}{10}$

e)  $\frac{-1}{2}$ ,  $\frac{2}{-4}$ ,  $\frac{3}{-6}$  y  $\frac{-4}{8}$

c)  $3$ ,  $\frac{9}{3}$  y  $\frac{24}{8}$

f)  $-3$ ,  $\frac{-6}{2}$ ,  $\frac{-42}{-14}$  y  $\frac{-9}{3}$

a) No lo son.

d) No lo son.

b) Sí lo son.

e) Sí lo son.

c) Sí lo son.

f) No lo son.

038 Calcula el número que falta para que las fracciones sean equivalentes.

a)  $\frac{6}{\square} = \frac{9}{3}$

c)  $\frac{8}{12} = \frac{2}{\square}$

b)  $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10}$

d)  $\frac{\square}{9} = \frac{8}{18}$

a)  $\frac{6}{\square} = \frac{9}{3} \rightarrow \square = \frac{18}{9} = 2$

c)  $\frac{8}{12} = \frac{2}{\square} \rightarrow \square = \frac{24}{8} = 3$

b)  $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10} \rightarrow \square = \frac{40}{5} = 8$

d)  $\frac{\square}{9} = \frac{8}{18} \rightarrow \square = \frac{72}{18} = 4$

039 Calcula la fracción irreducible.

a)  $\frac{75}{30}$

b)  $\frac{182}{48}$

c)  $\frac{121}{11}$

a)  $\frac{75}{30} = \frac{75 : 15}{30 : 15} = \frac{5}{2}$

b)  $\frac{182}{48} = \frac{182 : 2}{48 : 2} = \frac{91}{24}$

c)  $\frac{121}{11} = \frac{121 : 11}{11 : 11} = \frac{11}{1} = 11$

# Fracciones

**040** Completa las fracciones para que sean irreducibles.



- a)  $\frac{\square}{4}$       b)  $\frac{\square}{3}$       c)  $\frac{5}{\square}$       d)  $\frac{-6}{\square}$       e)  $\frac{60}{\square}$       f)  $\frac{10}{\square}$

Hay que escribir cualquier número que no tenga factores primos comunes con el número de la fracción.

- a)  $\frac{1}{4}$       b)  $\frac{2}{3}$       c)  $\frac{5}{7}$       d)  $\frac{-6}{11}$       e)  $\frac{60}{77}$       f)  $\frac{10}{13}$

**041** Responde razonadamente a estas cuestiones.



- a) ¿Existe alguna fracción equivalente a  $\frac{2}{5}$  que sea irreducible?  
 b) ¿Hay alguna fracción equivalente a  $\frac{2}{5}$  que tenga como denominador 12?  
 c) ¿Existe alguna fracción equivalente a  $\frac{2}{5}$  que tenga por numerador  $-10$ ?

- a) La única fracción irreducible que sea equivalente a  $\frac{2}{5}$  es ella misma, pues es irreducible.  
 b) No, ya que 12 no es múltiplo de 5.  
 c) Sí, por ejemplo  $\frac{2}{5} = \frac{-4}{-10}$ .

**042** Ordena estas fracciones, de mayor a menor.



- a)  $\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{3}$       b)  $\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{7}{12}$       c)  $1, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}$       d)  $\frac{4}{3}, \frac{4}{11}, 1$
- a)  $\frac{9}{3} > \frac{7}{3} > \frac{4}{3}$       c)  $\frac{11}{6} > \frac{7}{6} > 1$   
 b)  $\frac{7}{12} > \frac{5}{12} > \frac{4}{12}$       d)  $\frac{4}{3} > 1 > \frac{4}{11}$

**043** Completa la tabla.



Fracciones	Reducidas a común denominador	Ordenadas de menor a mayor
$\frac{7}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{105}{60}, \frac{36}{60}, \frac{50}{60}$	$\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{4}$
$\frac{47}{12}, \frac{23}{15}, \frac{7}{24}$	$\frac{470}{120}, \frac{184}{120}, \frac{35}{120}$	$\frac{7}{24}, \frac{23}{15}, \frac{47}{12}$

044 Ordena, de menor a mayor.

a)  $\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{7}{18}$

c)  $\frac{9}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$

b)  $\frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}$

d)  $\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{18}, \frac{7}{2}$

a)  $\frac{1}{3} < \frac{7}{18} < \frac{4}{6}$

b)  $\frac{1}{6} < \frac{2}{5} < \frac{3}{2}$

c)  $\frac{7}{12} < \frac{3}{4} < \frac{9}{2}$

d)  $\frac{1}{18} < \frac{2}{3} < \frac{7}{6} < \frac{7}{2}$

045 Ordena, de mayor a menor.

a)  $\frac{2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{-1}{4}, \frac{5}{2}$

b)  $\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{4}$

a)  $\frac{5}{2} > \frac{4}{9} > \frac{2}{5} > \frac{-1}{4} > \frac{-1}{3}$

b)  $\frac{3}{5} > \frac{1}{3} > \frac{-3}{8} > \frac{-9}{4}$

046 Calcula.

a)  $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8}$

c)  $\frac{4}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{3}$

b)  $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8}$

d)  $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{6}$

a)  $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{12 + 2 + 5}{8} = \frac{19}{8}$

b)  $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{40 - 4 + 36 - 3}{24} = \frac{69}{24} = \frac{23}{8}$

c)  $\frac{4}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{3} = \frac{8 + 3 + 28}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$

d)  $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{6} = \frac{15 + 2 - 7}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

# Fracciones

**047** Realiza estas operaciones.

a)  $1 + \frac{3}{4}$     c)  $\frac{15}{2} - 7$     e)  $9 - \frac{4}{7}$     g)  $9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$     i)  $7 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2}$

b)  $\frac{11}{3} - 2$     d)  $7 + \frac{4}{3}$     f)  $3 - \frac{2}{5}$     h)  $\frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{3}$

a)  $1 + \frac{3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$

f)  $3 - \frac{2}{5} = \frac{15-2}{5} = \frac{13}{5}$

b)  $\frac{11}{3} - 2 = \frac{11-6}{3} = \frac{5}{3}$

g)  $9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{54+2-1}{6} = \frac{55}{6}$

c)  $\frac{15}{2} - 7 = \frac{15-14}{2} = \frac{1}{2}$

h)  $\frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{3} = \frac{3+60-4}{12} = \frac{59}{12}$

d)  $7 + \frac{4}{3} = \frac{21+4}{3} = \frac{25}{3}$

i)  $7 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{28-1+10}{4} = \frac{37}{4}$

e)  $9 - \frac{4}{7} = \frac{63-4}{7} = \frac{59}{7}$

**048** Haz las operaciones.

a)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{3}\right)$

d)  $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)$

b)  $\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{7}\right)$

e)  $\left(\frac{6}{5} - \frac{1}{15}\right) + 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right)$

c)  $2 - \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\right]$

f)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{6}\right)$

a)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{3}\right) = \frac{3+3}{6} - \frac{12+35}{15} = \frac{6}{6} - \frac{47}{15} = 1 - \frac{47}{15} = \frac{15-47}{15} = \frac{-32}{15}$

b)  $\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{35-12}{15} + \frac{42+10}{35} = \frac{23}{15} + \frac{52}{35} = \frac{161+156}{105} = \frac{317}{105}$   
m.c.m. (15, 35) = 105

c)  $2 - \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\right] = 2 - \left[\frac{4}{3} - \frac{5+4}{10} - \frac{1}{3}\right] = 2 - \frac{40-27-10}{30} = \frac{60-3}{30} = \frac{57}{30} = \frac{19}{10}$

d)  $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{20} + \frac{(-11)}{60} = \frac{63-11}{60} = \frac{52}{60} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{15}\right) + 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) &= \frac{17}{15} + 2 - \frac{6}{6} = \frac{17}{15} + 2 - 1 = \\ &= \frac{17}{15} + 1 = \frac{17 + 15}{15} = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{6}\right) &= \frac{5+6}{15} - \frac{1}{4} - \frac{5-7}{6} = \frac{11}{15} - \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \\ &= \frac{44 - 15 + 20}{60} = \frac{49}{60} \end{aligned}$$

## 049 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REALIZAN LAS OPERACIONES DE SUMA Y RESTA CON FRACCIONES NEGATIVAS?

Calcula:  $\frac{9}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)$ .

PRIMERO. Se eliminan los paréntesis.

$$\frac{9}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{2} - \frac{5}{4} + \frac{4}{5}$$

$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} = + \text{---} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \frac{9}{2} - \frac{5}{4} + \frac{4}{5} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{+} \cdot \text{---} = - \text{---} \end{array}$

SEGUNDO. Se opera con las fracciones resultantes.

$$\begin{aligned} \text{m.c.m. } (2, 4, 5) &= 2^2 \cdot 5 = 20 \\ \frac{9}{2} - \frac{5}{4} + \frac{4}{5} &= \frac{90}{20} - \frac{25}{20} + \frac{16}{20} = \frac{90 - 25 + 16}{20} = \frac{81}{20} \end{aligned}$$

## 050 Haz estas operaciones.

a)  $-3 + \frac{4}{9}$

c)  $\frac{-3}{7} + (-8)$

e)  $\frac{-4}{3} + (-6)$

b)  $8 - \left(-\frac{2}{5}\right)$

d)  $\frac{5}{4} - (-7)$

f)  $-\left(\frac{-3}{4}\right) - 2$

a)  $-3 + \frac{4}{9} = \frac{-27 + 4}{9} = -\frac{23}{9}$

b)  $8 - \left(-\frac{2}{5}\right) = 8 + \frac{2}{5} = \frac{40 + 2}{5} = \frac{42}{5}$

c)  $\frac{-3}{7} + (-8) = \frac{-3}{7} - 8 = \frac{-3 - 56}{7} = -\frac{59}{7}$

d)  $\frac{5}{4} - (-7) = \frac{5}{4} + 7 = \frac{5 + 28}{4} = \frac{33}{4}$

e)  $\frac{-4}{3} + (-6) = \frac{-4}{3} - 6 = \frac{-4 - 18}{3} = -\frac{22}{3}$

f)  $-\left(\frac{-3}{4}\right) - 2 = \frac{3}{4} - 2 = \frac{3 - 8}{4} = -\frac{5}{4}$

# Fracciones

## 051 Opera.

a)  $\frac{1}{3} - 2 - \left(-\frac{4}{9}\right)$

b)  $\frac{5}{2} - \left(-2 + \frac{3}{5}\right)$

c)  $4 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d)  $-7 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{7}\right)$

a)  $\frac{1}{3} - 2 - \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{3} - 2 + \frac{4}{9} = \frac{3 - 18 + 4}{9} = \frac{-11}{9}$

b)  $\frac{5}{2} - \left(-2 + \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{2} - \left(\frac{-10 + 3}{5}\right) = \frac{5}{2} - \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{5}{2} + \frac{7}{5} =$   
 $= \frac{25 + 14}{10} = \frac{39}{10}$

c)  $4 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = 4 - \frac{8 - 3}{12} = 4 - \frac{5}{12} = \frac{48 - 5}{12} = \frac{43}{12}$

d)  $-7 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{7}\right) = -7 + \frac{-21 + 2}{14} = -7 - \frac{19}{14} = \frac{-98 - 19}{14} = \frac{-117}{14}$

## 052 Efectúa las siguientes multiplicaciones.

a)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

c)  $3 \cdot \frac{9}{6}$

b)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{2}$

d)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{21}$

a)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c)  $3 \cdot \frac{9}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

b)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{2} = \frac{30}{10} = 3$

d)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{21} = \frac{588}{168} = \frac{147}{42} = \frac{7}{2}$

## 053 Calcula estas divisiones.

a)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

c)  $\frac{12}{7} : \frac{4}{14}$

b)  $\frac{9}{2} : \frac{4}{6}$

d)  $3 : \frac{6}{4}$

a)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

c)  $\frac{12}{7} : \frac{4}{14} = \frac{168}{28} = 6$

b)  $\frac{9}{2} : \frac{4}{6} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$

d)  $3 : \frac{6}{4} = \frac{12}{6} = 2$

## 054 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REALIZAN LAS OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON FRACCIONES NEGATIVAS?

Calcula.

$$\text{a) } \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} \qquad \text{b) } -\frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{7}\right)$$

**PRIMERO.** Se realiza la operación prescindiendo del signo, y se simplifica el resultado, si se puede.

$$\text{a) } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } \frac{3}{5} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

**SEGUNDO.** Se aplica la regla de los signos.

$$\text{a) } \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{b) } -\frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{7}{10}$$

## 055 Calcula.

$$\text{a) } \frac{4}{7} : \left(\frac{-3}{14}\right)$$

$$\text{d) } \frac{-6}{5} \cdot \frac{3}{10}$$

$$\text{g) } \frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{4}\right)$$

$$\text{b) } -5 : \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \frac{5}{2} \cdot (-2)$$

$$\text{h) } \frac{-1}{4} : (-6)$$

$$\text{c) } \frac{-3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$$

$$\text{f) } \frac{-3}{8} : \left(\frac{3}{-4}\right)$$

$$\text{i) } -\frac{9}{4} : \left(-\frac{21}{2}\right)$$

$$\text{a) } \frac{4}{7} : \left(\frac{-3}{14}\right) = \frac{56}{-21} = -\frac{8}{3}$$

$$\text{f) } \frac{-3}{8} : \left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } -5 : \frac{1}{2} = -10$$

$$\text{g) } \frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{4}\right) = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\text{c) } \frac{-3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$\text{h) } \frac{-1}{4} : (-6) = \frac{1}{24}$$

$$\text{d) } \frac{-6}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{-18}{50} = -\frac{9}{25}$$

$$\text{i) } -\frac{9}{4} : \left(-\frac{21}{2}\right) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

$$\text{e) } \frac{5}{2} \cdot (-2) = \frac{-10}{2} = -5$$

# Fracciones

056

Completa las expresiones para que se cumplan estas operaciones.

a)  $\frac{\square}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

c)  $\frac{\square}{81} : \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$

b)  $\frac{\square}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$

d)  $\frac{\square}{6} : \frac{8}{9} = \frac{27}{16}$

a) 9

b) 15

c) 50

d) 9

057

Haz las operaciones.

a)  $\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1}{5}$

c)  $\frac{1}{7} : \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-3}{5}\right)$

b)  $\left(\frac{10}{3} : \frac{5}{6}\right) \cdot 4$

d)  $9 : \left(\frac{8}{3} : \frac{4}{9}\right)$

a)  $\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{105}$

b)  $\left(\frac{10}{3} : \frac{5}{6}\right) \cdot 4 = \frac{60}{15} \cdot 4 = \frac{240}{15} = 16$

c)  $\frac{1}{7} : \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-3}{5}\right) = \frac{1}{7} : \frac{(-6)}{20} = \frac{20}{(-42)} = \frac{-10}{21}$

d)  $9 : \left(\frac{8}{3} : \frac{4}{9}\right) = 9 : \frac{72}{12} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$   
(: 12)

058

Calcula.

a)  $\frac{3}{4}$  de 60

d)  $\frac{3}{8}$  de 90

g)  $\frac{2}{5}$  de 10

b)  $\frac{2}{3}$  de 23

e)  $\frac{1}{3}$  de 78

h)  $\frac{1}{5}$  de 70

c)  $\frac{7}{3}$  de 27

f)  $\frac{4}{7}$  de 29

i)  $\frac{8}{2}$  de 9

a)  $\frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{3 \cdot 60}{4} = \frac{180}{4} = 45$

f)  $\frac{4}{7} \cdot 29 = \frac{4 \cdot 29}{7} = \frac{116}{7}$

b)  $\frac{2}{3} \cdot 23 = \frac{2 \cdot 23}{3} = \frac{46}{3}$

g)  $\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{20}{5} = 4$

c)  $\frac{7}{3} \cdot 27 = \frac{7 \cdot 27}{3} = 7 \cdot 9 = 63$

h)  $\frac{1}{5} \cdot 70 = \frac{1 \cdot 70}{5} = \frac{70}{5} = 14$

d)  $\frac{3}{8} \cdot 90 = \frac{3 \cdot 90}{8} = \frac{270}{8} = \frac{135}{4}$

i)  $\frac{8}{2} \cdot 9 = \frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$

e)  $\frac{1}{3} \cdot 78 = \frac{78}{3} = 26$

059 Realiza las operaciones.

a)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - 2$

c)  $4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9}$

e)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{8} + \left(\frac{-3}{2}\right)$

b)  $\frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{4}{5}$

d)  $\frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{1}{4}$

f)  $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{-12}{5}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right)$

a)  $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{5}{18} - 2 = \frac{5 - 36}{18} = \frac{-31}{18}$

b)  $\frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{2} - \frac{12}{5} = \frac{35 - 24}{10} = \frac{11}{10}$

c)  $4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9} = 4 - \frac{21}{18} = \frac{72 - 21}{18} = \frac{51}{18} = \frac{17}{6}$

d)  $\frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{10 - 3}{4} = \frac{7}{4}$

e)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{8} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{40}{40} - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$

f)  $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{-12}{5}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-28}{15} - \frac{3}{4} = \frac{-112 - 45}{60} = \frac{-157}{60}$

060 Calcula.

a)  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{8}\right)$

d)  $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$

b)  $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right)$

e)  $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)$

c)  $\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{21} + \frac{1}{6}\right)$

f)  $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

a)  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{8}\right) = \frac{9 - 2}{12} \cdot \frac{2 - 6}{8} = \frac{7 \cdot (-4)}{12 \cdot 8} = -\frac{7}{24}$

b)  $\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = \frac{3 + 2}{15} \cdot \frac{10 - 3}{30} = \frac{5 \cdot 7}{15 \cdot 30} = \frac{7}{90}$

c)  $\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{21} + \frac{1}{6}\right) = \frac{12 - 7}{21} \cdot \frac{4 + 7}{42} = \frac{5 \cdot 11}{21 \cdot 42} = \frac{55}{882}$

d)  $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{35 - 2}{14} \cdot \frac{2 - 1}{6} = \frac{33 \cdot 1}{14 \cdot 6} = \frac{11}{28}$

e)  $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right) = \frac{16 - 15}{20} \cdot \frac{2 + 5}{20} = \frac{1 \cdot 7}{20 \cdot 20} = \frac{7}{400}$

f)  $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3 - 4}{24} \cdot \frac{2 - 1}{4} = \frac{-1 \cdot 1}{24 \cdot 4} = -\frac{1}{96}$

# Fracciones

061

Haz estas operaciones, indicando los pasos realizados.

a)  $\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) - 1$

c)  $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right)$

b)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - 1$

d)  $\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) - 1 &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5-4}{10} - 1 = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 10} - 1 = \frac{3}{80} - 1 = \\ &= \frac{3-80}{80} = -\frac{77}{80} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{16} - \frac{2}{5} - 1 = \frac{15-32-80}{80} = -\frac{97}{80}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{5}{3} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right) &= \frac{5}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{21-2}{6} = \frac{5}{3} - \frac{2 \cdot 19}{5 \cdot 6} = \frac{5}{3} - \frac{19}{15} = \\ &= \frac{25-19}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3} &= \frac{25-6}{15} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3} = \frac{19 \cdot 7}{15 \cdot 2} - \frac{1}{3} = \frac{133}{30} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{133-10}{30} = \frac{123}{30} = \frac{41}{10} \end{aligned}$$

062

Realiza las siguientes operaciones.

a)  $\frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{3}$

c)  $\left(\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{2}$

e)  $\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{5} \cdot 2$

b)  $\frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right)$

d)  $\left[\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} - 2\right] \cdot \frac{5}{3}$

f)  $-3 \cdot \frac{4}{15} - \left(\frac{7}{8} \cdot 5 - 9\right)$

$$\text{a) } \frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{7}{5} - \frac{1}{3} = \frac{25-21-5}{15} = -\frac{1}{15}$$

$$\text{b) } \frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - \frac{21-5}{15} = \frac{5}{3} - \frac{16}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{10}{3} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{2} = \frac{40-9}{12} \cdot \frac{7}{2} = \frac{217}{24}$$

$$\text{d) } \left[\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} - 2\right] \cdot \frac{5}{3} = \left(-\frac{28}{15} - 2\right) \cdot \frac{5}{3} = -\frac{58}{15} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{58}{9}$$

$$\text{e) } \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{5} \cdot 2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6}\right) - \frac{8}{5} = \frac{13}{12} - \frac{8}{5} = -\frac{31}{60}$$

$$\text{f) } -3 \cdot \frac{4}{15} - \left(\frac{7}{8} \cdot 5 - 9\right) = -\frac{4}{5} - \left(\frac{35}{8} - 9\right) = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{37}{8}\right) = \frac{153}{40}$$

063 **Calcula.**

a)  $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) \cdot 5 - \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$

d)  $1 - \left[\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)\right]$

b)  $\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot 5 - \frac{1}{10}\right] \cdot \frac{3}{4} - \frac{6}{5}$

e)  $\frac{8}{3} - \left[2 : \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \frac{5}{2}\right]$

c)  $1 - \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)$

a)  $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) \cdot 5 - \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{13}{10} \cdot 5 - \frac{9}{10} = \frac{13}{2} - \frac{9}{10} = \frac{56}{10} = \frac{28}{5}$

b)  $\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right) \cdot 5 - \frac{1}{10}\right] \cdot \frac{3}{4} - \frac{6}{5} = \left[\frac{13}{10} \cdot 5 - \frac{1}{10}\right] \cdot \frac{3}{4} - \frac{6}{5} =$   
 $= \frac{32}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{6}{5} = \frac{24}{5} - \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$

c)  $1 - \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = 1 - 6 - \frac{1}{30} = -\frac{151}{30}$

d)  $1 - \left[\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)\right] = 1 - \left(\frac{3}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}\right) = 1 - \left(\frac{15}{2} - \frac{7}{18}\right) =$   
 $= 1 - \frac{64}{9} = -\frac{55}{9}$

e)  $\frac{8}{3} - \left[2 : \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \frac{5}{2}\right] = \frac{8}{3} - \left[2 : \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{2}\right] = \frac{8}{3} - \left(-3 - \frac{5}{2}\right) =$   
 $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{8}{3} + \frac{11}{2} = \frac{49}{6}$

064 **HAZLO ASÍ****¿CÓMO SE OPERA CON UNA FRACCIÓN QUE TIENE OTRA FRACCIÓN EN EL DENOMINADOR?**

Calcula. a)  $\frac{3}{1 + \frac{2}{5}}$

b)  $2 - \frac{3}{3 - \frac{7}{4}}$

**PRIMERO.** Se resuelve la operación que figura en el denominador.

a)  $1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

b)  $3 - \frac{7}{4} = \frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$

**SEGUNDO.** Se divide el numerador entre la fracción resultante.

a)  $\frac{3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{7}{5}} = 3 : \frac{7}{5} = \frac{15}{7}$

b)  $2 - \frac{3}{3 - \frac{7}{4}} = 2 - \frac{3}{\frac{5}{4}} = 2 - \left(3 : \frac{5}{4}\right) = 2 - \frac{12}{5} = \frac{10}{5} - \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}$

# Fracciones

065

Efectúa las siguientes operaciones.

a)  $1 - \frac{3}{4}$

c)  $1 - \frac{11}{2 + \frac{1}{5}}$

b)  $4 - \frac{7}{2 + \frac{3}{5}}$

d)  $-3 + \frac{2}{1 + \frac{8}{3}}$

a)  $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

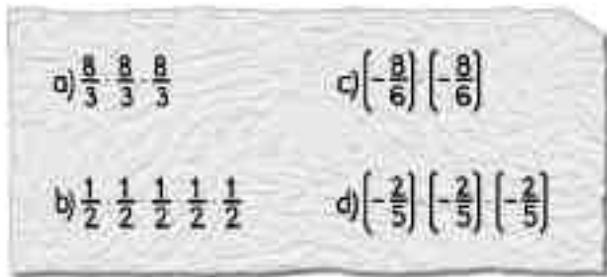
b)  $4 - \frac{7}{2 + \frac{3}{5}} = 4 - \frac{7}{\frac{13}{5}} = 4 - \frac{35}{13} = \frac{17}{13}$

c)  $1 - \frac{11}{2 + \frac{1}{5}} = 1 - \frac{11}{\frac{11}{5}} = 1 - 5 = -4$

d)  $-3 + \frac{2}{1 + \frac{8}{3}} = -3 + \frac{2}{\frac{11}{3}} = -3 + \frac{6}{11} = -\frac{27}{11}$

066

Escribe en forma de potencia estos productos, y calcula el resultado.



a)  $\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{512}{27}$

b)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

c)  $\left(-\frac{8}{6}\right) \cdot \left(-\frac{8}{6}\right) = \left(-\frac{8}{6}\right)^2 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$

d)  $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$

067 Escribe en forma de potencia, si es posible.

a)  $\frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11}$

d)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$

b)  $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{6}$

e)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{7}$

c)  $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7}$

f)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

a)  $\frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11} = \left(\frac{8}{11}\right)^5$

b)  $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{6} \rightarrow$  No es posible escribirlo en forma de potencia.

c)  $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \rightarrow$  No es posible escribirlo en forma de potencia.

d)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)^3$

e)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{7} = \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^3$

f)  $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 = -\left(\frac{2}{7}\right)^3$

068 Expresa en forma de producto y halla el resultado de las siguientes potencias.

a)  $\left(\frac{10}{3}\right)^2$

b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

c)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

a)  $\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{10^2}{3^2} = \frac{100}{9}$

c)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1^7}{2^7} = -\frac{1}{128}$

b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

069 Calcula.

a)  $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c)  $\sqrt{\frac{81}{49}}$

e)  $\sqrt{\frac{49}{144}}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{36}}$

d)  $\sqrt{\frac{121}{441}}$

f)  $\sqrt{\frac{64}{16}}$

a)  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

c)  $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$

e)  $\sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{7}{12}$

b)  $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

d)  $\sqrt{\frac{121}{441}} = \frac{11}{21}$

f)  $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{8}{4} = 2$

# Fracciones

070

Determina el valor de  $a$  en estas igualdades.

a)  $\left(\frac{5}{4}\right)^a = \frac{125}{64}$

c)  $\left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

b)  $\left(-\frac{5}{4}\right)^a = -\frac{125}{64}$

d)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

a)  $\left(\frac{5}{4}\right)^a = \frac{125}{64} \rightarrow a = 3$

c)  $\left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16} \rightarrow a = 2$

b)  $\left(-\frac{5}{4}\right)^a = -\frac{125}{64} \rightarrow a = 3$

d)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16} \rightarrow a = 2$

071

Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a)  $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

d)  $\frac{(-2)^5}{7^5} = \left(-\frac{2}{7}\right)^5$

b)  $\left(\frac{-3}{-3}\right)^4 = 81$

e)  $\frac{(-2)^4}{7^4} = \left(-\frac{2}{7}\right)^4$

c)  $- \left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{-343}{8}$

f)  $\frac{(-2)^4}{7^4} = \left(\frac{2}{7}\right)^4$

a) No es cierta.

d) Sí es cierta.

b) No es cierta.

e) Sí es cierta.

c) No es cierta.

f) Sí es cierta.

072

Fran ha regado  $\frac{4}{6}$  del césped y Raquel los  $\frac{4}{12}$  restantes. ¿Cuál de los dos ha regado mayor zona de césped?

Fran:  $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ ; Raquel:  $\frac{4}{12} \rightarrow \frac{8}{12} > \frac{4}{12}$

Fran ha regado mayor zona de césped.

073

Un libro se hace con la colaboración de 18 personas. De ellas,  $\frac{1}{3}$  corresponde a autores,  $\frac{1}{9}$  a secretarías,  $\frac{1}{6}$  a maquetistas,  $\frac{2}{6}$  a dibujantes y el resto a personal de imprenta. Calcula el número de colaboradores de cada clase.

$\frac{1}{3}$  de 18 = 6 autores

$\frac{1}{6}$  de 18 = 3 maquetistas

$\frac{1}{9}$  de 18 = 2 secretarías

$\frac{2}{6}$  de 18 = 6 dibujantes

Personal de imprenta =  $18 - (6 + 2 + 3 + 6) = 18 - 17 = 1$

- 074 En un colegio hay 1.095 alumnos que realizan actividades extraescolares:  $\frac{1}{3}$  hace judo,  $\frac{2}{5}$  estudia italiano y el resto realiza ballet. ¿Cuántos alumnos hacen cada actividad?

$$\text{Judo: } \frac{1}{3} \text{ de } 1.095 = 365 \text{ alumnos.} \quad \text{Italiano: } \frac{2}{5} \text{ de } 1.095 = 438 \text{ alumnos.}$$

$$\text{Ballet: } \frac{4}{15} \text{ de } 1.095 = 292 \text{ alumnos.}$$

- 075 Un camión transporta 15 toneladas de fruta;  $\frac{1}{5}$  son naranjas,  $\frac{2}{3}$  son manzanas y el resto son peras. ¿Cuántas toneladas de cada fruta transporta el camión?

$$\text{Naranjas: } \frac{1}{5} \text{ de } 15 = \frac{15}{5} = 3 \text{ toneladas.}$$

$$\text{Manzanas: } \frac{2}{3} \text{ de } 15 = \frac{30}{3} = 10 \text{ toneladas.}$$

$$\text{Peras: } 15 - (3 + 10) = 2 \text{ toneladas.}$$



## 076 HAZLO ASÍ

### ¿CÓMO SE CALCULA UNA PARTE DE UN TOTAL?

En una fiesta se colocaron 16 bombillas de colores. Al terminar solo funcionaba un cuarto de ellas. ¿Cuántas bombillas se fundieron?

**PRIMERO.** Se calcula la fracción de bombillas fundidas.

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Los  $\frac{3}{4}$  de las bombillas terminaron fundidas.

**SEGUNDO.** Se determina el número que representa la fracción.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 16 = \frac{3 \cdot 16}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ bombillas}$$

Se fundieron 12 bombillas.

- 077 De los 30 alumnos de una clase,  $\frac{3}{5}$  son chicas. ¿Cuántos chicos hay?

$$\text{Son } \frac{3}{5} \text{ de } 30 = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18 \text{ chicas. Por tanto, hay } 30 - 18 = 12 \text{ chicos.}$$

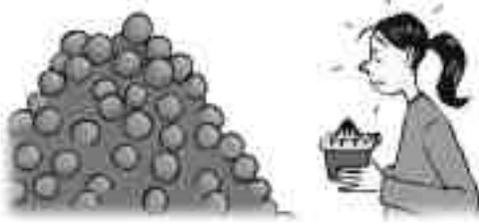
# Fracciones

078



De una naranja se aprovechan las  $\frac{4}{9}$  partes para hacer zumo y el resto es piel.

Si utilizamos 27 kg de naranjas, ¿qué cantidad de zumo obtendremos?  
¿Y de piel?



$$\frac{4}{9} \text{ de } 27 = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12 \rightarrow 12 \text{ kg de zumo de naranja}$$

$$27 - 12 = 15 \text{ kg de piel de naranja}$$

079



De una clase de 24 alumnos, los  $\frac{3}{8}$  han tenido la gripe. ¿Qué fracción de alumnos no han enfermado? ¿Cuántos alumnos son?

Si los  $\frac{3}{8}$  de los alumnos han enfermado,  $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  de los alumnos no han enfermado.

$$\frac{5}{8} \text{ de } 24 = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15. \text{ No han enfermado 15 alumnos.}$$

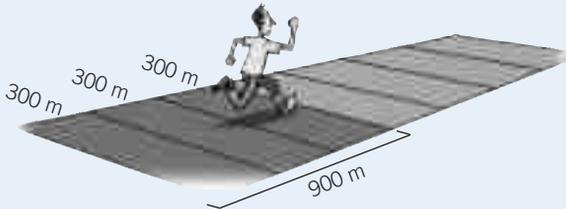
080

## HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE HALLA EL TOTAL CONOCIENDO UNA DE LAS PARTES?

He recorrido 900 metros, que suponen los  $\frac{3}{7}$  del recorrido. ¿Cuál es la longitud total?

**PRIMERO.** Se calcula cuántos metros representa una parte.



$$\text{Si } \frac{3}{7} \text{ son } 900 \text{ m} \rightarrow \frac{1}{7} \text{ son } 900 : 3 = 300 \text{ m}$$

**SEGUNDO.** Se determina el total del recorrido.

Si una de las 7 partes es 300 m, las 7 partes serán:  $300 \cdot 7 = 2.100 \text{ m}$ .

**081** Si tres cuartos de kilo de jamón cuestan 15 €, ¿cuánto vale un kilo y medio?

Si  $\frac{3}{4}$  de kilo cuestan 15 €,  $\frac{1}{4}$  de kilo cuesta:  $15 : 3 = 5$  €.

Un kilo y medio es:  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ , y cuesta:  $6 \cdot 5 = 30$  €.

**082** Según una encuesta, las familias españolas dedican  $\frac{1}{3}$  de su renta a la adquisición de una vivienda, es decir, destinan un promedio de 11.000 € anuales a este concepto. ¿Cuál es la renta media mensual de una familia española?

Si  $\frac{1}{3}$  de la renta anual es 11.000 €, la renta anual es:  $11.000 \cdot 3 = 33.000$  €.

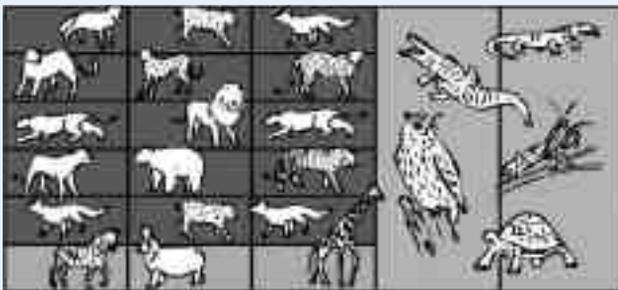
La renta media mensual es:  $33.000 : 12 = 2.750$  €.

**083** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UNA FRACCIÓN DE OTRA FRACCIÓN?

Los tres quintos de los animales de un parque natural son mamíferos, y de estos mamíferos, los cinco sextos son carnívoros. ¿Qué fracción del total de animales representan los mamíferos carnívoros?

**PRIMERO.** Se representa gráficamente la situación.



La figura queda dividida en 30 partes, de las que se toman 15.

**SEGUNDO.** Se calcula la fracción del total.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Los mamíferos carnívoros representan la mitad de los animales del parque natural.

# Fraciones

084



En la selección para un concurso televisivo, eliminan a  $\frac{7}{12}$  de los aspirantes en la primera prueba y en la segunda prueba abandonan  $\frac{4}{13}$  de los que quedaban.

a) ¿Qué fracción de los concursantes superan la segunda prueba?

b) Si 130 aspirantes pasan la primera prueba, ¿cuántos quedan tras la segunda?

a) En la 2.ª prueba eliminan a  $\frac{4}{13}$  de  $\frac{5}{12}$  y continúan:  $1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$  de  $\frac{5}{12}$ .

b) Tras la 2.ª prueba quedan:  $\frac{9}{13}$  de 130 =  $\frac{9}{13} \cdot 130 = 90$  aspirantes.

085



Un panadero aparta cada semana, para el consumo de su familia,  $\frac{1}{100}$  de las barras de pan que fabrica. Si vende 3.415 barras y regala lo que le sobra,  $\frac{1}{70}$  del total de barras, ¿cuántas barras de pan elabora?



Las 3.415 barras son:  $1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{70} = \frac{683}{700}$  del total.  
m.c.m. (100, 70) = 700

Por tanto, el panadero elabora:  $3.415 \cdot \frac{700}{683} = 3.500$  barras.

086



Luis, Pedro y Antonio reunieron las cantidades de dinero que sus familias les regalaron en Navidad.

Luis recibió  $\frac{6}{8}$  de 100 €,

Pedro recibió  $\frac{7}{8}$  de 100 €,

y Antonio recibió  $\frac{3}{8}$  de 100 €. ¿Cuánto dinero consiguieron los tres juntos?



Luis:  $\frac{6}{8}$  de 100 = 75 €.

Antonio:  $\frac{3}{8}$  de 100 = 37,50 €.

Pedro:  $\frac{7}{8}$  de 100 = 87,50 €.

Total = 75 + 87,50 + 37,50 = 200 €

087

Si a la cantidad de dinero que tengo le añadiese su mitad, más su quinta parte más 1 €, podría comprar un televisor cuyo precio es 324 €. ¿Cuánto dinero tengo?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10}$$

Los  $\frac{17}{10}$  de la cantidad de dinero que tengo son:

$$324 - 1 = 323 \text{ €}$$

Luego la cantidad de dinero que tengo es:

$$323 : \frac{17}{10} = \frac{323 \cdot 10}{17} = 190 \text{ €}$$

088

Escribe una fracción que sea mayor que  $\frac{2}{5}$  y menor que  $\frac{3}{5}$ . ¿Podrías escribir dos fracciones? ¿Y tres? Razona cuántas fracciones puedes escribir entre ellas.

La diferencia entre ambas fracciones es:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Si a la fracción menor le sumamos  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \dots$  de  $\frac{1}{5}$ , obtendremos fracciones que están comprendidas entre las dos fracciones dadas.

Una fracción mayor que  $\frac{2}{5}$  y menor que  $\frac{3}{5}$  es:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4+1}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

Por tanto,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$  y  $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+2}{15} = \frac{8}{15}$

son dos fracciones comprendidas entre las dadas.

Otra forma de hacerlo sería con fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} < \frac{7}{15} < \frac{8}{15} < \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20} < \frac{9}{20} < \frac{10}{20} < \frac{11}{20} < \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Es decir, entre dos fracciones dadas podemos escribir tantas fracciones como queramos.

# Fracciones

089

Ordena estas fracciones, sabiendo que  $a$  y  $b$  son dos números naturales tales que  $a < b < a^2$ .

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a+b}{b}$$

Reducimos las fracciones a común denominador:

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{ab} \quad \frac{1}{b} = \frac{a}{ab} \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{a(a+b)}{ab}$$

Comparamos los numeradores sabiendo que  $a < b$ :

$$a < b < a^2 < a(a+b) \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a+b}{b}$$

090

Calcula estas diferencias.

$$1 - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

Observa los resultados y calcula.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{999.000}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{999.000} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1.000} = 1 - \frac{1}{1.000} = \frac{999}{1.000}$$

091

Los egipcios en la antigüedad solo utilizaban símbolos para representar fracciones cuyo numerador fuera la unidad. El resto de fracciones las representaban expresándolas como sumas de las anteriores.

Así, para expresar  $\frac{2}{3}$ , ellos escribían  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ . Escribe con este método

las siguientes fracciones:  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{5}{11}$ .

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{28} = \frac{1}{28} + \frac{7}{28} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{11} = \frac{45}{99} = \frac{1}{99} + \frac{44}{99} = \frac{1}{99} + \frac{4}{9} = \frac{1}{99} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$$

## EN LA VIDA COTIDIANA

092

Sergio trabaja en un supermercado y es el encargado de preparar los pedidos que se entregan a domicilio. Todos los pedidos figuran en un panel, y Sergio se encarga de hacer un paquete con los productos de cada pedido.

<p><b>PEDIDO 1</b></p> <p>5 botes de tomate de 1/2 kg. 2 kg de filetes de ternera. 1 kg y medio de chuletas de cordero. Tres cuartos de carne picada. Un cuarto de jamón serrano.</p>	<p><b>PEDIDO 2</b></p> <p>Medio kilo de queso. Tres cuartos de sardinas. 1 kg y cuarto de almejas. 3 kg y 1/2 de lomo de cerdo. Cuarto y mitad de higaditos. Tres cuartos de panceta. 2 cajas de galletas de 1/2 kg.</p>
<p><b>PEDIDO 3</b></p> <p>1 kg de filetes de pollo. 1 kg y 1/2 de merluza. Tres cuartos de setas. 1 kg y cuarto de carne adobada.</p>	<p><b>PEDIDO 4</b></p> <p>2 kg y cuarto de callos. 5 kg de patatas. 1 kg y 1/2 de naranjas.</p>
<p><b>PEDIDO 5</b></p> <p>1 kg de filetes de ternera. 1 kg y medio de salchichas. Cuarto y mitad de gambas. Tres cuartos de carne para guisar.</p>	<p><b>PEDIDO 6</b></p> <p>1 kg y 3/4 de lomo de cerdo. 3 kg y medio de peras. 1/2 kg de cerezas.</p>

Después de elaborar los paquetes, uno para cada pedido, los mete en contenedores, de manera que el peso de los paquetes que introduce en cada contenedor no supere los 12 kg.

Para la entrega a domicilio, disponen de una moto, que solo puede transportar un contenedor, y un coche que, por limitaciones de espacio, puede llevar hasta 4 contenedores.

¿Cómo lo debería hacer Sergio?

Pedido 1 = 7 kg

Pedido 2 = 8,125 kg

Pedido 3 = 9,5 kg

Pedido 4 = 8,75 kg

Pedido 5 = 3,625 kg

Pedido 6 = 5,75 kg

El menor número de contenedores necesarios es 5; por tanto, metemos 4 contenedores que llevan un pedido cada uno en el coche y el contenedor que lleva dos pedidos en la moto, que tarda menos tiempo.

Organiza los contenedores de tal manera que se tarde lo mínimo posible en el reparto. Recuerda que la moto, por cuestión de aparcamiento, tarda la mitad de tiempo que el coche en el reparto...



# Fracciones

093



Los ordenadores nos permiten escribir textos utilizando el tipo de letra y el tamaño de la misma que nos interese en cada momento. El tamaño de las letras se mide en puntos.

Un punto equivale a  $\frac{3}{8}$  de milímetro.

Según las reglas de edición, el interlineado (distancia entre dos líneas de texto) debe ser 2 puntos mayor que el tamaño de las letras, salvo que corresponda a un punto y aparte, en cuyo caso debe ser medio cícero mayor (un cícero equivale a 12 puntos).



Un folio de A4 mide 297 milímetros, y se suele dejar un margen superior de 3 centímetros y de 2,5 en la parte inferior.



Si tenemos un texto de 6 párrafos (tiene cinco puntos y aparte) y 56 líneas, ¿cuál sería el máximo cuerpo de letra que podríamos aplicar para utilizar una sola página?

$297 - 30 - 25 = 242$  mm tiene un folio de tamaño A4.

Como 56 líneas producen 55 espacios de interlineado, 5 de estos espacios corresponden a un salto de párrafo.

$$\begin{aligned} 56 \cdot \frac{3}{8}x + 50 \cdot \frac{3}{8} \cdot (x + 2) + 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot (x + 6) &= \\ &= \frac{3}{8} \cdot (56x + 50x + 100 + 5x + 30) = \frac{3}{8} \cdot (111x + 130) < 242 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{8} \cdot (111x + 130) = 242 \rightarrow 111x = \frac{8}{3} \cdot 242 - 130 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \left( \frac{8}{3} \cdot 242 - 130 \right) : 111 = 4,64$$

Es decir, el máximo cuerpo de letra que podríamos aplicar sería de 4 puntos.

094

Estas son las vidrieras que se han diseñado para el nuevo Palacio de Congresos.

Tienen forma de triángulo equilátero que, a su vez, se divide en otros triángulos equiláteros.



Si la superficie de cada vidriera es de  $1 \text{ m}^2$ , calcula la superficie de cristal azul, rojo, verde, amarillo, marrón y naranja que se necesita para las 22 vidrieras.

$$\text{Azul} \longrightarrow \frac{1}{4} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{4} = 5,5 \text{ m}^2$$

$$\text{Rojo} \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{12} = \frac{11}{6} = 1,833... \text{ m}^2$$

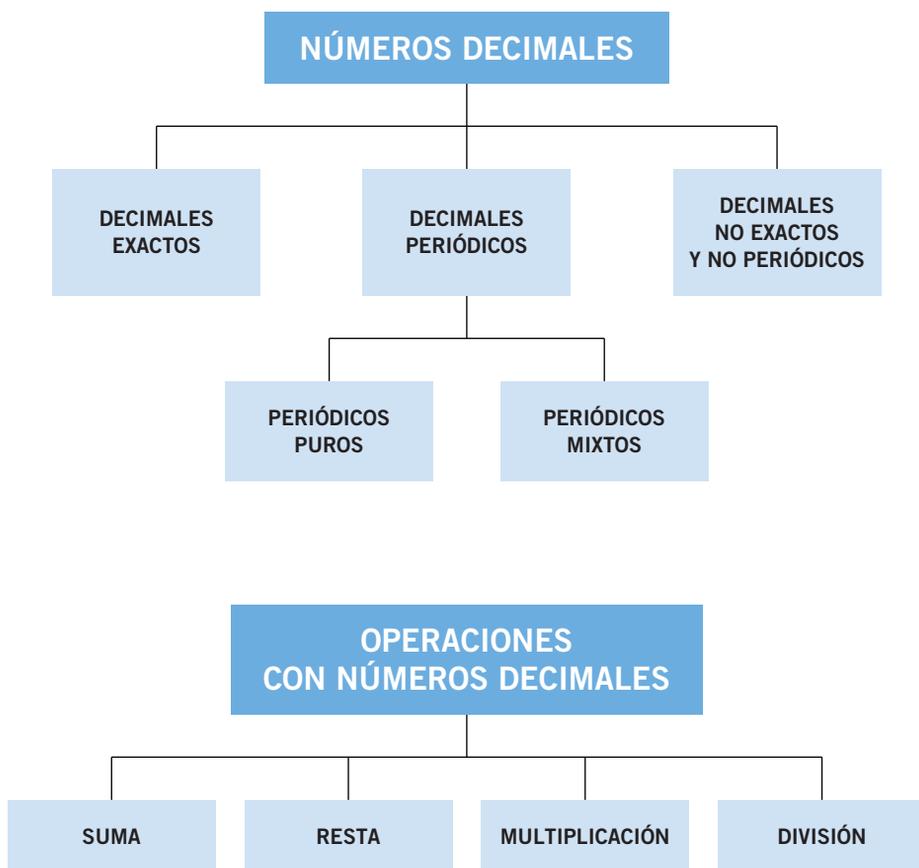
$$\text{Verde} \longrightarrow \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{64} = \frac{11}{32} = 0,34375 \text{ m}^2$$

$$\text{Amarillo} \longrightarrow \frac{4}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{16} = \frac{11}{8} = 1,375 \text{ m}^2$$

$$\text{Marrón} \longrightarrow \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{16} = \frac{11}{8} = 1,375 \text{ m}^2$$

$$\text{Naranja} \longrightarrow \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48} \text{ de cada vidriera} \longrightarrow \frac{22}{48} = \frac{11}{24} = 0,45833... \text{ m}^2$$

# Números decimales



## A lomos del viento

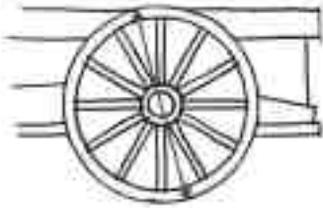
El encargo estaba terminado, y a medida que la nave iba ganando velocidad con ayuda del viento, y devoraba kilómetros de playa en dirección a ninguna parte, la cara de los pasajeros se transformaba: la tez de unos se volvía blanca, mientras que se sujetaban aterrados a los asideros del carro; por el contrario, la faz de otros enrojecía, a la vez que gritaban como queriendo animar a los invisibles caballos que movían el carro.

Su excelencia, el conde Maurice de Nassau, mecenas de la obra, se sentía plenamente satisfecho.

—Señor Stevin, este carro movido por la fuerza del viento que hincha su vela, supera con creces mi encargo. Vamos más de veinticinco personas y dejamos atrás a los hombres, que nos siguen a todo galope montados en sus caballos.

Simon Stevin se demoró un momento, el tiempo justo que tardó en anotar unas cantidades:

—Como podéis ver en los cálculos, la velocidad se puede aumentar si utilizamos ruedas más pequeñas, de un metro y veintiséis centímetros.



0 1 2  
1 2 6 m

Stevin escribía así el número decimal 1,26.

*¿Cuál es tu altura en metros? Escríbela como lo hubiera hecho Simon Stevin.*

**Por ejemplo, si un alumno mide 1,76 m, se escribe el número 176, poniendo encima del número 1 un círculo con un 0 en su interior; encima del 7, un círculo con un 1 en su interior, y encima del 6, un círculo con un 2 en su interior.**



# Números decimales

## EJERCICIOS

**001** Expresa de forma abreviada los números decimales.

a) 34,65555...

c) 9,763333...

b) 0,31111...

d) 0,6666...

a)  $34,6\overline{5}$

c)  $9,76\overline{33}$

b)  $0,3\overline{1}$

d)  $0,6\overline{6}$

**002** Clasifica estos números decimales.

a) 61,454545...

d) 58,37777...

b) 2,5

e) 0,55

c) 7,3333...

f) 6,34444...

- a) Decimal periódico puro, de período 45.
- b) Decimal exacto.
- c) Decimal periódico puro, de período 3.
- d) Decimal periódico mixto, de período 7 y anteperíodo 3.
- e) Decimal exacto.
- f) Decimal periódico mixto, de período 4 y anteperíodo 3.

**003** Escribe y clasifica el número decimal correspondiente a estas fracciones.

a)  $\frac{45}{3}$

b)  $\frac{12}{13}$

c)  $\frac{5}{12}$

d)  $\frac{95}{3}$

a)  $\frac{45}{3} = 15 \rightarrow$  Entero

b)  $\frac{12}{13} = 0,923076923076... = 0,\overline{923076} \rightarrow$  Decimal periódico puro

c)  $\frac{5}{12} = 0,416666... = 0,41\overline{6} \rightarrow$  Decimal periódico mixto

d)  $\frac{95}{3} = 31,6666... = 31,\overline{6} \rightarrow$  Decimal periódico puro

**004** ¿Cuáles son no exactos y no periódicos?

a) 5,2233344444...

c) 5,2345345345...

b) 5,232425...

d) 5,223223223...

- a) Es no exacto y no periódico, porque no hay ningún grupo de cifras que se repita.
- b) Es no exacto y no periódico, pues no hay ningún grupo de cifras que se repita.
- c) Es periódico mixto, de período 345 y anteperíodo 2.
- d) Es periódico puro, de período 223.

**005** Ordena, de mayor a menor, los siguientes números decimales.

a) 6,1; 4,22; 4,02; 6,11; 3,99; 3,9

b) 5,602; 5,611; 5,6005; 5,60102

c) 0,02; -1,05; 0,8; 0,12; -0,025; 0,07

a)  $6,11 > 6,1 > 4,22 > 4,02 > 3,99 > 3,9$

b)  $5,611 > 5,602 > 5,60102 > 5,6005$

c)  $0,8 > 0,12 > 0,07 > 0,02 > -0,025 > -1,05$

**006** Escribe cinco números comprendidos entre:

a) 0,5 y 1,2      b) 0,05 y 0,5      c) -2,01 y -2

a)  $0,5 < 0,6 < 0,7 < 0,8 < 0,9 < 1 < 1,2$

b)  $0,05 < 0,1 < 0,2 < 0,3 < 0,4 < 0,45 < 0,5$

c)  $-2,01 < -2,005 < -2,004 < -2,003 < -2,002 < -2,001 < -2$

**007** Escribe tres números mayores que -7,123456...

Tres números mayores que -7,123456... son, por ejemplo: -7,1; -2 y 0.

**008** Efectúa estas operaciones.

a)  $72,82 + 4,003 + 9,0195$

b)  $(5,02 - 3,009) + (7,96 - 2,1)$

c)  $42,78 - (13,25 - 10,9672)$

a) 85,8425

b) 7,871

c) 40,4972

**009** Resuelve.

a)  $3,2 \cdot 0,45$

b)  $7,25 \cdot 2,042$

a) 1,44

b) 14,8045

**010** Haz las siguientes operaciones.

a)  $(5,03 - 4,95) \cdot 1,26$

b)  $9,82 + 6,2 \cdot 0,02$

a) 0,1008

b) 9,944

**011** Completa el término que falta.

a)  $7,24 + \square = 9,567$

b)  $\square - 65,005 = 23,675$

a) 2,327

b) 88,68

# Números decimales

**012** Resuelve estas divisiones.

a)  $459,3 : 5$

c)  $478 : 7,86$

b)  $37,485 : 14$

d)  $1.000,59 : 0,02$

a) 91,86

c) 60,8142

b) 2,6775

d) 50.029,5

**013** Completa las operaciones.

a)  $23,4 : \square = 5,85$

b)  $\square : 6,24 = 3$

a) 4

b) 18,72

**014** Dispongo de 126,92 € y quiero comprar un libro que cuesta 25,60 € y todos los tebeos que pueda adquirir. Si cada tebeo cuesta 5,96 €, ¿cuántos tebeos podré comprar?

Tras comprar el libro tengo:  $126,92 - 25,60 = 101,32$  €.

Puedo comprar:  $101,32 : 5,96 = 17$  tebeos.



**015** Resuelve estas raíces cuadradas.

a)  $\sqrt{19}$

e)  $\sqrt{37}$

b)  $\sqrt{51}$

f)  $\sqrt{127}$

c)  $\sqrt{7}$

g)  $\sqrt{625}$

d)  $\sqrt{16}$

h)  $\sqrt{1}$

a)  $4^2 < 19 < 5^2 \rightarrow$  La raíz entera es  $\sqrt{19} = 4$  y el resto es:  $19 - 4^2 = 3$ .

b)  $7^2 < 51 < 8^2 \rightarrow$  La raíz entera es  $\sqrt{51} = 7$  y el resto es:  $51 - 7^2 = 2$ .

c)  $2^2 < 7 < 3^2 \rightarrow$  La raíz entera es  $\sqrt{7} = 2$  y el resto es:  $7 - 2^2 = 3$ .

d) La raíz exacta es  $\sqrt{16} = 4$ , porque  $16 = 4^2$ .

e)  $6^2 < 37 < 7^2 \rightarrow$  La raíz entera es  $\sqrt{37} = 6$  y el resto es:  $37 - 6^2 = 1$ .

f)  $11^2 < 127 < 12^2 \rightarrow$  La raíz entera es  $\sqrt{127} = 11$  y el resto es:  $127 - 11^2 = 6$ .

g) La raíz exacta es  $\sqrt{625} = 25$ , porque  $625 = 25^2$ .

h) La raíz exacta es  $\sqrt{1} = 1$ , porque  $1 = 1^2$ .

**016** Calcula la aproximación decimal de las siguientes raíces.

a)  $\sqrt{21}$

b)  $\sqrt{10}$

c)  $\sqrt{45}$

d)  $\sqrt{84}$

a)  $4,58 < \sqrt{21} < 4,59$

b)  $3,16 < \sqrt{10} < 3,17$

c)  $6,70 < \sqrt{45} < 6,71$

d)  $9,16 < \sqrt{84} < 9,17$

**017** ¿Existen dos números enteros cuya aproximación decimal de su raíz sea 6,23?

No hay ningún número entero cuya aproximación a su raíz sea 6,23.

**018** Calcula la raíz cuadrada y el resto de los siguientes números. Comprueba que has realizado bien los cálculos.

- |          |          |
|----------|----------|
| a) 379   | d) 273   |
| b) 1.735 | e) 2.670 |
| c) 1.043 | f) 3.941 |

a)  $\sqrt{379} = 19$  y el resto es:  $379 - 19^2 = 18$ .

b)  $\sqrt{1.735} = 41$  y el resto es:  $1.735 - 41^2 = 54$ .

c)  $\sqrt{1.043} = 32$  y el resto es:  $1.043 - 32^2 = 19$ .

d)  $\sqrt{273} = 16$  y el resto es:  $273 - 16^2 = 17$ .

e)  $\sqrt{2.670} = 51$  y el resto es:  $2.670 - 51^2 = 69$ .

f)  $\sqrt{3.941} = 62$  y el resto es:  $3.941 - 62^2 = 97$ .

**019** La raíz cuadrada de un número es 32 y su resto es 24. ¿De qué número se trata?

El número es:  $32^2 + 24 = 1.048$ .

**020** ¿Es posible que la raíz cuadrada de un número sea 8 y su resto 60? Razónalo.

No es posible, porque si la raíz cuadrada de un número,  $x$ , es 8:  $8^2 < x < 9^2$ . El resto es menor que 16, pues  $80 - 64 = 16$ .

En general, si la raíz entera de un número es  $n$ , su resto será menor o igual que  $2n$ .

**021** Obtén la raíz cuadrada con un decimal.

- |        |          |
|--------|----------|
| a) 379 | d) 1.438 |
| b) 735 | e) 496   |
| c) 273 | f) 7.881 |

a)  $\sqrt{379} = 19,4$  y el resto es:  $379 - 19,4^2 = 2,64$ .

b)  $\sqrt{735} = 27,1$  y el resto es:  $735 - 27,1^2 = 0,59$ .

c)  $\sqrt{273} = 16,5$  y el resto es:  $273 - 16,5^2 = 0,75$ .

d)  $\sqrt{1.438} = 37,9$  y el resto es:  $1.438 - 37,9^2 = 1,59$ .

e)  $\sqrt{496} = 22,2$  y el resto es:  $496 - 22,2^2 = 3,16$ .

f)  $\sqrt{7.881} = 88,7$  y el resto es:  $7.881 - 88,7^2 = 13,31$ .

# Números decimales

**022** Halla el radicando si:

a) La raíz es 18,9 y el resto es 2,79.

b) La raíz es 39,2 y el resto es 3,36.

a)  $18,9^2 + 2,79 = 360$

b)  $39,2^2 + 3,36 = 1.540$

**023** Calcula el resto de los siguientes casos.

a) Radicando = 530 Raíz = 23

b)  $\sqrt{1.170} = 34,2$

a)  $530 - 23^2 = 1$

b)  $1.170 - 34,2^2 = 0,36$

**024** Un número tiene por raíz cuadrada entera 5 y su resto es el mayor posible.

a) ¿Cuál es el resto?

b) ¿Y el número?

a) El resto es:  $2 \cdot 5 = 10$ .

b) El número es:  $5^2 + 10 = 35$ .

**025** Aproxima por redondeo y por truncamiento a las centésimas estos números decimales.

a) 156,2593

c) 36,243

b) 1,2064

d) 9,0503

a) Redondeo: 156,26

Truncamiento: 156,25

b) Redondeo: 1,21

Truncamiento: 1,20

c) Redondeo: 36,24

Truncamiento: 36,24

d) Redondeo: 9,05

Truncamiento: 9,05

**026** Estima el resultado de esta operación.

$$1,48 + 1,9785 - 0,9467 \cdot 3,023$$

Aproximando, el resultado es:  $1,5 + 2 - 1 \cdot 3 = 0,5$ .

El resultado exacto es:  $1,48 + 1,9785 - 0,9467 \cdot 3,023 = 0,5966$ .

**027** Aproxima por redondeo a las milésimas el área de un cuadrado de lado 2,35 cm.

El área del cuadrado es  $2,35^2 = 5,5225 \text{ cm}^2$ , y redondeando a las milésimas el área es  $5,523 \text{ cm}^2$ .

## ACTIVIDADES

**028** Expresa numéricamente las siguientes cantidades.

- a) Cuatro centésimas.                      d) Ciento ocho unidades cuatro milésimas.
  - b) Seis décimas.                            e) Mil una unidades siete diezmilésimas.
  - c) Trece milésimas.                        f) Catorce unidades dos centésimas.
- a) 0,04                                      c) 0,013                                      e) 1.001,0007  
     b) 0,6                                        d) 108,004                                    f) 14,02

**029** Escribe cómo se leen estos números.

- a) 3,24    e) 102,04
  - b) 49,3    f) 1.800,556
  - c) 0,001    g) 2,00005
  - d) 1,03    h) 25,5759
- a) Tres unidades veinticuatro centésimas.  
     b) Cuarenta y nueve unidades tres décimas.  
     c) Una milésima.  
     d) Una unidad tres centésimas.  
     e) Ciento dos unidades cuatro centésimas.  
     f) Mil ochocientos unidades quinientas cincuenta y seis milésimas.  
     g) Dos unidades cinco cienmilésimas.  
     h) Veinticinco unidades cinco mil setecientas cincuenta y nueve diezmilésimas.

**030** Completa la tabla de descomposición de números en sus componentes.

Número	C	D	U	d	c	m	dm
12,59	0	1	2	5	9	0	0
385,075	3	8	5	0	7	5	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0,0023	0	0	0	0	0	2	3
0,1	0	0	0	1	0	0	0
105,426	1	0	5	4	2	6	0
2,359	0	0	2	3	5	9	0

**031** Completa.

- a) Dos unidades son  milésimas.
  - b) Una décima son  centésimas.
  - c) Tres unidades y dos décimas son  milésimas.
  - d) Veinte milésimas son  centésimas.
- a) Dos unidades son 2.000 milésimas.  
     b) Una décima son 10 centésimas.  
     c) Tres unidades y dos décimas son 3.200 milésimas.  
     d) Veinte milésimas son 2 centésimas.

# Números decimales

032

Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

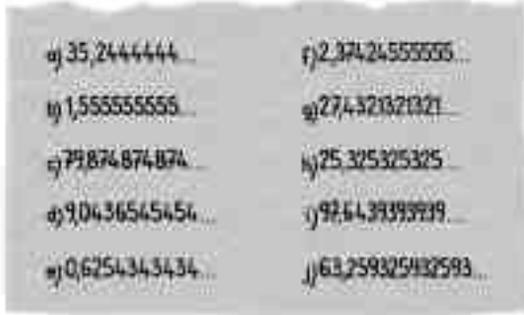


- a) 1,05 unidades equivalen a ciento cinco centésimas.
- b) Cuatro unidades y tres décimas son cuatro unidades y treinta centésimas.
- c) Entre 2,452 y 2,453 no existe ningún número.
- d) 3,005 es mayor que 3,05.
- e) Tres unidades con dos décimas equivalen a treinta y dos mil milésimas.

- a) Verdadera.
- b) Verdadera.
- c) Falsa, pues hay infinitos números.
- d) Falsa, porque es menor que 3,05.
- e) Falsa, ya que equivale a 3.200 milésimas.

033

Señala el período y el anteperíodo de estos números periódicos.



- |                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| a) Período = 4    | Anteperíodo = 2        |
| b) Período = 5    | Anteperíodo = no tiene |
| c) Período = 874  | Anteperíodo = no tiene |
| d) Período = 54   | Anteperíodo = 0436     |
| e) Período = 43   | Anteperíodo = 625      |
| f) Período = 5    | Anteperíodo = 37424    |
| g) Período = 321  | Anteperíodo = 4        |
| h) Período = 325  | Anteperíodo = no tiene |
| i) Período = 39   | Anteperíodo = 64       |
| j) Período = 2593 | Anteperíodo = no tiene |

034

Sin realizar la división, indica qué fracciones corresponden a decimales exactos y cuáles no.



- |                  |                   |                    |                    |
|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\frac{3}{8}$ | c) $\frac{11}{6}$ | e) $\frac{8}{21}$  | g) $\frac{12}{13}$ |
| b) $\frac{7}{9}$ | d) $\frac{2}{25}$ | f) $\frac{17}{40}$ | h) $\frac{23}{18}$ |

- |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a) Exacto    | c) No exacto | e) No exacto | g) No exacto |
| b) No exacto | d) Exacto    | f) Exacto    | h) No exacto |

**035** Di a qué clase de números decimales corresponde la expresión decimal de estas fracciones.

a)  $\frac{39}{70}$

c)  $\frac{39}{8}$

e)  $\frac{39}{125}$

g)  $\frac{39}{60}$

b)  $\frac{78}{39}$

d)  $\frac{39}{40}$

f)  $\frac{39}{180}$

h)  $\frac{117}{39}$

- a) Periódico mixto      c) Exacto      e) Exacto      g) Exacto  
 b) Natural      d) Exacto      f) Periódico mixto      h) Natural

**036** Indica qué números son enteros y cuáles no.

a) 15,02

d)  $50,\overline{003}$

g) 0,5

b) 25,00

e) 0,005

h)  $42,\overline{02}$

c)  $\frac{95}{2}$

f)  $\frac{15}{5}$

i)  $\frac{100}{4}$

- a) Decimal exacto      d) Decimal periódico      g) Decimal exacto  
 b) Entero      e) Decimal exacto      h) Decimal periódico  
 c) Decimal exacto      f) Entero      i) Entero

**037** Realiza la división e identifica el resultado como números periódicos puros o periódicos mixtos, indicando la parte entera y el período.

a)  $\frac{2}{9}$

c)  $\frac{26}{180}$

e)  $\frac{1}{198}$

b)  $\frac{8}{11}$

d)  $\frac{29}{900}$

f)  $\frac{100}{36}$

a)  $\frac{2}{9} = 0,\widehat{2}$

c)  $\frac{26}{180} = \frac{13}{90} = 0,1\widehat{4}$

e)  $\frac{1}{198} = 0,00\widehat{50}$

b)  $\frac{8}{11} = 0,7\widehat{2}$

d)  $\frac{29}{900} = 0,03\widehat{2}$

f)  $\frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2,\widehat{7}$

**038** Escribe tres fracciones que den lugar a:

a) Números enteros.

b) Números decimales exactos.

c) Números decimales periódicos.

a) Números enteros:  $\frac{15}{3} = 5$ ;  $\frac{15}{5} = 3$ ;  $\frac{15}{1} = 15$ .

b) Números decimales exactos:  $\frac{15}{2} = 7,5$ ;  $\frac{15}{10} = 1,5$ ;  $\frac{15}{1.000} = 0,015$ .

c) Números decimales periódicos:  $\frac{15}{9} = 1,\widehat{6}$ ;  $\frac{15}{14} = 1,0\widehat{714285}$ ;  $\frac{15}{11} = 1,\widehat{36}$ .

# Números decimales

**039** Indica cuáles de los siguientes números decimales son no exactos y no periódicos.



- a) 2,3333...                      e) 2,355355355...  
b) 2,353355333555...        f) 2,535535535...  
c) 2,35555...                    g) 2,353553555...  
d) 2,333                            h) 2,353553555

Son no exactos y no periódicos los números de los apartados:

- b) 2,353355333555...  
g) 2,353553555...

**040** Escribe los números decimales con estas características y di a qué clase corresponden.



- a) Parte entera 26 y período 5.  
b) Parte entera 8 y período 96.  
c) Parte entera 5 y parte decimal 209.  
d) Parte entera 0, parte decimal no periódica 4 y período 387.  
e) Parte entera 1, parte decimal no periódica 0 y período 3.

- a)  $26,\widehat{5}$                       d)  $0,4\widehat{387}$   
b)  $8,\widehat{96}$                       e)  $1,0\widehat{3}$   
c) 5,209

**041 HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXPRESA UN NÚMERO DECIMAL EXACTO EN FORMA DE FRACCIÓN?

Expresa en forma de fracción.

- a) 3,87                                      b) 0,0556

**PRIMERO.** Se determina el número de decimales.

- a) 3,87  $\longrightarrow$  2 decimales  
b) 0,0556  $\rightarrow$  4 decimales

**SEGUNDO.** Se expresa el número como una fracción cuyo:

- Numerador es el número sin la coma decimal.
- Denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

$$a) 3,87 = \frac{387}{100}$$

$$b) 0,0556 = \frac{556}{10.000} = \frac{139}{2.500}$$

**042** Escribe en forma de fracción los números decimales exactos. Si es posible, simplifica el resultado.

- a) 25,78      c) 27,73      e) 25,793      g) 3,697      i) 97,95  
 b) 0,257      d) 1.520,3      f) 39,75      h) 375,8      j) 150,2

$$a) 25,78 = \frac{2.578}{100} = \frac{1.289}{50}$$

$$f) 39,75 = \frac{3.975}{100} = \frac{159}{4}$$

$$b) 0,257 = \frac{257}{1.000}$$

$$g) 3,697 = \frac{3.697}{1.000}$$

$$c) 27,73 = \frac{2.773}{100}$$

$$h) 375,8 = \frac{3.758}{10} = \frac{1.879}{5}$$

$$d) 1.520,3 = \frac{15.203}{10}$$

$$i) 97,95 = \frac{9.795}{100} = \frac{1.959}{20}$$

$$e) 25,793 = \frac{25.793}{1.000}$$

$$j) 150,2 = \frac{1.502}{10} = \frac{751}{5}$$

**043** En cada uno de estos números decimales, ¿qué cifra ocupa el lugar 13 de la parte decimal?

- a) 4,2345      b) 3,653      c) 5,25      d) 93,2456

a) 4

b) 6

c) 0

d) 6

**044** Ordena los siguientes números decimales exactos, de menor a mayor.

- a) 0,75; 0,57; 0,507; 0,705  
 b) 0,102; 0,05; 0,105; 0,501; 0,251

$$a) 0,507 < 0,57 < 0,705 < 0,75$$

$$b) 0,05 < 0,102 < 0,105 < 0,251 < 0,501$$

**045** Completa con un número decimal exacto.

- a) 14,065 > □ > 13,95      c) 14,065 > □ > 14,061  
 b) 14,065 > □ > 14,06      d) 14,065 > □ > 14,0651

$$a) 14,065 > 14 > 13,95$$

$$c) 14,065 > 14,062 > 14,061$$

$$b) 14,065 > 14,062 > 14,06$$

$$d) 14,065 > 14,06505 > 14,0651$$

**046** Escribe tres decimales entre cada par.

- a) 2,3 y 3,6      c) 2,31 y 2,32  
 b) 2,3 y 2,4      d) 2,31 y 2,311

$$a) 2,4; 2,5 \text{ y } 2,6$$

$$c) 2,3101; 2,3102 \text{ y } 2,3103$$

$$b) 2,35; 2,36 \text{ y } 2,37$$

$$d) 2,3101; 2,3102 \text{ y } 2,3103$$

# Números decimales

047 Ordena, de menor a mayor, estos números.



$0,2\overline{5}$ ;  $0,02\overline{5}$ ;  $0,2\overline{5}$ ;  $0,20\overline{5}$ ;  $0,2\overline{05}$

$$0,02\overline{5} < 0,20\overline{5} < 0,2\overline{05} < 0,2\overline{5} < 0,2\overline{5}$$

048 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DETERMINA UN NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO COMPRENDIDO ENTRE OTROS DOS?

Determina un número decimal periódico comprendido entre:

a)  $5,7\overline{}$  y  $5,8\overline{}$

b)  $3,4\overline{5}$  y  $3,4\overline{6}$

PRIMERO. Se escriben los números con la misma cantidad de decimales.

a)  $5,7\overline{}$  →  $5,777$

b)  $3,4\overline{5}$  →  $3,455$

$5,8\overline{}$  →  $5,888$

$3,4\overline{6}$  →  $3,466$

SEGUNDO. Se añaden al número menor más cifras decimales que sean mayores que el último decimal. Estas cifras y el período forman el nuevo período.

a)  $5,7\overline{}$  <  $5,78\overline{0}$  <  $5,781\overline{}$  <  $5,782\overline{}$  <  $5,783\overline{}$  < ... <  $5,8\overline{}$

b)  $3,4\overline{5}$  <  $3,45\overline{6}$  <  $3,457\overline{}$  <  $3,458\overline{}$  < ... <  $3,4\overline{6}$

049 Completa con un número decimal periódico puro.



a)  $4,37\overline{5} < \square < 4,37\overline{6}$

c)  $5,6\overline{}$  <  $\square < 5,7\overline{}$

b)  $1,2\overline{5} < \square < 1,2\overline{6}$

d)  $0,0\overline{6} < \square < 0,0\overline{7}$

a)  $4,37\overline{5} < 4,37\overline{54} < 4,37\overline{6}$

c)  $5,6\overline{}$  <  $5,67\overline{}$  <  $5,7\overline{}$

b)  $1,2\overline{5} < 1,2\overline{53} < 1,2\overline{6}$

d)  $0,0\overline{6} < 0,0\overline{61} < 0,0\overline{7}$

050 Completa con un número decimal periódico mixto.



a)  $2,37\overline{5} < \square < 2,37\overline{6}$

c)  $6,328\overline{3} < \square < 6,328\overline{3}$

b)  $0,1\overline{2} < \square < 1,1\overline{3}$

d)  $0,0\overline{61} < \square < 0,0\overline{62}$

a)  $2,37\overline{5} < 2,37\overline{54} < 2,37\overline{6}$

c)  $6,328\overline{3} < 6,328\overline{329} < 6,328\overline{3}$

b)  $0,1\overline{2} < 0,1\overline{23} < 1,1\overline{3}$

d)  $0,0\overline{61} < 0,0\overline{613} < 0,0\overline{62}$

051 ¿Existe un número decimal exacto, otro periódico puro y otro mixto entre  $7,459\overline{5}$  y  $7,459\overline{6}$ ?



Exacto →  $7,459\overline{5} < 7,459\overline{6} < 7,459\overline{6}$

Periódico puro →  $7,459\overline{5} < 7,459\overline{6} < 7,459\overline{6}$

Periódico mixto →  $7,459\overline{5} < 7,459\overline{664} < 7,459\overline{6}$

052 Completa la siguiente tabla.

+	1,7	0,5	4,25	3,15	0,7	0,65
2,4	4,1	2,9	6,65	5,55	3,1	3,05
3,5	5,2	4	7,75	6,65	4,2	4,15
4,9	6,6	5,4	9,15	8,05	5,6	5,55
0,75	2,45	1,25	5	4,9	1,45	1,4
5,25	6,95	5,75	9,5	8,4	5,95	5,9
3,84	5,54	4,34	8,09	6,99	4,54	4,49
8,23	9,93	8,73	12,48	11,38	8,93	8,88
7,44	9,14	7,94	11,69	10,59	8,14	8,09
6,50	8,2	7	10,75	9,75	7,2	7,15

053 Efectúa estas operaciones.

- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| a) $4,5 + 6,7$     | e) $27,92 - 8,03$      |
| b) $7,05 + 8,19$   | f) $359,157 - 148,049$ |
| c) $9,06 + 1,7$    | g) $0,03 - 0,003$      |
| d) $152,3 + 4,938$ | h) $10,45 - 7,6923$    |
| a) 11,2            | e) 19,89               |
| b) 15,24           | f) 211,108             |
| c) 10,76           | g) 0,027               |
| d) 157,238         | h) 2,7577              |

054 Completa la siguiente tabla.

×	0,2	10	3	2,5	0,3	1,4	100	0,1
10	2	100	30	25	3	14	1.000	1
100	20	1.000	300	250	30	140	10.000	10
0,2	0,04	2	0,6	0,5	0,06	0,28	20	0,02
2,2	0,44	22	6,6	5,5	0,66	3,08	220	0,22
3,6	0,72	36	10,8	9	1,08	5,04	360	0,36
4,25	0,85	42,5	12,75	10,625	1,275	5,95	425	0,425
0,3	0,06	3	0,9	0,75	0,09	0,42	30	0,03
0,25	0,05	2,5	0,75	0,625	0,075	0,35	25	0,025
0,75	0,15	7,5	2,25	1,875	0,225	1,05	75	0,075
1,1	0,22	11	3,3	2,75	0,33	1,54	110	0,11

055 Efectúa estas operaciones.

- |                      |                        |                         |                          |
|----------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $3,75 \cdot 3$    | d) $7 \cdot (-6,46)$   | g) $82,9 \cdot (-2,7)$  | j) $-5,39 \cdot (-31,5)$ |
| b) $-15,02 \cdot 5$  | e) $4,2 \cdot 3,6$     | h) $-18,9 \cdot 6,5$    |                          |
| c) $(-3) \cdot 0,02$ | f) $7,25 \cdot (-3,9)$ | i) $-110,14 \cdot 1,03$ |                          |
| a) 11,25             | d) $-12,92$            | g) $-223,83$            | j) 169,785               |
| b) $-75,1$           | e) 15,12               | h) $-122,85$            |                          |
| c) $-0,06$           | f) $-28,275$           | i) $-113,4442$          |                          |

# Números decimales

056 Realiza estas operaciones.

- a)  $(4,2 + 7,98) - 5,32$                       c)  $(263,45 - 193,3) + 10,7629$   
b)  $(11,95 - 6,792) - 0,04$                     d)  $7,005 - (96,82 + 13,99)$   
a) 6,86    c) 80,9129  
b) 5,118    d) -103,805

057 Calcula.

- a)  $(21,5 + 7,96) - (14,3 + 2,857)$   
b)  $(52,89 - 26,14) - (3,25 - 1,0002)$   
c)  $(62,36 + 39,485) + (15,942 - 6,7)$   
d)  $(100,9 - 9,99) - (70,7 + 5,006)$   
a) 12,303    c) 111,087  
b) 24,5002    d) 15,204

058 Calcula.

- a)  $49,5 : 8$                       c)  $4.536,65 : 4$                       e)  $158 : 6,3$   
b)  $148,725 : 3$                     d)  $57,3 : 7,2$                       f)  $9.437,02 : 3,125$   
a) 6,1875    c) 1.134,1625                                      e)  $25,0\overline{79365}$   
b) 49,575    d)  $7,958\overline{3}$     f) 3.019,8464

059 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS DECIMALES?

Calcula:  $4,56 : 2 + 3 \cdot (7,92 - 5,65)$ .

PRIMERO. Se realizan las operaciones entre paréntesis.

$$4,56 : 2 + 3 \cdot (7,92 - 5,65) = 4,56 : 2 + 3 \cdot 2,27$$

SEGUNDO. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, y por último, las sumas y restas en el mismo orden.

$$4,56 : 2 + 3 \cdot 2,27 = 2,28 + 6,81 = 9,09$$

060 Dados los números decimales:  $a = 35,49$   $b = 67,50$   $c = 15,75$  calcula.

- a)  $b - a$                       d)  $b - c$                       g)  $a + b$                       j)  $b : 2$   
b)  $a + c$                       e)  $2 \cdot b + 3 \cdot c$                       h)  $b + c$                       k)  $c : 3$   
c)  $a - c$                       f)  $4 \cdot a - 2 \cdot c$                       i)  $b - 2c$                       l)  $a : 7$   
a) 32,01                      d) 51,75                      g) 102,99                      j) 33,75  
b) 51,24                      e) 182,25                      h) 83,25                      k) 5,25  
c) 19,74                      f) 110,46                      i) 36                      l) 5,07

**061** Haz las operaciones.

- a)  $2,4 \cdot (3,02 + 0,456) - (9,231 + 0,4)$   
 b)  $12,84 : 3,21 - (16,001 + 0,225) \cdot 1,2$   
 c)  $102,48 : 4,27 \cdot 1,2 - 445,98$

a)  $-1,2886$                       b)  $-15,4712$                       c)  $-417,18$

**062** Resuelve, respetando la jerarquía de las operaciones.

- a)  $33,7 \cdot 4,5 + 7,2 \cdot 0,05$   
 b)  $(33,7 \cdot 4,5 + 7,2) \cdot 0,05$   
 c)  $33,7 \cdot (4,5 + 7,2 \cdot 0,05)$

a)  $152,01$                       b)  $7,9425$                       c)  $163,782$

**063** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE MULTIPLICA Y SE DIVIDE UN NÚMERO DECIMAL POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS?

Calcula.

- a)  $84,26 \cdot 10$   
 b)  $5,2 \cdot 1.000$   
 c)  $84,26 : 10$   
 d)  $5,2 : 1.000$

**PRIMERO.** Para multiplicar se mueve la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. En el caso de que no haya cifras suficientes, se completa con ceros el resultado.

- a)  $84,26 \cdot 10 = 842,6$   
 b)  $5,2 \cdot 1.000 = 5.200$

**SEGUNDO.** Para dividir se mueve la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. En el caso de que no haya cifras suficientes, se completa con ceros el resultado.

- c)  $84,26 : 10 = 8,426$   
 d)  $5,2 : 1.000 = 0,0052$

**064** Efectúa estas multiplicaciones y divisiones.

- a)  $0,02 \cdot 10$                       d)  $0,02 : 10$   
 b)  $1,05 \cdot 100$                       e)  $1,05 : 100$   
 c)  $0,145 \cdot 100$                       f)  $0,145 : 100$

a)  $0,2$                                       d)  $0,002$   
 b)  $105$                                       e)  $0,0105$   
 c)  $14,5$                                       f)  $0,00145$

# Números decimales

**065** Resuelve estas operaciones, respetando la jerarquía de las operaciones.



a)  $54,2 - 7,2 \cdot 10$

b)  $(513,02 - 79,7) \cdot 1.000$

c)  $(148,35 - 9,6 \cdot 100) - 10,467$

a)  $-17,8$

b)  $433.320$

c)  $-822,117$

**066** Resuelve estas operaciones, respetando la jerarquía de las operaciones.



a)  $17,94 \cdot 100 - 8,05 : 0,6$

d)  $(8,72 - 7,85) \cdot 0,1 - 0,2$

b)  $9,8 \cdot 10 + 41,96 : 1.000$

e)  $18,9654 : (1,35 + 1,05)$

c)  $100,15 : 100 - 3,995 \cdot 0,05$

f)  $9,025 - 2,46 : (1,3 + 0,01)$

a)  $1.780,5833\dots$

c)  $0,80175$

e)  $7,90225$

b)  $98,04196$

d)  $-0,113$

f)  $7,14713\dots$

**067** Completa las series.



a)  $15 \xrightarrow{+0,25} \square \xrightarrow{+0,25} \dots \xrightarrow{+0,25} 20$

b)  $50 \xrightarrow{-0,75} \square \xrightarrow{-0,75} \dots \xrightarrow{-0,75} 35$

c)  $1,5 \xrightarrow{\cdot 2,1} \square \xrightarrow{\cdot 2,1} \dots \xrightarrow{\cdot 2,1} 29,17215$

d)  $76,527504 \xrightarrow{:1,8} \square \xrightarrow{:1,8} \dots \xrightarrow{:1,8} 4,05$

a) 15

b) 50

c) 1,5

d) 76,527504

15,25

49,25

3,15

42,51528

15,5

48,5

6,615

23,6196

15,75

47,75

13,8915

13,122

16

47

29,17215

7,29

16,25

46,25

4,05

16,5

45,5

16,75

44,75

17

44

17,25

43,25

17,5

42,5

17,75

41,75

18

41

18,25

40,25

18,5

39,5

18,75

38,75

19

38

19,25

37,25

19,5

36,5

19,75

35,75

20

35

**068** Calcula mediante tanteo el valor aproximado, con dos decimales, de estas raíces cuadradas.

a)  $\sqrt{37}$

c)  $\sqrt{89}$

e)  $\sqrt{111}$

b)  $\sqrt{48}$

d)  $\sqrt{72}$

f)  $\sqrt{131}$

a)  $\sqrt{37} = 6,08$

c)  $\sqrt{89} = 9,43$

e)  $\sqrt{111} = 10,53$

b)  $\sqrt{48} = 6,92$

d)  $\sqrt{72} = 6,48$

f)  $\sqrt{131} = 11,44$

**069**  Resuelve las siguientes raíces cuadradas.

a)  $\sqrt{121}$

e)  $\sqrt{24.964}$

b)  $\sqrt{625}$

f)  $\sqrt{71.289}$

c)  $\sqrt{441}$

g)  $\sqrt{92.416}$

d)  $\sqrt{196}$

h)  $\sqrt{351.649}$

a)  $\sqrt{121} = 11$

e)  $\sqrt{24.964} = 158$

b)  $\sqrt{625} = 25$

f)  $\sqrt{71.289} = 267$

c)  $\sqrt{441} = 21$

g)  $\sqrt{92.416} = 304$

d)  $\sqrt{196} = 14$

h)  $\sqrt{351.649} = 593$

**070** Señala, sin realizar cálculos escritos, cuáles de las afirmaciones son falsas.

a)  $\sqrt{23} = 4$  y resto 7

e)  $\sqrt{85} = 9$  y resto 5

b)  $\sqrt{30} = 5$  y resto 10

f)  $\sqrt{80} = 9$  y resto 1

c)  $\sqrt{45} = 7$  y resto 4

g)  $\sqrt{96} = 9$  y resto 15

d)  $\sqrt{60} = 7$  y resto 11

h)  $\sqrt{204} = 14$  y resto 2

Son falsas las afirmaciones de los apartados: b), c), e), f) y h).

**071** Calcula la raíz cuadrada y realiza la comprobación.

a) 835

c) 1.482

b) 5.793

d) 4.877

a)  $\sqrt{835} = 28$  y resto 51

c)  $\sqrt{1.482} = 38$  y resto 38

b)  $\sqrt{5.793} = 76$  y resto 17

d)  $\sqrt{4.877} = 69$  y resto 116

**072** Halla la raíz cuadrada, con un decimal, y realiza la comprobación.

a) 657

c) 1.778

b) 8.271

d) 3.489

a)  $\sqrt{657} = 25,6$  y resto 1,64

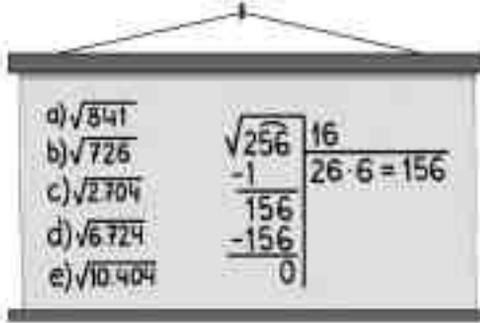
c)  $\sqrt{1.778} = 42,1$  y resto 5,59

b)  $\sqrt{8.271} = 90,9$  y resto 8,19

d)  $\sqrt{3.489} = 59$  y resto 8

# Números decimales

073 Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números.



- a)  $\sqrt{841} = 29$                       c)  $\sqrt{2.704} = 52$                       e)  $\sqrt{10.404} = 102$   
 b)  $\sqrt{726} = 26$  y resto 50                      d)  $\sqrt{6.724} = 82$

074 Halla la raíz cuadrada, con dos decimales, de estos números enteros.

- a)  $\sqrt{89}$                       c)  $\sqrt{549}$                       e)  $\sqrt{1.082}$   
 b)  $\sqrt{243}$                       d)  $\sqrt{870}$                       f)  $\sqrt{3.401}$
- a)  $\sqrt{89} = 9,43$                       c)  $\sqrt{549} = 23,43$                       e)  $\sqrt{1.082} = 32,89$   
 b)  $\sqrt{243} = 15,58$                       d)  $\sqrt{870} = 29,49$                       f)  $\sqrt{3.401} = 58,31$

075 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDE CALCULAR LA RAÍZ CUADRADA DE ALGUNOS NÚMEROS DECIMALES?

Calcula  $\sqrt{0,09}$ .

PRIMERO. Se escribe el número racional en forma de fracción.

$$\sqrt{0,09} = \sqrt{\frac{9}{100}}$$

SEGUNDO. Se halla la raíz cuadrada de la fracción resultante.

$$\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

076 Calcula estas raíces.

- a)  $\sqrt{0,64}$                       c)  $\sqrt{0,81}$                       e)  $\sqrt{0,25}$   
 b)  $\sqrt{0,49}$                       d)  $\sqrt{0,36}$                       f)  $\sqrt{0,0121}$
- a)  $\sqrt{0,64} = 0,8$                       c)  $\sqrt{0,81} = 0,9$                       e)  $\sqrt{0,25} = 0,5$   
 b)  $\sqrt{0,49} = 0,7$                       d)  $\sqrt{0,36} = 0,6$                       f)  $\sqrt{0,0121} = 0,11$

**077** Aproxima y redondea 72,289 a las décimas.

El truncamiento es 72,2 y el redondeo es 72,3.

**078** Aproxima y redondea 0,397 a las centésimas.

El truncamiento es 0,39 y el redondeo es 0,4.

**079** Aproxima y redondea 125,3925 a las milésimas.

El truncamiento es 125,392 y el redondeo es 125,393.

**080** Completa la tabla con las aproximaciones de los siguientes valores.

1,25667;  $2,\bar{5}$ ;  $22,4\bar{5}$ ;  $0,54\bar{7}$  y  $\sqrt{5}$

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	1,2	1,25	1,256
Redondeo	1,3	1,26	1,257

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	2,5	2,55	2,555
Redondeo	2,6	2,56	2,556

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	22,4	22,45	22,454
Redondeo	22,5	22,45	22,455

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	0,5	0,54	0,547
Redondeo	0,5	0,55	0,548

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	2,2	2,23	2,236
Redondeo	2,2	2,24	2,236

**081** Calcula el cociente  $40 : 17$  redondeando el resultado a las centésimas.

$$40 : 17 = 2,35$$

**082** ¿Qué error se comete al aproximar  $2,506 + 13,007$  por 15,5?  
¿Y por 15,52?

$$2,506 + 13,007 = 15,513$$

$$\text{El error cometido es: } 15,513 - 15,5 = 0,013.$$

$$\text{El error cometido es: } 15,513 - 15,52 = -0,007 \rightarrow 0,007.$$

# Números decimales

**083** ¿Qué error se comete al aproximar  $0,8235 \cdot 1,5$  por  $1,2353$ ? ¿Y por  $1,235$ ?



$$0,8235 \cdot 1,5 = 1,23525$$

El error cometido es:  $1,23525 - 1,2353 = -0,00005 \rightarrow 0,00005$ .

El error cometido es:  $1,23525 - 1,235 = 0,00025$ .

**084** En la frutería he comprado  $2,4$  kg de naranjas;  $1,56$  kg de manzanas;  $0,758$  kg de uvas;  $545$  g de fresas y  $255$  g de cerezas.



a) ¿Cuánto pesa la compra?

b) ¿Cuánto me he gastado?



La compra pesa:  $2,4 + 1,56 + 0,758 + 0,545 + 0,255 = 5,518$  kg.

Por tanto, me he gastado:

$$2,4 \cdot 1,90 + 1,56 \cdot 1,25 + 0,758 \cdot 2,36 + 0,545 \cdot 2,87 + 0,255 \cdot 3,05 = 10,64 \text{ €}$$

**085** El alumno más alto de la clase mide  $1,72$  cm y el más bajo  $1,48$  cm. Calcula la diferencia entre ambos y exprésala en metros.



$$1,72 - 1,48 = 0,24$$

La diferencia (en m) entre los dos alumnos es  $0,24$  m.

**086** Un padre quiere repartir  $15,70$  € entre sus cuatro hijos a partes iguales. ¿Cuánto recibirá cada uno?



Cada hijo recibe:  $15,70 : 4 = 3,92$  €  
y sobran 2 céntimos de euro.



**087** Tengo que pagar 192,75 € en tres plazos:

- En el primer plazo pago la mitad.
- En el segundo plazo, la tercera parte.
- Y en el tercero, el resto.

Calcula cuánto pagaré en cada plazo.

En el primer plazo pago:  $192,75 : 2 = 96,38$  €.

En el segundo plazo pago:  $192,75 : 3 = 64,25$  €.

En el tercer plazo pago:  $192,75 - 96,38 - 64,25 = 32,12$  €.

**088** Si una pulgada equivale a 2,54 cm:

- a) ¿Qué longitud tiene un televisor de 27 pulgadas? ¿Y uno de 24 pulgadas?
- b) ¿Cuántas pulgadas son 45,725 cm?

a) La diagonal del televisor mide:  $27 \cdot 2,54 = 68,58$  cm.

La diagonal del televisor mide:  $24 \cdot 2,54 = 60,96$  cm.

b) Como  $45,725 : 2,54 = 18,002$ , entonces 45,725 cm equivalen a 18 pulgadas.

**089** Una onza equivale a 28,35 g.

- a) ¿Cuántas onzas tiene 1 kg? ¿Y 560 g?
- b) ¿Cuántos gramos serían 5,7 onzas?

a) 1 kg tiene:  $1.000 : 28,35 = 35,27$  onzas.

560 g tienen:  $560 : 28,35 = 19,75$  onzas.

b) 5,7 onzas son:  $5,7 \cdot 28,35 = 161,595$  g.

**090** Un barril americano contiene 158,98 l.

- a) ¿Cuántos barriles podemos llenar con 317.960 l de petróleo? ¿Y con 1.000.000 l?
- b) ¿Cuántos litros son 250 barriles?

a) Se pueden llenar:  $317.960 : 158,98 = 2.000$  barriles.

Se pueden llenar:  $1.000.000 : 158,98 = 6.290,099 \rightarrow 6.290,1$  barriles.

b) 250 barriles son:  $250 \cdot 158,98 = 39.745$  litros.

**091** Una tira de papel mide 29 cm de largo. ¿Cuántas tiras necesitamos para obtener una tira de 2,4 m de largo?



Como  $2,4 : 0,29 = 8,276$ , necesitamos al menos 9 tiras.

# Números decimales

**092** Sabiendo que una milla terrestre son 1,6093 km, ¿cuántos metros y kilómetros son 2,35 millas? ¿Y 0,6 millas?

2,35 millas son:  $2,35 \cdot 1,6093 = 3,781855 \text{ km} = 3.781,855 \text{ m}$ .

0,6 millas son:  $0,6 \cdot 1,6093 = 0,96558 \text{ km} = 965,58 \text{ m}$ .

**093** Un nudo es una milla marina/h y una milla marina es 1,852 km. La velocidad de un barco es de 60 nudos. ¿Cuántos km recorre en tres horas?

El barco recorre:  $1,852 \cdot 3 \cdot 60 = 333,36 \text{ km}$  en tres horas.

**094** Un glaciar retrocede 2,8 cm al año por el deshielo. ¿Cuánto tardará en retroceder 5 m?



Operando:  $500 : 2,8 = 178,57$ , por lo que tardará 178 años y unos 7 meses.

**095** Calcula el peso total, en gramos, de 241 libros si cada uno de ellos pesa 2 hg y 653 mg.

$241 \cdot 200,653 = 48.357,373 \text{ g}$

**096** El perímetro de un rectángulo es 5,85 m. Si un lado mide el doble que el otro, ¿cuánto mide cada lado?

El lado menor mide:  $5,85 : (1 + 2 + 1 + 2) = 0,975 \text{ m}$  y el lado mayor mide 1,95 m.

**097** Gastamos 0,75 m de papel para envolver paquetes pequeños y 1,8 m para los paquetes grandes. Disponemos de 25 m de papel. ¿Cuántos paquetes de cada tipo podemos envolver?

$25 : 0,75 = 33,33$  paquetes pequeños

$25 : 1,8 = 13,88$  paquetes grandes

098

En un jardín hay un pozo y un árbol a 27,5 m de distancia. Entre ellos se han colocado 10 macetas a intervalos iguales.



- a) ¿A qué distancia de cada maceta está el pozo?  
 b) ¿Qué distancia se recorre para regarlas, si cada dos macetas hay que volver al pozo?

- a) Como  $27,5 : 11 = 2,5$ , hay 2,5 m entre el pozo y la primera maceta. Para hallar el resto solo hay que ir sumando 2,5 m para cada maceta hasta la décima: 2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5, y 25 m, respectivamente.  
 b)  $2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 25 = 125$  m

099

Encuentra un número decimal comprendido entre:

- a) 1,9 y 2                      c) 2,999 y 3                      e) 2,999999 y 3  
 b) 2,99 y 3                      d) 2,9999 y 3                      f) 2,9999999999 y 3

¿Puedes encontrar un número comprendido entre  $2,\hat{9} = 2,9999\dots$  y 3?  
 ¿Qué conclusión obtienes?

- a) 1,91                      c) 2,9991                      e) 2,9999991  
 b) 2,991                      d) 2,99991                      f) 2,9999999991

No hay ningún número decimal entre ellos. Por tanto, son el mismo número.

100

Investiga por qué son válidos estos métodos para resolver algunas operaciones.

- a) Multiplicar por 0,25 es igual que dividir entre 4.  
 b) Multiplicar por 0,75 es lo mismo que multiplicar por 3 y luego dividir entre 4.  
 c) Multiplicar un número por 1,5 es igual que sumar al número su mitad.  
 d) Dividir un número entre 0,5 equivale a calcular el doble del número.  
 e) Dividir un número entre 0,75 es lo mismo que multiplicarlo por 4 y dividirlo entre 3.

- a) 0,25 es la expresión decimal de la fracción  $\frac{1}{4}$ .  
 b) 0,75 es la expresión decimal de la fracción  $\frac{3}{4}$ .  
 c) Es válido porque  $1,5 = 1 + \frac{1}{2}$ .  
 d) Dividir entre 0,5 es equivalente a dividir entre  $\frac{1}{2}$ , es decir, a multiplicar por 2.  
 e) Dividir entre 0,75 es equivalente a dividir entre  $\frac{3}{4}$ , es decir, a multiplicar por su inverso, que es  $\frac{4}{3}$ .

# Números decimales

101



Utilizando la calculadora, explica cómo puedes realizar estos cálculos sin utilizar la tecla de la coma decimal.

a)  $1,23 \cdot 34,567$

c)  $12 : 345,67$

b)  $98,765 : 432$

d)  $9,87 : 65,432$

Se calculan las fracciones y se opera:

$$a) 1,23 \cdot 34,567 = \frac{123}{100} \cdot \frac{34.567}{1.000} = \frac{4.251.741}{100.000} = 4,251741$$

$$b) 98,765 : 432 = \frac{98.765}{1.000} : 432 = \frac{98.765}{1.000 \cdot 432} = 0,2286$$

$$c) 12 : 345,67 = 12 : \frac{34.567}{100} = \frac{12 \cdot 100}{34.567} = 0,0347$$

$$d) 9,87 : 65,432 = \frac{987}{100} : \frac{65.432}{1.000} = \frac{987 \cdot 1.000}{65.432 \cdot 100} = 0,1508$$

102

Indica cuál de los dos personajes tiene razón, y explica por qué.

La raíz cuadrada de un número positivo siempre es menor que el número.

Eso no siempre es cierto...



La mujer tiene razón, pues la raíz cuadrada de cualquier número positivo menor que 1 es mayor que el radicando:  $\sqrt{0,25} = 0,5 \rightarrow 0,25 < 0,5$ .

103

Investiga por qué la raíz cuadrada de **200.720.072.007.200.720.072** no es un número entero. ¿Cuál debe ser la última cifra de un número para que no tenga raíz cuadrada exacta?

El número acaba en...	Su cuadrado acaba en...
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1
0	0

Se observa que ningún cuadrado de un número acaba en 2, y para que un número no tenga raíz cuadrada exacta tiene que terminar en cualquiera de estas cifras: 2, 3, 7 u 8.

## EN LA VIDA COTIDIANA

104

Hemos decidido instalar ADSL y estoy examinando las ofertas que las distintas compañías tienen en este momento.

**GUANAJUATO**  
**ADSL + LLAMADAS 24 H**

■ ALTA GRATIS  
 ■ LLAMADAS A FIJOS 24 H GRATIS  
 ■ LLAMADAS A MÓVILES

De lunes a viernes

8 horas	0,20 €	22 horas	0,11 €	8 horas
---------	--------	----------	--------	---------

Sábados

8 horas	0,20 €	14 horas	0,11 €	8 horas
---------	--------	----------	--------	---------

Domingos y festivos nacionales

8 horas	0,11 €	8 horas
---------	--------	---------

Tarifa normal       Establecimiento de llamada: 0,12 €  
 Tarifa reducida

**20 €**

**Teleoído**

- ADSL + llamadas a fijos y móviles 24 h
- Alta gratis
- Llamadas nacionales a fijos y móviles 24 h gratis

**32 €**

**YOYO**

- ✓ Alta gratis
- ✓ Llamadas a fijos 24 h gratis
- ✓ Llamadas a móviles Tarifa plana 0,28 €/min

**22 €**

He revisado los recibos telefónicos de los últimos meses y he comprobado que no llamamos demasiado a teléfonos móviles, tan solo mi hermano cuando llama a algún amigo que está fuera. Además, suelen ser llamadas cortas y las realiza fundamentalmente al salir de clase, es decir, de lunes a viernes y antes de las 10 de la noche.

En los últimos meses tenemos computadas alrededor de 40 llamadas a móviles, con una duración de unos 75 minutos. Suponiendo que nuestro consumo telefónico siga manteniéndose igual, ¿qué oferta nos conviene?

$$\text{GUANAJUATO} \rightarrow 0,12 \cdot 40 + 0,2 \cdot 75 + 20 = 39,80 \text{ €}$$

$$\text{TELEOÍDO} \rightarrow 32 \text{ €}$$

$$\text{YOYO} \rightarrow 22 + 0,28 \cdot 75 = 43 \text{ €}$$

La compañía que más nos conviene es TELEOÍDO.

# Números decimales

105

Quiero comprar un coche nuevo y estoy dudando entre comprarlo con motor de gasoil o de gasolina.



El coche con motor de gasolina es más barato, pero su consumo es mayor; además, el precio del litro de gasolina es mayor que el de gasoil.



Si la diferencia entre el precio de los combustibles no aumentara demasiado en los siguientes años, ¿a partir de cuántos kilómetros habría pagado lo mismo por ambos coches?

Cada 100 km, el coche de gasolina gasta:

$$9,1 \cdot 0,967 = 8,7997 \text{ €}$$

Cada 100 km, el coche de gasoil gasta:

$$7,7 \cdot 0,913 = 7,0301 \text{ €}$$

Cada 100 km, el coche de gasolina gasta:

$$8,7997 - 7,0301 = 1,7696 \text{ € más que el de gasoil}$$

La diferencia de precio entre los dos coches es:

$$(25.145 - 23.295) : 1,7696 = 1.045,44 \text{ €}$$

Como  $1.045,44 \cdot 100 = 104.544$ , a partir de 104.544 km es más rentable el coche de gasoil que el de gasolina.

106

La producción de tornillos de una fábrica es de 400.000 tornillos diarios. Cada tornillo pesa 0,9782 g y se transportan en contenedores que soportan una carga de 14.000 kg.

Redondeando, cada tornillo pesa un 1 g; por tanto, cada contenedor llevará...



**Redondeando el peso del tornillo, ¿cuántos días de producción serían necesarios para llenar un contenedor de tornillos? ¿Y utilizando el peso real sin redondear?**

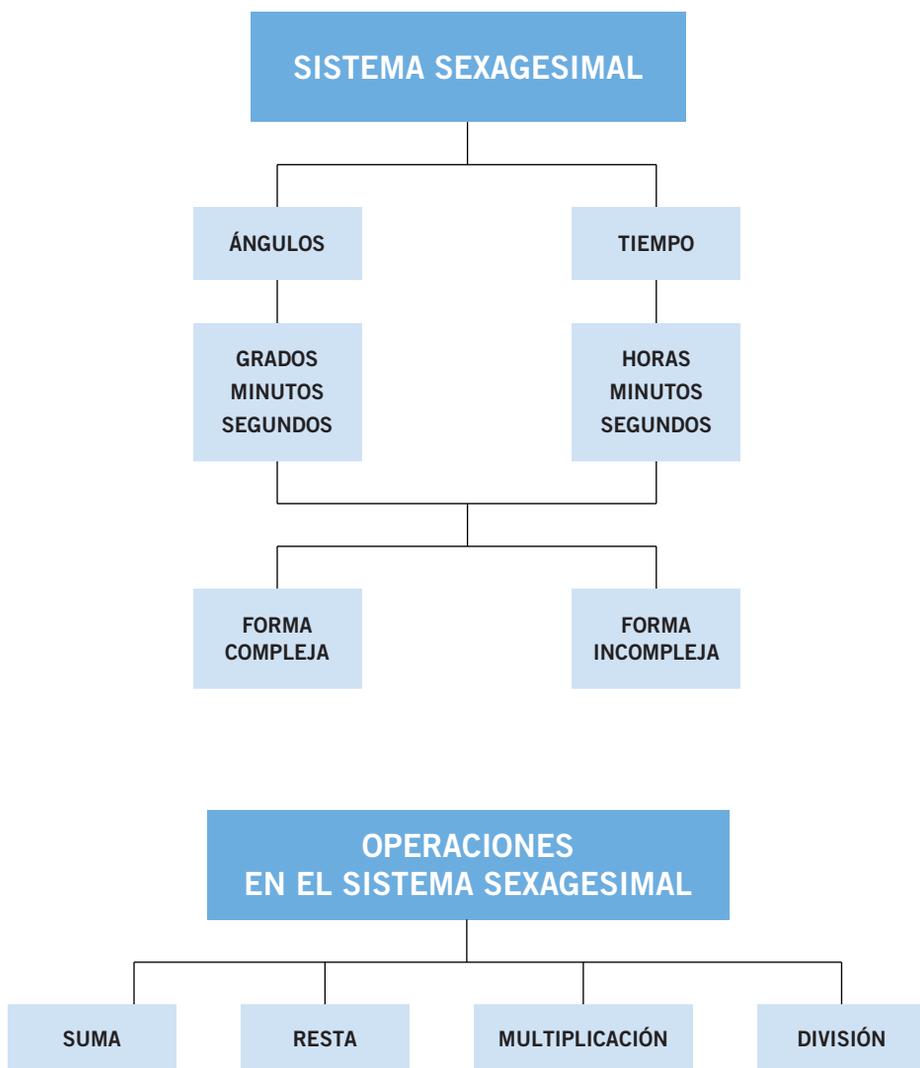
Si redondeamos el peso del tornillo, podemos afirmar que este pesa 1 g, luego cada día se producen 400.000 g, que equivalen a 400 kg de tornillos.

Como  $14.000 : 400 = 35$ , se tardarán 35 días en producir los tornillos necesarios para llenar un contenedor.

Sin redondeo, el peso del tornillo es 0,9782 g, luego cada día se producen 400.000 tornillos que pesan:  $400.000 \cdot 0,9782 = 391.280$  g, y que equivalen a 391,28 kg de tornillos.

Operamos  $14.000 : 391,28 = 35,78$ , y tenemos que se tardarán 36 días en producir los tornillos necesarios para llenar un contenedor.

# Sistema sexagesimal



## El amo de la Luna

La nave de Colón llevaba tiempo embarrancada en la isla de Jamaica, sus hombres amenazaban con un motín y, para acabar de comprometer la situación, los indígenas, cansados de intercambiar espejitos y cuentas, se negaban a abastecerlos de comida.

La situación era desesperada y Colón, para calmar a sus hombres, les prometió comida y citó a los jefes indígenas esa misma noche.

—¡Sabed que me habéis enojado y, por vuestra negativa a colaborar, haré que la Luna se torne roja de sangre y luego desaparezca!

Los jefes indios miraron la Luna y, tras comprobar cómo se cumplían las amenazas de Colón, le pidieron aterrizados que resucitara la Luna, prometiéndole seguir llevando comida para él y sus tripulantes.

Colón movió los brazos, como invocando a alguien, y les aseguró:

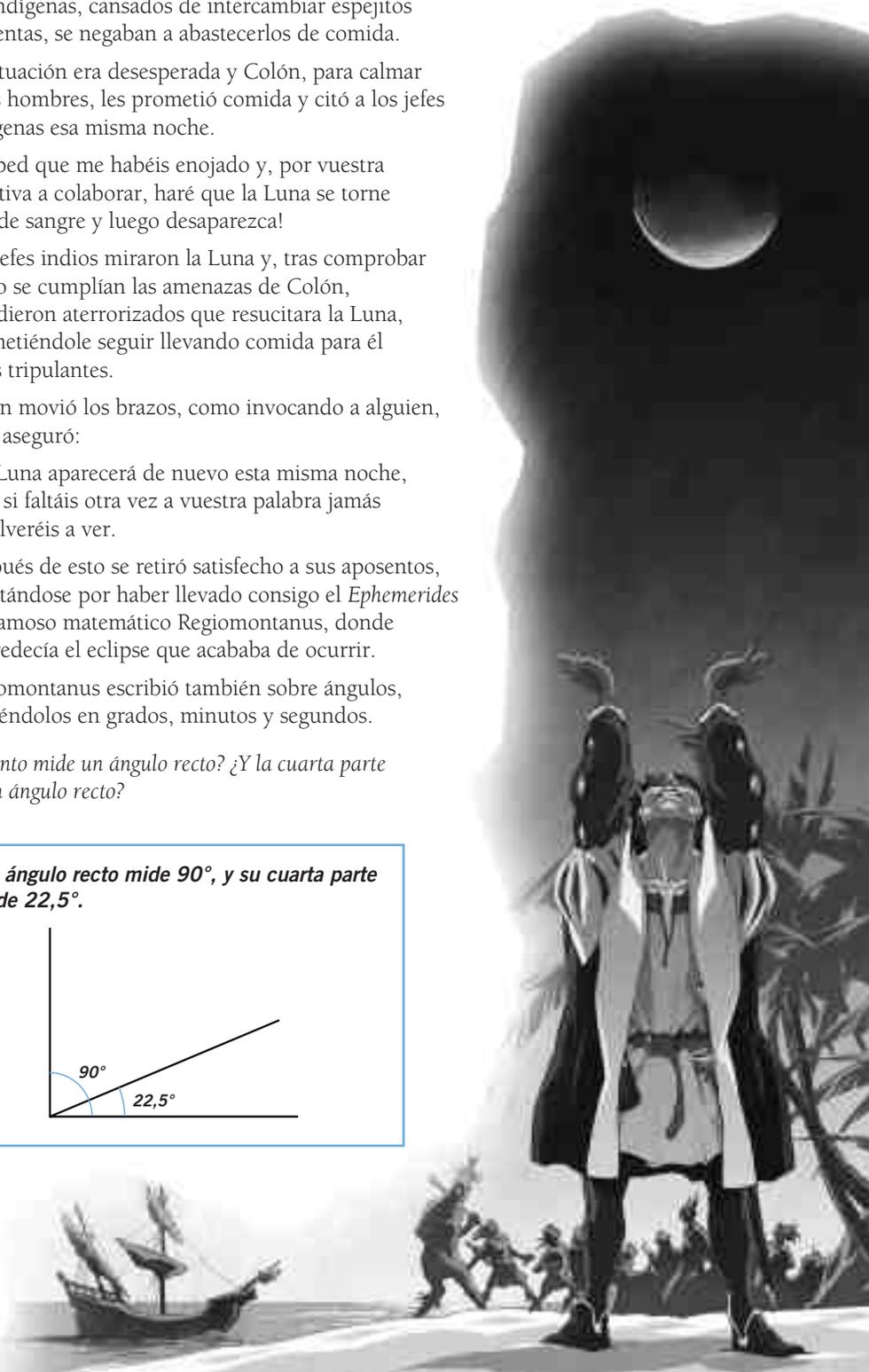
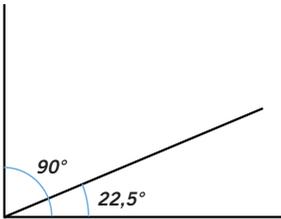
—La Luna aparecerá de nuevo esta misma noche, pero si faltáis otra vez a vuestra palabra jamás la volveréis a ver.

Después de esto se retiró satisfecho a sus aposentos, felicitándose por haber llevado consigo el *Ephemerides* del famoso matemático Regiomontanus, donde se predecía el eclipse que acababa de ocurrir.

Regiomontanus escribió también sobre ángulos, midiéndolos en grados, minutos y segundos.

¿Cuánto mide un ángulo recto? ¿Y la cuarta parte de un ángulo recto?

**Un ángulo recto mide  $90^\circ$ , y su cuarta parte mide  $22,5^\circ$ .**





**007** Calcula la equivalencia en horas.

- a) 90.000 s    c) 1 semana  
b) 3.120 min                                        d) 3 días

- a)  $90.000 \text{ s} = 90.000 : 3.600 = 25 \text{ h}$   
b)  $3.120 \text{ min} = 3.120 : 60 = 52 \text{ h}$   
c)  $1 \text{ semana} = 7 \cdot 24 = 168 \text{ h}$   
d)  $3 \text{ días} = 3 \cdot 24 = 72 \text{ h}$

**008** Si la jornada diaria de un estudiante de ESO es de 6 horas, expresa ese tiempo en minutos y también en segundos.

$$6 \text{ h} = 6 \cdot 60 = 360 \text{ min} = 360 \cdot 60 = 21.600 \text{ s}$$

**009** Expresa en segundos la duración de un partido de baloncesto que tiene cuatro tiempos de 10 minutos cada uno.

$$4 \cdot 10 = 40 \text{ min} = 40 \cdot 60 = 2.400 \text{ s}$$

**010** Jorge estudió el sábado por la mañana 2 horas y media, y por la tarde, tres cuartos de hora. ¿Cuántos minutos estudió más por la mañana que por la tarde?

Por la mañana estudió:  $2,5 \text{ h} = 2,5 \cdot 60 = 150 \text{ min}$ .

Y por la tarde estudió:  $\frac{3}{4} \text{ h} = \frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45 \text{ min}$ .

Jorge estudió:  $150 - 45 = 105 \text{ min}$  más por la mañana que por la tarde.

**011** Expresa en segundos.

- a) 28° 17' 39"                                      d) 60° 31'  
b) 56° 38"                                        e) 2° 54' 27"  
c) 2 h 16 min 20 s                              f) 3 h 45 min

$$\begin{aligned} \text{a) } 28^\circ 17' 39'' &= 28 \cdot 3.600 + 17 \cdot 60 + 39 = \\ &= 100.800 + 1.020 + 39 = 101.859'' \end{aligned}$$

$$\text{b) } 56^\circ 38'' = 56 \cdot 3.600 + 38 = 201.600 + 38 = 201.638''$$

$$\text{c) } 2 \text{ h } 16 \text{ min } 20 \text{ s} = 2 \cdot 3.600 + 16 \cdot 60 + 20 = 7.200 + 960 + 20 = 8.180 \text{ s}$$

$$\text{d) } 60^\circ 31' = 60 \cdot 3.600 + 31 \cdot 60 = 216.000 + 1.860 = 217.860''$$

$$\text{e) } 2^\circ 54' 27'' = 2 \cdot 3.600 + 54 \cdot 60 + 27 = 7.200 + 3.240 + 27 = 10.467''$$

$$\text{f) } 3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3 \cdot 3.600 + 45 \cdot 60 = 10.800 + 2.700 = 13.500 \text{ s}$$

# Sistema sexagesimal

**012** Expresa  $56^\circ 40'$  en forma incompleja.

$$56 \cdot 60 + 40 = 3.400'$$

**013** ¿Cuántos minutos son tres cuartos de hora? ¿Y cuántos segundos?

Tres cuartos de hora son  $45 \text{ min} = 2.700 \text{ s}$ .

**014** Un ciclista ha empleado  $1 \text{ h } 15 \text{ min } 18 \text{ s}$  en llegar a la meta y otro ha necesitado  $23.458 \text{ s}$ . ¿Cuál de los dos ha tardado más?

Como  $1 \text{ h } 15 \text{ min } 18 \text{ s} = 4.518 \text{ s} < 23.458 \text{ s}$ , el segundo ciclista ha tardado más.

**015** Expresa en grados, minutos y segundos estas medidas de ángulos.

a)  $28.300''$

d)  $65.497''$

b)  $28.215''$

e)  $43.208''$

c)  $872'$

f)  $45.001'$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 28300'' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 430 \quad 471' \\ 100 \\ 40'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 471' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 51' \quad 7^\circ \end{array}$$

$$28.300'' = 7^\circ 51' 40''$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 28215'' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 421 \quad 470' \\ 15'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 470' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 50' \quad 7^\circ \end{array}$$

$$28.215'' = 7^\circ 50' 15''$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 872' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 272 \quad 14^\circ \\ 32' \end{array}$$

$$872' = 14^\circ 32'$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 65497'' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 549 \quad 1.091' \\ 097 \\ 37'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.091' \quad \underline{\phantom{00}60} \\ 491 \quad 18^\circ \\ 11' \end{array}$$

$$65.497'' = 18^\circ 11' 37''$$

$$\begin{array}{r} \text{e) } 43208'' \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 120 \end{array} \right. \quad 720' \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 12 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 08'' \quad \quad \quad 0' \end{array}$$

$$43.208'' = 12^\circ 8''$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 45001' \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 300 \end{array} \right. \quad 750^\circ \\ \quad \quad \quad 001' \end{array}$$

$$45.001' = 750^\circ 1'$$

**016** Expresa en forma compleja las siguientes medidas de tiempo.

a) 458 min

c) 8.010 s

e) 5.681 min

b) 34.567 s

d) 13.590 s

f) 477 s

$$\begin{array}{r} \text{a) } 458 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 38 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 38 \text{ min} \quad 7 \text{ h} \end{array}$$

$$458 \text{ min} = 7 \text{ h } 38 \text{ min}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 34567 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 456 \end{array} \right. \quad 576 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 36 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 367 \\ \quad \quad \quad 07 \text{ s} \end{array}$$

$$34.567 \text{ s} = 9 \text{ h } 36 \text{ min } 7 \text{ s}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 8010 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 201 \end{array} \right. \quad 133 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 13 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 210 \\ \quad \quad \quad 30 \text{ s} \end{array}$$

$$8.010 \text{ s} = 2 \text{ h } 13 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 13590 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 159 \end{array} \right. \quad 226 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 46 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad 390 \\ \quad \quad \quad 30 \text{ s} \end{array}$$

$$13.590 \text{ s} = 3 \text{ h } 46 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$\begin{array}{r} \text{e) } 5681 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 281 \end{array} \right. \quad 94 \text{ h} \\ \quad \quad \quad 41 \text{ min} \end{array}$$

$$5.681 \text{ min} = 94 \text{ h } 41 \text{ min} = 3 \text{ días } 22 \text{ h } 41 \text{ min}$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } 477 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} 60 \\ \hline 57 \end{array} \right. \quad 7 \text{ min} \\ \quad \quad \quad 57 \text{ s} \quad 7 \text{ min} \end{array}$$

$$477 \text{ s} = 7 \text{ min } 57 \text{ s}$$

# Sistema sexagesimal

- 017** Un tren ha tardado 1 hora y 10 minutos en llegar a la primera estación, y 27 minutos en llegar a la segunda estación. ¿Cuántos minutos ha tardado en total?

$$1 \text{ h } 10 \text{ min} + 27 \text{ min} = 1 \text{ h } 37 \text{ min} = 97 \text{ min}$$

- 018** Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a)  $180.007'' = 50^\circ 7''$

b)  $3 \text{ h } 452 \text{ s} = 3 \text{ h } 7 \text{ min } 3 \text{ s}$

c)  $183 \text{ min } 122 \text{ s} = 3 \text{ h } 5 \text{ min } 2 \text{ s}$

a) Verdadera  $\rightarrow 180.007'' = 50^\circ 7''$  ( $50 \cdot 60 \cdot 60 + 7 = 180.007$ )

b) Falsa  $\rightarrow 3 \text{ h } 452 \text{ s} = 3 \text{ h } 7 \text{ min } 32 \text{ s}$

c) Verdadera  $\rightarrow 183 \text{ min } 122 \text{ s} = 185 \text{ min } 2 \text{ s} = 3 \text{ h } 5 \text{ min } 2 \text{ s}$

- 019** Efectúa estas operaciones.

a)  $12^\circ 15' 58'' + 23^\circ 22' 19'' = 35^\circ 37' 77'' = 35^\circ 38' 17''$

b)  $35^\circ 45' + 26^\circ 10' + 26^\circ 15' 33'' = 87^\circ 70' 33'' = 88^\circ 10' 33''$

- 020** El ganador de una carrera ha llegado a la meta a las 14 h 26 min 47 s, y el segundo, 17 min 52 s después. ¿A qué hora llegó el segundo?

$$14 \text{ h } 26 \text{ min } 47 \text{ s} + 17 \text{ min } 52 \text{ s} = 14 \text{ h } 44 \text{ min } 39 \text{ s}$$

- 021** Los tiempos de cuatro corredores han sido:

2 min 3 s

1 min 59 s

2 min

1 min 58 s

Calcula el tiempo que han empleado en total.

$$2 \text{ min } 3 \text{ s} + 1 \text{ min } 59 \text{ s} + 2 \text{ min} + 1 \text{ min } 58 \text{ s} = 8 \text{ min}$$



- 022** Efectúa estas operaciones.

a)  $32^\circ 5' 23'' - 17^\circ 22' 33'' = 14^\circ 42' 50''$

b)  $19^\circ 35' - 11^\circ 34'' = 8^\circ 34' 26''$

c)  $4 \text{ h } 14 \text{ min } 34 \text{ s} - 2 \text{ h } 30 \text{ min } 58 \text{ s} = 1 \text{ h } 43 \text{ min } 36 \text{ s}$

d)  $2 \text{ h } 6 \text{ min} - 37 \text{ min } 52 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 8 \text{ s}$

**023** Calcula:  $24^\circ 36' - (24^\circ 22' - 6^\circ 14')$ .

$$24^\circ 36' - (24^\circ 22' - 6^\circ 14') = 24^\circ 36' - 17^\circ 46' 22'' = 6^\circ 49' 38''$$

**024** En una prueba contrarreloj, los tiempos de dos ciclistas han sido 1 h 1 min 7 s y 59 min 43 s, respectivamente. Calcula la diferencia de tiempo que hay entre ambos.

1.º ciclista: 60 min 67 s.                      2.º ciclista: 59 min 43 s.  
La diferencia es 1 min 24 s.

**025** Completa esta igualdad.

a)  $\square^\circ \square' \square'' - 1^\circ 22' 33'' = 3^\circ 14' 12''$

b)  $\square \text{ h } \square \text{ min } \square \text{ s} + 17 \text{ min } 58 \text{ s} = 2 \text{ h } 17 \text{ min } 57 \text{ s}$

a)  $4^\circ 36' 45'' - 1^\circ 22' 33'' = 3^\circ 14' 12''$

b)  $1 \text{ h } 59 \text{ min } 59 \text{ s} + 17 \text{ min } 58 \text{ s} = 2 \text{ h } 17 \text{ min } 57 \text{ s}$

**026** Efectúa estas operaciones.

a)  $(12^\circ 23' 4'') \cdot 3 = 36^\circ 69' 12'' = 37^\circ 9' 12''$

b)  $(41' 10'') \cdot 4 = 164' 40'' = 2^\circ 44' 40''$

c)  $(2 \text{ h } 19 \text{ min } 14 \text{ s}) \cdot 5 = 10 \text{ h } 95 \text{ min } 70 \text{ s} = 11 \text{ h } 36 \text{ min } 10 \text{ s}$

d)  $(1 \text{ h } 33 \text{ s}) \cdot 4 = 4 \text{ h } 132 \text{ s} = 4 \text{ h } 2 \text{ min } 12 \text{ s}$

**027** ¿Cuánto mide el ángulo doble de  $\hat{A} = 44^\circ 56' 41''$ ?

$$44^\circ 56' 41'' \cdot 2 = 88^\circ 112' 82'' = 89^\circ 53' 22''$$

**028** Una máquina de lavado funciona diariamente 7 h 20 min 40 s. ¿Cuánto tiempo funciona de lunes a viernes?

$$(7 \text{ h } 20 \text{ min } 40 \text{ s}) \cdot 5 = 35 \text{ h } 100 \text{ min } 200 \text{ s} = 36 \text{ h } 43 \text{ min } 20 \text{ s}$$



**029** Si multiplicamos un ángulo de medida  $45^\circ 15' 37''$  por 4, ¿cuál es el error que cometemos si no tenemos en cuenta los segundos?

El resultado, teniendo en cuenta los segundos, es:

$$45^\circ 15' 37'' \cdot 4 = 180^\circ 60' 148'' = 181^\circ 2' 28''.$$

Si no tenemos en cuenta los segundos, el resultado es:

$$45^\circ 15' \cdot 4 = 180^\circ 60' = 181^\circ, \text{ por lo que el error es } 2' 28''.$$

# Sistema sexagesimal

**030** Calcula estas divisiones.

- a)  $(305^\circ 75' 85'') : 5 = 61^\circ 15' 17''$       c)  $(120^\circ 48') : 6 = 20^\circ 8'$   
 b)  $(7^\circ 4' 16'') : 3 = 2^\circ 21' 25,3''$       d)  $(48^\circ 36'') : 4 = 12^\circ 9''$

**031** Calcula la mitad de 12 h 47 min 56 s.

$$(12 \text{ h } 47 \text{ min } 56 \text{ s}) : 2 = 6 \text{ h } 23 \text{ min } 58 \text{ s}$$

**032** Efectúa estas divisiones.

- a)  $(126^\circ 55') : 3 = 42^\circ 18' 20''$       b)  $124^\circ : 5 = 24^\circ 48'$

**033** Una teleoperadora ha hablado por teléfono, de lunes a viernes, un total de 22 h 49 min 32 s. ¿Cuál ha sido el tiempo medio diario que ha hablado?

$$(22 \text{ h } 49 \text{ min } 32 \text{ s}) : 5 = 4 \text{ h } 33 \text{ min } 54,4 \text{ s}$$

## ACTIVIDADES

**034** Completa la tabla de equivalencias.

Grados	Minutos	Segundos
<b>125°</b>	<b>7.500'</b>	<b>450.000"</b>
26°	1.560'	<b>93.600"</b>
35°	<b>2.100'</b>	126.000"
9°	<b>540'</b>	32.400"
<b>3°</b>	180'	10.800"
14°	840'	<b>50.400"</b>

**035** Calcula mentalmente y expresa en minutos y en segundos las medidas de ángulos.

- a) 3°      c) 8°      e) 1° 15'  
 b) 5°      d) 10°      f) 10° 10'
- a)  $180' = 10.800''$       d)  $600' = 36.000''$   
 b)  $300' = 18.000''$       e)  $75' = 4.500''$   
 c)  $480' = 28.800''$       f)  $370' = 22.200''$

**036** Expresa en forma incompleja.

- a) 35° 54' 65"      c) 4 h 27 min 56 s  
 b) 65° 53' 12"      d) 7 h 33 min 49 s
- a) 129.305"      c) 16.076 s  
 b) 237.192"      d) 27.229 s

**037** Expresa en forma compleja.

- a) 25.123 s                      d) 13,25 h                      g) 27.762 s  
 b) 45.125 s                      e) 5.432 s                      h) 90.000 s  
 c) 16.459"                      f) 452 min                      i) 40.000'
- a) 6 h 58 min 43 s                      f) 7 h 32 min  
 b) 12 h 32 min 5 s                      g) 7 h 42 min 42 s  
 c) 4° 34' 19"                      h) 25 h = 1 día 1 h  
 d) 13 h 15 min                      i) 666° 40'  
 e) 1 h 30 min 32 s

**038** Expresa en forma incompleja.

- a) 13° 15' 32"                      d) 7 h 51 min 46 s  
 b) 100° 47'                      e) 20 h 32 s  
 c) 82° 3'                      f) 19 h 46 min
- a) 47.732"                      d) 28.306 s  
 b) 6.047'                      e) 72.032 s  
 c) 4.923'                      f) 1.186 min

**039** Expresa en minutos los siguientes ángulos.

- a) 35° = 2.100'  
 b) 4° 30' = 270'  
 c) La mitad de 30° es 900'  
 d) 360" = 6'  
 e) 2° 45' 120" = 167'  
 f) (18° - 15°) + 3° = 6° = 360'  
 g) 5° = 300'  
 h) 6° 25' = 385'  
 i) 13° 35' 60" = 816'  
 j) 17° 180" = 1.023'  
 k) 35' 420" = 42'  
 l) 5' + 60" + 3° = 186'

**040** Expresa en segundos estos ángulos.

- a) 1° 45' = 6.300"  
 b) (17° - 3°) - (10° - 5°) = 32.400"  
 c) 3' = 180"  
 d) (35" - 28") - 4" = 3"  
 e) 3° 5' 10" = 11.110"
- f) 4° 38" = 14.438"  
 g) 2° 20' 30" = 8.430"  
 h) 35' 10" = 2.110"  
 i) 55' = 3.300"  
 j) 7° 25' = 26.700"

# Sistema sexagesimal

**041** Realiza estas sumas de ángulos.

- a)  $35^\circ 20' 15'' + 10^\circ 30' 40'' = 45^\circ 50' 55''$
- b)  $6^\circ 10' 5'' + 8^\circ 40' 52'' = 14^\circ 50' 57''$
- c)  $15^\circ 36' 40'' + 2^\circ 10' 13'' = 17^\circ 46' 53''$
- d)  $18^\circ 13' 25'' + 28^\circ 48' 10'' = 46^\circ 61' 35'' = 47^\circ 1' 35''$
- e)  $6^\circ 30' + 4^\circ 50' 45'' = 10^\circ 80' 45'' = 11^\circ 20' 45''$
- f)  $5^\circ 25' 3'' + 75' 8'' = 5^\circ 100' 11'' = 6^\circ 40' 11''$
- g)  $4^\circ 3' 6'' + 5^\circ 7' 28'' + 25^\circ 39' 40'' = 34^\circ 49' 74'' = 34^\circ 50' 14''$
- h)  $43^\circ 25'' + 5^\circ 48' = 48^\circ 48' 25''$
- i)  $2^\circ 2'' + 75^\circ 43' = 77^\circ 43' 2''$
- j)  $33' 7'' + 4^\circ 45' = 4^\circ 78' 7'' = 5^\circ 18' 7''$

**042** Realiza las siguientes restas.

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| a) $3^\circ 35' - 2^\circ 10'$  | f) $2^\circ 30' 10'' - 3' 50''$            |
| b) $1^\circ 25' - 10'$          | g) $42^\circ 5' 3'' - 38' 10''$            |
| c) $63^\circ 47'' - 25' 30''$   | h) $37' 45'' - 20' 78''$                   |
| d) $1^\circ 45' 3'' - 75' 10''$ | i) $2^\circ 6' 4'' - 1^\circ 10'$          |
| e) $4^\circ 2' - 1^\circ 40'$   | j) $35^\circ 11' 54'' - 13^\circ 12' 15''$ |
- 
- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| a) $1^\circ 25'$       | f) $2^\circ 26' 20''$  |
| b) $1^\circ 15'$       | g) $41^\circ 26' 53''$ |
| c) $62^\circ 35' 17''$ | h) $16' 27''$          |
| d) $29' 53''$          | i) $56' 4''$           |
| e) $2^\circ 22'$       | j) $21^\circ 59' 39''$ |

**043** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN SUMANDO EN UNA SUMA DE LA QUE CONOCEMOS SU RESULTADO?

¿Qué medida tiene el ángulo  $\hat{B}$ , si al sumarlo con el ángulo  $\hat{A} = 17^\circ 26''$ , resulta el ángulo  $36^\circ 7' 15''$ ?

**PRIMERO.** Se expresa el problema mediante una operación.

$$\hat{A} + \hat{B} = 36^\circ 7' 15'' \rightarrow \underbrace{17^\circ 26''}_{\text{Pasa restando}} + \hat{B} = 36^\circ 7' 15'' \uparrow$$

**SEGUNDO.** Se restan ambas medidas.

$$\begin{array}{r} 36^\circ 7' 15'' \\ - 17^\circ 26'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 36^\circ 6' 75'' \\ - 17^\circ 26'' \\ \hline 19^\circ 6' 49'' \end{array}$$

No se pueden restar los segundos

Por tanto, el ángulo  $\hat{B} = 19^\circ 6' 49''$ .

044 Completa el ángulo que falta.

- a)  $\square + 25^\circ = 50^\circ 20' 47'' \rightarrow 25^\circ 20' 47''$   
 b)  $\square + 27^\circ 32'' = 80^\circ 5' 38'' \rightarrow 53^\circ 5' 6''$   
 c)  $\square + 1^\circ 40'' = 5^\circ 3' 20'' \rightarrow 4^\circ 2' 40''$   
 d)  $15^\circ 10' 30'' + \square = 20^\circ 5' 40'' \rightarrow 4^\circ 55' 10''$   
 e)  $\square + 25' 35'' = 1^\circ 30' 16'' \rightarrow 1^\circ 4' 41''$   
 f)  $\square + 17^\circ = 20^\circ 12'' \rightarrow 3^\circ 12''$   
 g)  $\square + 6^\circ 42' = 10^\circ 58' 35'' \rightarrow 4^\circ 16' 35''$   
 h)  $\square + 9^\circ 18' = 17^\circ 43'' \rightarrow 7^\circ 42' 43''$

045 Calcula el ángulo que falta.

- a)  $\square - 2^\circ 36' 45'' = 13^\circ 15' 10'' \rightarrow 15^\circ 51' 55''$   
 b)  $\square - 15' 35'' = 6^\circ 25' 46'' \rightarrow 6^\circ 40' 81'' = 6^\circ 41' 21''$   
 c)  $\square - 1^\circ 50'' = 3^\circ 48' \rightarrow 4^\circ 48' 50''$   
 d)  $\square - 47' 58'' = 2^\circ 35' 40'' \rightarrow 2^\circ 82' 98'' = 3^\circ 23' 38''$   
 e)  $\square - 6^\circ 18' 40'' = 15^\circ 27' 38'' \rightarrow 21^\circ 45' 78'' = 21^\circ 46' 18''$   
 f)  $\square - 10^\circ 45' = 37^\circ 53' 44'' \rightarrow 47^\circ 98' 44'' = 48^\circ 38' 44''$   
 g)  $\square - 17^\circ 25' 46'' = 38' 43'' \rightarrow 17^\circ 63' 89'' = 18^\circ 4' 29''$   
 h)  $\square - 65'' = 1^\circ 48' 35'' \rightarrow 1^\circ 48' 100'' = 1^\circ 49' 40''$

046 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE SUMA Y RESTA CON PARÉNTESIS?

Realiza esta operación:  $(39^\circ + 45^\circ 30') - (6^\circ 38' - 2^\circ 20')$ .

PRIMERO. Se resuelven los paréntesis.

$$\begin{array}{r} 39^\circ \\ + 45^\circ 30' \\ \hline 84^\circ 30' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6^\circ 38' \\ - 2^\circ 20' \\ \hline 4^\circ 18' \end{array}$$

SEGUNDO. Se efectúan las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

$$\begin{array}{r} 84^\circ 30' \\ - 4^\circ 18' \\ \hline 80^\circ 12' \end{array}$$

047 Realiza las siguientes operaciones.

- a)  $(10^\circ 20' + 15^\circ 30') - 13^\circ 14' 35'' = 12^\circ 15' 45''$   
 b)  $(50^\circ 35' - 37^\circ 45') + 6^\circ 18'' = 18^\circ 50' 18''$   
 c)  $(5' 38'' + 4^\circ 36') + (5^\circ 10' - 3^\circ 2'') = 6^\circ 51' 36''$   
 d)  $(25^\circ 35' + 2^\circ 10') - (3^\circ + 17^\circ 43') = 7^\circ 2'$

# Sistema sexagesimal

048 **Calcula.**



- a)  $(124^\circ 34' 12'' - 78^\circ 47' 24'') + 43^\circ = 88^\circ 46' 48''$
- b)  $25^\circ 30' 6'' + (7^\circ 6'' - 1^\circ 25'') = 31^\circ 29' 47''$
- c)  $(4^\circ 3' 5'' + 7^\circ 6' 3'') - 3^\circ 10' 15'' = 7^\circ 58' 53''$
- d)  $(10^\circ 8' 2'' - 4^\circ 2') + (6^\circ 4' 23'' - 2^\circ 5'') = 10^\circ 10' 20''$

049 **Efectúa los siguientes productos.**



- a)  $(4^\circ 35' 46'') \cdot 2 = 8^\circ 70' 92'' = 9^\circ 11' 32''$
- b)  $(1^\circ 10' 15'') \cdot 7 = 7^\circ 70' 105'' = 8^\circ 11' 45''$
- c)  $(12^\circ 25' 37'') \cdot 6 = 72^\circ 150' 222'' = 74^\circ 33' 42''$
- d)  $(35^\circ 4' 20'') \cdot 4 = 140^\circ 16' 80'' = 140^\circ 17' 20''$
- e)  $(6^\circ 78'') \cdot 3 = 18^\circ 234'' = 18^\circ 3' 54''$
- f)  $(36' 40'') \cdot 5 = 180' 200'' = 3^\circ 3' 20''$
- g)  $(2^\circ 17' 3'') \cdot 9 = 18^\circ 153' 27'' = 20^\circ 33' 27''$
- h)  $(27^\circ 15' 26'') \cdot 8 = 216^\circ 120' 208'' = 218^\circ 3' 28''$

050 **HAZLO ASÍ**

**¿CÓMO SE RESUELVEN LAS OPERACIONES COMBINADAS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL?**

**Calcula:**  $(75^\circ 26' 16'' - 58^\circ 15' 10'') \cdot 3$ .

**PRIMERO.** Se resuelve el paréntesis.

$$\begin{array}{r} 75^\circ 26' 16'' \\ - 58^\circ 15' 10'' \\ \hline 17^\circ 11' 6'' \end{array}$$

**SEGUNDO.** Se realizan las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.

$$\begin{array}{r} 17^\circ 11' 6'' \\ \times 3 \\ \hline 51^\circ 33' 18'' \end{array}$$

051 **Calcula.**



- a)  $(3^\circ 4' 6'' + 5^\circ 7' 10'') \cdot 2 = 16^\circ 22' 32''$
- b)  $(10^\circ 6' 10'' - 4^\circ 3' 7'') \cdot 3 = 18^\circ 9' 9''$
- c)  $(5^\circ 30' + 15' 65'') \cdot 6 = 30^\circ 270' 390'' = 34^\circ 36' 30''$
- d)  $(6^\circ + 15^\circ 10' - 3^\circ 7') \cdot 7 = 126^\circ 21'$
- e)  $(15^\circ 35' 45'' - 40' 58'') \cdot 4 = 56^\circ 216' 188'' = 59^\circ 39' 8''$
- f)  $(22^\circ 5' 16'' + 73^\circ 16' 45'') \cdot 3 = 285^\circ 66' 3'' = 286^\circ 6' 3''$
- g) **Cuádruple de  $\hat{A} = 3^\circ 36' 27''$**  es  $2^\circ 144' 108'' = 14^\circ 25' 48''$
- h) **Doble de  $(1^\circ 35' 5'' + 38' 55'')$**  es  $2^\circ 146' 120'' = 4^\circ 28'$
- i)  $(7^\circ + 1^\circ 30'' - 5^\circ 56' 10'') \cdot 7 = 14^\circ 28' 140'' = 14^\circ 30' 20''$

052 Haz las divisiones.

- a)  $(40^\circ 18' 36'') : 2 = 20^\circ 9' 18''$       f)  $(236^\circ 17') : 5 = 47^\circ 15' 24''$   
 b)  $(39^\circ 57' 15'') : 3 = 13^\circ 19' 5''$       g)  $288^\circ : 7 = 41^\circ 8' 34,29''$   
 c)  $(120^\circ 35' 80'') : 5 = 24^\circ 7' 16''$       h)  $152' : 3 = 50' 40''$   
 d)  $(126^\circ 48' 15'') : 3 = 42^\circ 16' 5''$       i)  $(85^\circ 4'') : 4 = 21^\circ 16''$   
 e)  $(111^\circ 54' 45'') : 3 = 37^\circ 18' 15''$       j)  $(86^\circ 5'') : 6 = 14^\circ 20' 0,8''$

053 Un ángulo que mide  $179^\circ 36' 15''$  se divide en tres partes iguales.  
 ¿Cuál es la medida de cada parte?

$$(179^\circ 36' 15'') : 3 = 59^\circ 52' 5''$$

054 Dada la medida de los ángulos:

$$\hat{A} = 15^\circ 25' 6'' \qquad \hat{B} = 36^\circ 10' 20''$$

halla la medida de  $\hat{C}$ , si:  $\hat{C} = 2 \cdot (\hat{A} + \hat{B})$ .

$$\hat{C} = 2 \cdot (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 2 \cdot (15^\circ 25' 6'' + 36^\circ 10' 20'') = 103^\circ 10' 52''$$

055 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA FRACCIÓN DE UNA MEDIDA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL?

Calcula:  $\frac{5}{2} (1^\circ 45'' + 3' 27'')$ .

PRIMERO. Se resuelve el paréntesis.

$$\begin{array}{r} 1^\circ \quad 45'' \\ + \quad 3' \quad 27'' \\ \hline 1^\circ \quad 3' \quad 72'' \end{array} \xrightarrow{72'' = 1' + 12''} 1^\circ \quad 4' \quad 12''$$

SEGUNDO. Se multiplica el resultado por el numerador.

$$\begin{array}{r} 1^\circ \quad 4' \quad 12'' \\ \times 5 \\ \hline 5^\circ \quad 20' \quad 60'' \end{array} \xrightarrow{60'' = 1'} 5^\circ \quad 21'$$

TERCERO. Se divide entre el denominador.

$$\begin{array}{r} 5^\circ \qquad 21' \\ 1^\circ \xrightarrow{1^\circ = 60'} \underline{60'} \\ \hline 81' \\ 1' \xrightarrow{1' = 60''} \underline{60''} \\ \hline 60'' \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2^\circ \quad 40' \quad 30'' \end{array}$$

# Sistema sexagesimal

056

Calcula.

- a)  $\frac{2}{3} (3^\circ 25' 15'') = 2^\circ 16' 50''$
- b)  $\frac{2}{3} (44^\circ 16' 40'') = 29^\circ 31' 6,6''$
- c)  $\frac{1}{4} (36^\circ 29' 18'') = 9^\circ 7' 19,5''$
- d)  $\frac{7}{6} (27^\circ 64' 30'') = 32^\circ 45' 15''$

057

Realiza las siguientes operaciones.

- a)  $\frac{4}{5} (7^\circ 52' 13'' + 29^\circ 57'') = 29^\circ 30' 32''$
- b)  $\frac{4}{3} (37'' + 5^\circ 36' - 2^\circ 15' 10'') = 4^\circ 28' 36''$
- c)  $\frac{1}{5} (46^\circ 27'' - 2^\circ 25') = 8^\circ 43' 5,4''$
- d)  $\frac{1}{6} (125^\circ 43' 58'' - 1^\circ 7' 4'') = 20^\circ 46' 9''$

058

Sabiendo la medida de los ángulos:

$$\hat{A} = 36^\circ 45' 58'' \quad \hat{B} = 57^\circ 27' 37'' \quad \hat{C} = 29^\circ 56' 45''$$

calcula.

- a)  $(\hat{A} - \hat{C}) \cdot 2 = 13^\circ 38' 26''$
- b)  $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) : 4 = 31^\circ 2' 35''$
- c)  $(\hat{C} + \hat{A}) - (\hat{B} - \hat{A}) = 46^\circ 1' 4''$
- d)  $\hat{C} - (7^\circ 15' 6'') + \hat{A} \cdot 2 = 96^\circ 13' 35''$
- e)  $\hat{C} \cdot 3 - (\hat{B} - \hat{A}) = 69^\circ 8' 36''$
- f)  $2 \cdot \hat{A} - \hat{B} = 16^\circ 4' 19''$

059

Sergio realiza un trabajo en 1 hora, 35 minutos y 50 segundos. Si pensaba tardar 2 horas, ¿cuánto tiempo le ha sobrado?

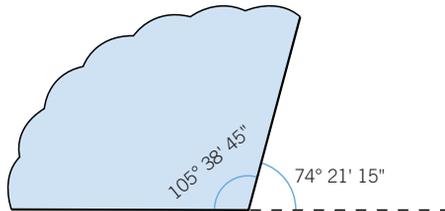
$$2 \text{ h} - 1 \text{ h } 35 \text{ min } 50 \text{ s} = 24 \text{ min } 10 \text{ s le han sobrado.}$$

060

El tren de las 10:05 h partió con 16 minutos de retraso. ¿A qué hora salió?

$$\text{Salió a las } 10 \text{ h } 5 \text{ min} + 16 \text{ min} = 10 \text{ h } 21 \text{ min.}$$

- 061** ●● Un abanico abierto forma un ángulo de  $180^\circ$ . Al abrir otro abanico, al que le faltan algunas varillas, he comprobado que solo tiene una abertura de  $105^\circ 38' 45''$ . ¿Cuál es el ángulo que formaban las varillas que se han roto?



$$180^\circ - 105^\circ 38' 45'' = 74^\circ 21' 15''$$

- 062** ●● Un autobús parte de una estación a las 9 h 26 min y llega a la estación de destino a las 13 h 14 min. ¿Cuánto dura el trayecto?

$$13 \text{ h } 14 \text{ min} - 9 \text{ h } 26 \text{ min} = 3 \text{ h } 48 \text{ min} \text{ dura el trayecto.}$$

**063 HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE ATRASOS HORARIOS?

Un reloj se atrasa 1 min 20 s cada día. ¿Cuánto tiempo se atrasa en una semana?

**PRIMERO.** Se determinan las operaciones.

$$(1 \text{ min } 20 \text{ s}) \cdot 7$$

**SEGUNDO.** Se efectúan las operaciones.

$$(1 \text{ min } 20 \text{ s}) \cdot 7 = 7 \text{ min } 140 \text{ s} = 9 \text{ min } 20 \text{ s}$$

El reloj se atrasa 9 min 20 s en una semana.

# Sistema sexagesimal

064



Lola trabajó el lunes 8 h 40 min 25 s, y de martes a jueves, media hora menos cada día. ¿Cuánto tiempo trabajó en total esta semana?



Lunes: 8 h 40 min 25 s

$$\begin{aligned} \text{De martes a jueves: } & (8 \text{ h } 40 \text{ min } 25 \text{ s} - 30 \text{ min}) \cdot 3 = \\ & = (8 \text{ h } 10 \text{ min } 25 \text{ s}) \cdot 3 = 24 \text{ h } 31 \text{ min } 15 \text{ s} \end{aligned}$$

Total de horas trabajadas:

$$8 \text{ h } 40 \text{ min } 25 \text{ s} + 24 \text{ h } 31 \text{ min } 15 \text{ s} = 33 \text{ h } 11 \text{ min } 40 \text{ s}$$

065



Desde mi casa hasta el trabajo hay dos estaciones; en llegar a la primera suelo tardar 32 min 54 s, y en la segunda, 44 min 27 s. Hoy el tren se ha retrasado, y en llegar a la primera estación ha tardado 19 min 40 s más de lo habitual, mientras que en la segunda se ha retrasado 26 min 32 s.



a) ¿Cuánto tiempo he tardado en llegar?

b) Si en la vuelta no he tenido retrasos, ¿cuánto tiempo he invertido en los dos trayectos?

$$\text{a) } 32 \text{ min } 54 \text{ s} + 19 \text{ min } 40 \text{ s} + 44 \text{ min } 27 \text{ s} + 26 \text{ min } 32 \text{ s} = 2 \text{ h } 3 \text{ min } 33 \text{ s}$$

$$\text{b) } 2 \text{ h } 3 \text{ min } 33 \text{ s} + 32 \text{ min } 54 \text{ s} + 44 \text{ min } 27 \text{ s} = 3 \text{ h } 20 \text{ min } 54 \text{ s}$$

066



Una máquina trabaja de manera ininterrumpida durante 4 h 50 min 30 s, parando después 1 h 50 min. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina en hacer tres turnos de trabajo y descanso?

Un turno de trabajo y descanso es:

$$4 \text{ h } 50 \text{ min } 30 \text{ s} + 1 \text{ h } 50 \text{ min} = 6 \text{ h } 40 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$\text{Tres turnos son: } (6 \text{ h } 40 \text{ min } 30 \text{ s}) \cdot 3 = 20 \text{ h } 1 \text{ min } 30 \text{ s}$$

- 067** ●● Un pintor ha tardado en pintar el salón 3 horas y cuarto por la mañana, y 2 horas y media por la tarde.



- a) ¿Cuánto tiempo tardó en total?  
 b) ¿Cuánto tiempo trabajó más por la mañana?  
 c) Si cobra la hora a 19,20 €, ¿cuánto dinero ganó?

- a)  $3\text{ h }15\text{ min} + 2\text{ h }30\text{ min} = 5\text{ h }45\text{ min}$  tardó en total.  
 b)  $3\text{ h }15\text{ min} - 2\text{ h }30\text{ min} = 45\text{ min}$  trabajó más por la mañana.  
 c) Tardó:  $5\text{ h }45\text{ min} = 5,75\text{ h}$  y ganó:  $5,75 \cdot 19,20 = 110,40\text{ €}$ .

- 068** ●● Damián cobra el sábado 8 € por cada hora de trabajo, y el domingo, 9,50 €. Este mes ha trabajado tres sábados y cuatro domingos. Los sábados trabajó 5 horas y media, y los domingos, 3 horas y tres cuartos. ¿Cuánto cobrará a fin de mes?

- Horas de trabajo de los sábados:  $5,5\text{ h} \cdot 3 = 16,5\text{ h} = 16\text{ h }30\text{ min}$ .  
 Salario de los sábados:  $16,5 \cdot 8 = 132\text{ €}$ .  
 Horas de trabajo de los domingos:  $3,75\text{ h} \cdot 4 = 15\text{ h}$ .  
 Salario de los domingos:  $15 \cdot 9,50 = 142,50\text{ €}$ .  
 Salario total:  $132 + 142,50 = 274,50\text{ €}$ .

- 069** ●● Marcos, Roberto y Ricardo se están comiendo un pastel:

- Marcos se ha comido un trozo equivalente a  $35^\circ 10'$ .
- Roberto se ha comido un trozo de  $40^\circ 30'$ .
- Ricardo se ha comido un trozo de  $50^\circ 40'$ .

- a) ¿Cuánto mide el trozo de pastel que se han comido entre los tres?  
 b) ¿Cuánto mide el trozo que queda?

- a)  $35^\circ 10' + 40^\circ 30' + 50^\circ 40' = 126^\circ 20'$  mide el trozo de pastel que se han comido entre los tres.  
 b)  $360^\circ - 126^\circ 20' = 233^\circ 40'$  mide el trozo que queda.

# Sistema sexagesimal

070

Los rayos del sol entran por la mañana en una habitación y se reflejan en la pared con una determinada inclinación. A las 7 de la mañana de un día de verano, ese ángulo era de  $22^\circ 14'$ . Cada hora que pasa, el ángulo de inclinación aumenta en  $2^\circ 10' 20''$ .

- a) ¿Qué ángulo tendrá a las 8 de la mañana?
- b) ¿Y a las 9 de la mañana?
- c) ¿Cuál será el ángulo a la 1 del mediodía?

a)  $22^\circ 14' + 2^\circ 10' 20'' = 24^\circ 24' 20''$

b)  $24^\circ 24' 20'' + 2^\circ 10' 20'' = 26^\circ 34' 40''$

c)  $22^\circ 14' + (2^\circ 10' 20'') \cdot 6 = 22^\circ 14' + 13^\circ 2' = 35^\circ 16'$

071

El tiempo transcurrido entre dos equinoccios de primavera consecutivos es lo que se conoce como año trópico, y dura 365 días, 5 horas, 48 minutos y 45,51 segundos.



En nuestro calendario usamos el año civil, que consta de 365 o 366 días. De esta manera, podemos contar el año en días completos.

- a) ¿Cuántos minutos hay de diferencia entre un año trópico y un año civil de 365 días?
- b) ¿Cuál es la diferencia, en horas, minutos y segundos, al cabo de 4 años?

a)  $5 \text{ h } 48 \text{ min } 45,51 \text{ s} = 348,75 \text{ min}$  dura más el año trópico que el año civil de 365 días.

b) 4 años trópicos:  $(365 \text{ días } 5 \text{ h } 48 \text{ min } 45,51 \text{ s}) \cdot 4 =$   
 $= 1.460 \text{ días } 23 \text{ h } 15 \text{ min } 2,04 \text{ s}$

4 años civiles:  $365 \cdot 3 + 366 = 1.461 \text{ días}$ .

Diferencia:  $44 \text{ min } 57,96 \text{ s}$  duran más los 4 años civiles.

072

El calendario juliano (antecesor del calendario actual) insertaba un día adicional cada 4 años, al que denominaban bisiesto.

- a) ¿Cuál es la diferencia entre 4 años trópicos y 4 años civiles, siendo uno de ellos bisiesto?
- b) ¿Cuántos años han de pasar para que el desfase sea de 10 días?

a) 4 años trópicos:

$(365 \text{ días } 5 \text{ h } 48 \text{ min } 45,51 \text{ s}) \cdot 4 = 1.460 \text{ días } 23 \text{ h } 15 \text{ min } 2,04 \text{ s}$

4 años civiles:  $365 \cdot 3 + 366 = 1.461 \text{ días}$ .

Diferencia:  $44 \text{ min } 57,96 \text{ s}$  duran más los 4 años civiles.

b) 10 días =  $864.000 \text{ s}$ ;  $44 \text{ min } 57,96 \text{ s} = 2.697,96 \text{ s}$

$864.000 \text{ s} : 2.697,96 \text{ s} = 320,4$  períodos de 4 años han de pasar para tener un desfase de 10 días, es decir,  $320,4 \cdot 4 = 1.281,6$  años.

073

Debido al desfase del calendario juliano, el papa Gregorio XIII mandó reformar el calendario. En el calendario gregoriano, que es el vigente en nuestros días, los años bisiestos son aquellos que son divisibles por 4, excepto los divisibles por 100, pero no por 400 (o sea, el año 2100 no será bisiesto). ¿Cuántos años han de pasar para tener un desfase de un día?



Desfase en 4 años: 44 min 57,96 s.

Desfase en 100 años:  $(44 \text{ min } 57,96 \text{ s}) \cdot 25 - 24 \text{ h} = 18 \text{ h } 44 \text{ min } 9 \text{ s} - 24 \text{ h} = -5 \text{ h } 15 \text{ min } 51 \text{ s}$  es menor el período civil.

Desfase en 400 años:  $(-5 \text{ h } 15 \text{ min } 51 \text{ s}) \cdot 4 + 24 \text{ h} = 2 \text{ h } 57 \text{ min } 36 \text{ s}$ .

Por tanto, para que haya un desfase de un día han de pasar 8 períodos de 400 años, es decir, 3.200 años.

## EN LA VIDA COTIDIANA

074

Mariano comienza hoy a trabajar en una fábrica de muebles. Tras firmar el contrato, el encargado le ha enseñado la fábrica y le ha presentado a sus compañeros.

En esta fábrica nos dedicamos a hacer sillas y mesas.  
Aquí tienes las piezas y tu trabajo será montarlas.



Según las condiciones del contrato que ha firmado, trabajará 8 horas diarias, de lunes a viernes. Por ese trabajo recibirá un sueldo fijo mensual de 600 €, al que habrá que añadir:

- Por cada silla terminada, 2,75 €.
- Por cada mesa, 4,50 €.

Lo primero que ha hecho Mariano ha sido cronometrar el tiempo que tarda en elaborar una silla y una mesa.

Tardo 1 h 20 min en montar una silla  
y 2 h 15 min en terminar una mesa.



# Sistema sexagesimal

El encargado le ha dicho que puede fabricar mesas o sillas según su elección, pero que no podrá ampliar su horario de trabajo ni un solo minuto, pues las máquinas de montaje funcionan exactamente 8 horas diarias.

a) ¿Cuántas mesas y sillas deberá terminar diariamente para que su trabajo sea lo más rentable posible?

b) ¿Cuál será su sueldo mensual si elige esa opción?

Horas en montar una silla: 1 h 20 min = 1,33 h.

Horas en montar una mesa: 2 h 15 min = 2,25 h.

Por cada hora de trabajo, montando sillas, cobrará:  $2,75 : 1,33 = 2,0625$  €.

Por cada hora de trabajo, montando mesas, cobrará:  $4,5 : 2,25 = 2$  €.

Mariano cobrará más dinero montando sillas.

a) Como tarda 1 h 20 min en montar una silla, en 6 sillas tardará 8 h.

Por tanto, lo más rentable es montar 6 sillas diarias.

b)  $600 + 22 \cdot 6 \cdot 2,75 = 600 + 363 = 963$  €

075

En mi DVD, grabando con una calidad normal, un CD tiene capacidad para 5 horas de grabación.

Tengo un CD en el que he grabado dos películas.

La primera, *Las nueces de primavera*, según el menú de grabación dura 93 min 52 s, y la otra, *Al caer las nueces*, 73 min 39 s.



El espacio que queda libre en el CD lo quiero completar grabando todos los capítulos que pueda de mi serie favorita, *Contando nueces*.



Cada capítulo dura 35 minutos, a lo que hay que añadir la publicidad.

En cada capítulo hay dos cortes publicitarios en los que se suelen emitir 18 anuncios, de 20 segundos cada uno.

Teniendo en cuenta que tendré que grabar los anuncios, ¿cuántos capítulos caben en el CD? ¿Cuánto tiempo de grabación sobra?

Duración de las dos películas:  $93 \text{ min } 52 \text{ s} + 73 \text{ min } 39 \text{ s} = 167 \text{ min } 31 \text{ s}$ .

Duración del CD:  $5 \text{ h} = 300 \text{ min}$ .

Tiempo restante de grabación tras grabar las películas:

$$300 \text{ min} - 167 \text{ min } 31 \text{ s} = 132 \text{ min } 29 \text{ s}$$

Duración de un capítulo de la serie con anuncios:

$$35 \text{ min} + 2 \cdot 18 \cdot 20 \text{ s} = 47 \text{ min}$$

Por tanto, cabrán dos capítulos de la serie con una duración

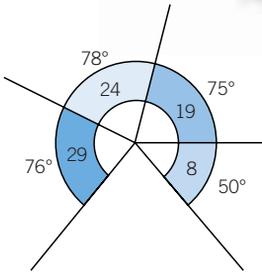
$$\text{de } 2 \cdot 47 \text{ min} = 94 \text{ min}.$$

Tiempo restante de grabación del CD:  $132 \text{ min } 29 \text{ s} - 94 \text{ min} = 38 \text{ min } 29 \text{ s}$ .

076

Esta es la gráfica que se ha publicado en el periódico EL COTIDIANO basándose en los resultados electorales de las últimas elecciones.

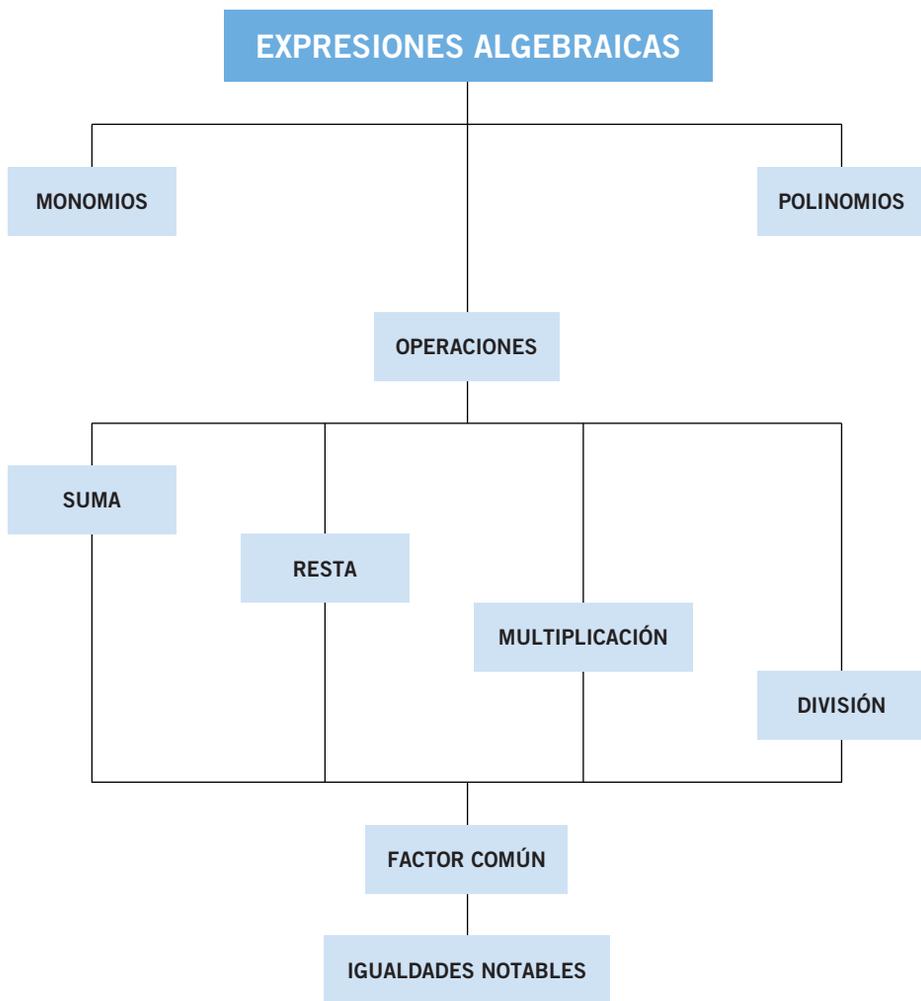
Utiliza el transportador para medir el ángulo que corresponde a cada uno de los partidos, y evalúa si es correcta la representación gráfica.



La representación gráfica no es correcta, ya que el mayor sector no corresponde con el mayor número de escaños y hay dos sectores con el mismo ángulo y distinta asignación de escaños. Además, no hay una proporcionalidad entre el ángulo y el número de escaños.

# 5

# Expresiones algebraicas



## El templo de Apis

Desde un lugar privilegiado, el escriba Ahmes asistía al interrogatorio dirigido por el juez y el sumo sacerdote del templo, quien había denunciado la desaparición de la comida del buey.

El sacerdote se volvió hacia el juez y dijo:

–¡Al robar toda la comida del dios han cometido un delito imperdonable, y Apis exige que la condena sea máxima!

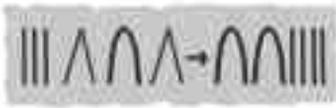
–La ley está escrita y estipula la condena por el acto cometido y la cantidad robada –le replicó el juez sin mirarlo. Y acto seguido volvió a preguntar a los dos detenidos por las cantidades que habían sustraído.

El mayor de ellos le contestó:

–Cada uno tomó lo que pudo: él cogió tres «montones» y yo sustraje diez «montones».

–El registro del templo dice que había 24 heqat destinadas a la reencarnación del dios Apis. Ahmes, anota los datos y calcula la cantidad que sustrajo cada uno –dijo el juez dirigiéndose al escriba, que seguía apuntando en el papiro.

El escriba anotó la siguiente expresión para designar lo sustraído por cada uno.



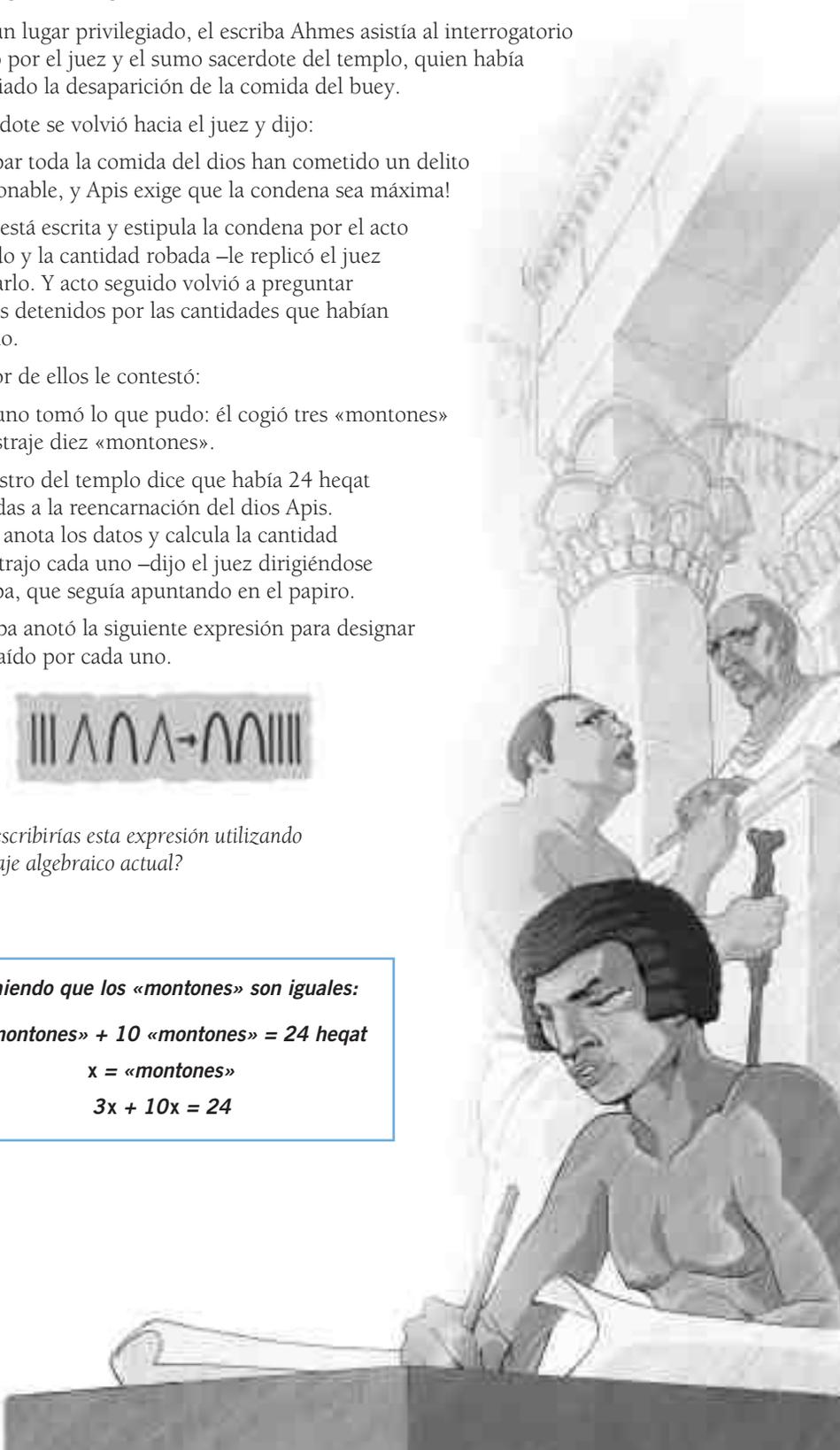
¿Cómo escribirías esta expresión utilizando el lenguaje algebraico actual?

**Suponiendo que los «montones» son iguales:**

$$3 \text{ «montones»} + 10 \text{ «montones»} = 24 \text{ heqat}$$

$$x = \text{«montones»}$$

$$3x + 10x = 24$$



# Expresiones algebraicas

## EJERCICIOS

**001** Expresa en el lenguaje algebraico.

- a) El doble de un número.
- b) El doble de un número menos tres unidades.
- c) El doble de un número menos tres unidades, más otro número.
- d) El doble de un número menos tres unidades, más otro número, menos la tercera parte del primer número.
- e) El doble de un número menos tres unidades, más otro número, menos la tercera parte del primer número, más la mitad del segundo.

a)  $2x$

b)  $2x - 3$

c)  $2x - 3 + y$

d)  $2x - 3 + y - \frac{x}{3}$

e)  $2x - 3 + y - \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$

**002** Si  $x$  es la edad de Inés, expresa en lenguaje algebraico.

- a) La edad que tendrá dentro de 10 años.
- b) La edad que tenía hace 4 años.

a)  $x + 10$

b)  $x - 4$

**003** Expresa con lenguaje algebraico.

- a) La propiedad conmutativa de la suma de dos números.
- b) El teorema de Pitágoras.

a)  $x + y = y + x$

b)  $a^2 = b^2 + c^2$

**004** Calcula el valor numérico de estas expresiones algebraicas para  $x = 3$ .

a)  $x + 1$

c)  $2x - 3$

b)  $x^2 + 1$

d)  $2x^2 - 3x$

a) 4

c) 3

b) 10

d) 9

**005** Halla el valor numérico de  $2x^2 - y$  para estos valores.

a)  $x = 0, y = 1$

b)  $x = -1, y = -2$

a) -1

b) 4

**006** Indica mediante una expresión algebraica el perímetro y el área de un cuadrado de lado  $x$ . Halla su valor numérico cuando el lado mide:

a) 4 cm

b) 5 cm

c) 6 cm

$$P = 4x \quad A = x^2$$

a)  $P = 16$  cm     $A = 16$  cm<sup>2</sup>

b)  $P = 20$  cm     $A = 25$  cm<sup>2</sup>

c)  $P = 24$  cm     $A = 36$  cm<sup>2</sup>

**007** ¿Cuánto debe valer  $b$  para que el valor numérico de la expresión  $\frac{a-4}{2} + b$ , para  $a = -4$ , sea 0?

$$b = 4$$

**008** Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.

a)  $7x^2yz$

e)  $3abc$

b)  $-2xy^3z^2$

f)  $-4a^2bc^4$

c)  $15x^2$

g)  $9m^2$

d)  $8xy^2$

h) 6

a) Coeficiente: 7    Parte literal:  $x^2yz$     Grado: 4

b) Coeficiente: -2    Parte literal:  $xy^3z^2$     Grado: 6

c) Coeficiente: 15    Parte literal:  $x^2$     Grado: 2

d) Coeficiente: 8    Parte literal:  $xy^2$     Grado: 3

e) Coeficiente: 3    Parte literal:  $abc$     Grado: 3

f) Coeficiente: -4    Parte literal:  $a^2bc^4$     Grado: 7

g) Coeficiente: 9    Parte literal:  $m^2$     Grado: 2

h) Coeficiente: 6    Sin parte literal    Grado: 0

**009** Escribe los monomios opuestos.

a)  $4abc^2$

b)  $-5xy^2z$

c)  $3x^3y$

d)  $-2a^2b^3c$

a)  $-4abc^2$

c)  $-3x^3y$

b)  $5xy^2z$

d)  $2a^2b^3c$

**010** Indica el grado de los monomios semejantes a:

a)  $-xy^2$

b)  $-5xy$

c)  $x^3$

d)  $6x^3$

a) Grado 3

b) Grado 2

c) Grado 3

d) Grado 3

# Expresiones algebraicas

**011** Realiza las siguientes operaciones.

- |  |                       |
|--|-----------------------|
| a) $5x + 2x$                             | f) $-9a : 3a$         |
| b) $-3y^2 + 4y^2$                        | g) $-10x^3y^2 : x^2y$ |
| c) $2ab^2 - a^2b$                        | h) $5x^2 + 7x$        |
| d) $-4x^3 \cdot 2x$                      | i) $4x - 5xy$         |
| e) $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{3}{4}a^2$ | j) $-3x + 4y^2$       |
|  | k) $10x^3 : 2xy^2$    |
| a) $7x$                                  | f) $-3$               |
| b) $y^2$                                 | g) $-10xy$            |
| c) $2ab^2 - a^2b$                        | h) $5x^2 + 7x$        |
| d) $-8x^4$                               | i) $4x - 5xy$         |
| e) $\frac{3}{8}a^5$                      | j) $-3x + 4y^2$       |
|  | k) $\frac{5x^2}{y^2}$ |

**012** Resuelve estas operaciones.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $5x^3 - 6x + 7x - x^3 - x + 4x^3$ | b) $2x^2 \cdot x^3 \cdot 3x^5 : (-6x)$ |
| a) $8x^3$                            | b) $-x^9$                              |

**013** Calcula.

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| a) $8x^4 : (2x^2 + 2x^2)$ | b) $(5y^3 - 2y^3) : (3xy^2)$    |
| a) $8x^4 : 4x^2 = 2x^2$   | b) $3y^3 : 3xy^2 = \frac{y}{x}$ |

**014** Reduce los términos semejantes en estos polinomios, ordena sus términos, de mayor a menor grado, e indica el grado de cada polinomio.

- a)  $P(x) = 5x^3 - x + 7x^3 - x^2 + 8x - 2$   
b)  $Q(x) = 12 + x^2 + 7x - x^4 - 8 + 3x^2$   
c)  $R(x) = 9x - 4x^2 - 6 - 10x + 1$   
d)  $S(x) = 4x^2 - x^3 + 4x^3 - x^5 + 8 - x^2$
- a)  $P(x) = 12x^3 - x^2 + 7x - 2 \rightarrow$  Grado: 3  
b)  $Q(x) = -x^4 + 4x^2 + 7x + 4 \rightarrow$  Grado: 4  
c)  $R(x) = -4x^2 - x - 5 \rightarrow$  Grado: 2  
d)  $S(x) = -x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 8 \rightarrow$  Grado: 5

**015** Calcula el valor numérico de estos polinomios para  $x = -3$ .

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| a) $Q(x) = \frac{1 - 3x}{2}$ | b) $R(x) = -5 + 7x + \frac{3x}{2}$ |
| a) $Q(-3) = 5$               | b) $R(-3) = \frac{-61}{2}$         |

- 016** Halla el valor de  $a$  para que el polinomio  $P(x) = ax^2 - 3x + 5$  cumpla que  $P(2) = 3$ .

$$P(2) = 4a - 6 + 5 = 3 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

- 017** Realiza las siguientes operaciones con estos polinomios.

$$P(x) = x^2 - 3x + 7 \qquad S(x) = 8x - 2$$

$$Q(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 3 \qquad R(x) = 7x^2 + 4$$

- a)  $Q(x) + S(x)$                       c)  $2x^2 \cdot Q(x)$   
 b)  $R(x) - P(x)$                       d)  $P(x) \cdot 7x$

a)  $Q(x) + S(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 3 + 8x - 2 = 5x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

b)  $R(x) - P(x) = 7x^2 + 4 - (x^2 - 3x + 7) = 6x^2 + 3x - 3$

c)  $2x^2 \cdot Q(x) = 2x^2 \cdot (5x^3 - 6x^2 + x - 3) = 10x^5 - 12x^4 + 2x^3 - 6x^2$

d)  $P(x) \cdot 7x = (x^2 - 3x + 7) \cdot 7x = 7x^3 - 21x^2 + 49x$

- 018** Calcula, con los polinomios anteriores.

- a)  $(P(x) - R(x)) \cdot 2x$                       b)  $(R(x) - Q(x)) \cdot (-x^2)$

a)  $(P(x) - R(x)) \cdot 2x = (x^2 - 3x + 7 - (7x^2 + 4)) \cdot 2x =$   
 $= (-6x^2 - 3x + 3) \cdot 2x = -12x^3 - 6x^2 + 6x$

b)  $(R(x) - Q(x)) \cdot (-x^2) = (7x^2 + 4 - (5x^3 - 6x^2 + x - 3)) \cdot (-x^2) =$   
 $= (-5x^3 + 13x^2 - x + 7) \cdot (-x^2) = 5x^5 - 13x^4 + x^3 - 7x^2$

- 019** Indica, sin multiplicar, el grado y el número de términos del polinomio  $(x^2 + x + 3) \cdot x^2$ .

Grado: 4 y número de términos: 3.

- 020** Realiza estas operaciones.

- a)  $(6x^2 - 8x + 3) \cdot (3x - 1)$   
 b)  $(-x^3 + 4x^2 - 5) \cdot (-x - 1)$   
 c)  $(18x^5 - 10x^4 + 6x^2) : -2x$   
 d)  $(12x^4 - 24x^3 + x^2) : 3x^2$   
 e)  $(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$

a)  $18x^3 - 30x^2 + 17x - 3$

b)  $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 5$

c)  $-9x^4 + 5x^3 - 3x$

d)  $4x^2 - 8x + \frac{1}{3}$

e)  $x^3 - 1$

# Expresiones algebraicas

021 Haz la siguiente operación.

$$[(30a^2b - 15ab^2 + 5a^2b^2) \cdot (-a - b)] : ab$$

$$\begin{aligned}(-30a^3b - 15a^2b^2 - 5a^3b^2 + 15ab^3 - 5a^2b^3) : ab &= \\ &= -30a^2 - 15ab - 5a^2b + 15b^2 - 5ab^2\end{aligned}$$

022 Calcula el valor de  $a$  para que:  $(2x^2 + x - 3) \cdot a = 2x^4 + x^3 - 3x^2$ .

$$a = x^2$$

023 Determina si se puede sacar factor común, y hazlo en los casos en los que sea posible.

a)  $-5x^4 + 2x^3$

e)  $7x^2 - 4y^2$

b)  $3x^2 + 6x^2 - 9x^3$

f)  $3x^2 + 2$

c)  $3x^2 - 3x + 3$

g)  $12x - 4y$

d)  $x^6 - x^3$

h)  $5x^2 - 10$

a)  $x^3 \cdot (-5x + 2)$

e) No es posible.

b)  $9x^2 \cdot (1 - x)$

f) No es posible.

c)  $3 \cdot (x^2 - x + 1)$

g)  $4 \cdot (3x - y)$

d)  $x^3 \cdot (x^3 - 1)$

h)  $5 \cdot (x^2 - 2)$

024 Sacar factor común en estas expresiones.

a)  $5a^3b^3 + 10a^2b^2$

b)  $a^4b^2 - a^2b^2$

a)  $5a^2b^2 \cdot (ab + 2)$

b)  $a^2b^2 \cdot (a^2 - 1)$

025 Calcula  $a$  para que el factor común de  $yx^5 + 4y^2x^3 - 6y^3x^a$  sea  $yx^2$ .

$$a = 2$$

026 Calcula los cuadrados de estas sumas y diferencias.

a)  $(4x + 5)^2$

e)  $(3a - 5b)^2$

b)  $(x^2 + 7x)^2$

f)  $(8 - 3x)^2$

c)  $(x^3 + 3x^2)^2$

g)  $(x^2 - x^3)^2$

d)  $\left(\frac{5x}{6} + \frac{2}{7}\right)^2$

h)  $\left(\frac{x}{4} - \frac{2x}{3}\right)^2$

a)  $16x^2 + 40x + 25$

e)  $9a^2 - 30ab + 25b^2$

b)  $x^4 + 14x^3 + 49x^2$

f)  $64 - 48x + 9x^2$

c)  $x^6 + 6x^5 + 9x^4$

g)  $x^4 - 2x^5 + x^6$

d)  $\frac{25x^2}{36} + \frac{10x}{21} + \frac{4}{49}$

h)  $\left(\frac{5x}{12}\right)^2 = \frac{25x^2}{144}$

**027** Corrige los errores cometidos.

a)  $(7x + 2)^2 = 7x^2 + 4$

b)  $(6x^4 - 4)^2 = 36x - 8x + 16$

a)  $(7x + 2)^2 = 49x^2 + 28x + 4$

b)  $(6x^4 - 4)^2 = 36x^8 - 48x^4 + 16$

**028** Expresa este polinomio como una suma de cuadrados:  $x^2 + 4x + 4$ .

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

**029** Expresa estos productos como una diferencia de cuadrados.

a)  $(x + 4)(x - 4)$

b)  $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

c)  $(3 - 2x)(3 + 2x)$

d)  $\left(\frac{x}{3} + 5\right)\left(\frac{x}{3} - 5\right)$

e)  $\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3}\right)$

a)  $x^2 - 16$

b)  $x^4 - 1$

c)  $9 - 4x^2$

d)  $\frac{x^2}{9} - 25$

e)  $\frac{1}{4} - \frac{x^4}{9}$

**030** Estudia si los polinomios se pueden expresar como el cuadrado de una suma o diferencia.

a)  $x^2 + 10x + 25$

c)  $x^6 - 12x^5 + 36x^4$

b)  $4 + 12x + 9x^2$

d)  $18x - 9 + 9x^2$

a)  $(x + 5)^2$

c)  $(x^3 - 6x^2)^2$

b)  $(2 + 3x)^2$

d) No es posible.

**031** Expresa este polinomio como un producto:  $x^4 - x^3 + \frac{x^2}{4}$ .

$$\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2$$

# Expresiones algebraicas

## ACTIVIDADES

032 Expresa en lenguaje algebraico estos enunciados.

- a) El doble de un número más 5.
- b) El triple de un número menos 6.
- c) El doble de la suma de un número más 4.
- d) La mitad de la diferencia de un número menos 8.
- e) El cuadrado de la suma de un número más 7.
- f) El cubo de la mitad de un número.
- g) La mitad del cuadrado de un número.
- h) Un número más su cuadrado.
- i) El cuádruple del cuadrado de un número.
- j) La mitad de un número menos 3.

a)  $2x + 5$

f)  $\left(\frac{x}{2}\right)^3$

b)  $3x - 6$

g)  $\frac{x^2}{2}$

c)  $2(x + 4)$

h)  $x + x^2$

d)  $\frac{x - 8}{2}$

i)  $4x^2$

e)  $(x + 7)^2$

j)  $\frac{x}{2} - 3$

033 Expresa estas expresiones algebraicas mediante enunciados.

a)  $4x - 2$

d)  $\frac{x + 3}{4}$

g)  $3x - \frac{x}{2}$

b)  $5 - 2x$

e)  $(x + 2)^2$

h)  $(2x - 1)^2$

c)  $2x^3$

f)  $x^2 - 4$

i)  $(2x)^2 - 1$

- a) El cuádruple de un número menos 2.
- b) El número 5 menos el doble de un número.
- c) El doble del cubo de un número.
- d) La cuarta parte de la suma de un número más 3.
- e) El cuadrado de la suma de un número más 2.
- f) El cuadrado de un número menos 4.
- g) El triple de un número menos su mitad.
- h) El cuadrado de la resta del doble de un número menos 1.
- i) El cuadrado del doble de un número menos 1.

## 034 HAZLO ASÍ

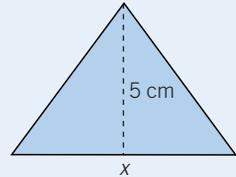
¿CÓMO SE EXPRESAN ALGEBRAICAMENTE ALGUNAS RELACIONES GEOMÉTRICAS?

Escribe, mediante una expresión algebraica, la superficie de un triángulo isósceles cuya altura mide 5 cm.

**PRIMERO.** Se nombran todos los elementos que intervienen en el cálculo de la superficie. A los elementos desconocidos se les designa mediante una letra.

**SEGUNDO.** Se escribe la fórmula correspondiente.

$$A = \frac{x \cdot 5}{2} = \frac{5x}{2}$$

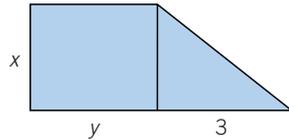


035 Si la base de un triángulo es 4 cm, escribe la expresión algebraica que representa su superficie.

$x$ : altura  $\rightarrow A = \frac{4x}{2} = 2x$

036 Expresa de forma algebraica la superficie de esta figura.

$$A = xy + \frac{3x}{2}$$



037 Calcula el valor numérico de la expresión  $2x - 3$  para estos valores de  $x$ .

- |            |            |             |                      |
|------------|------------|-------------|----------------------|
| a) $x = 1$ | b) $x = 0$ | c) $x = -2$ | d) $x = \frac{1}{2}$ |
| a) $-1$    | b) $-3$    | c) $-7$     | d) $-2$              |

038 Determina el valor numérico de la expresión  $3x^2 - 2y + 4$  para los valores de  $x$  e  $y$ :

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| a) $x = 1, y = -2$           | c) $x = -1, y = -3$                    |
| b) $x = -2, y = \frac{1}{2}$ | d) $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{1}{4}$ |
| a) 11                        | c) 13                                  |
| b) 15                        | d) $\frac{75}{16}$                     |

039 Halla el valor de  $a$  en la expresión  $4x^3 + 3x^2 - ax - 5$ , sabiendo que su valor numérico para  $x = -1$  es 0.

Si  $-4 + 3 + a - 5 = 0$ , entonces  $a = 6$ .

# Expresiones algebraicas

040



Calcula el valor de  $a$  en la expresión  $-2x^2 - 3x - a$  si su valor numérico para  $x = 3$  es  $-5$ .

Si  $-18 - 9 - a = -5$ , entonces  $a = -22$ .

041



Completa la siguiente tabla.

Monomio	Coficiente	Parte literal	Grado
$-8xyz^2$	$-8$	$xyz^2$	$4$
$3a^2b^4$	$3$	$a^2b^4$	$6$
$4x^3y^2$	$4$	$x^3y^2$	$5$
$-9a^2bc$	$-9$	$a^2bc$	$4$
$z^6$	$1$	$z^6$	$6$
$\frac{2}{3}bc^2$	$\frac{2}{3}$	$bc^2$	$3$

042



Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Razona tu respuesta.

- a)  $12ab$  y  $-2ab$  son semejantes.
- b)  $7xyz$  y  $-7xy$  son opuestos.
- c)  $7xy^2z$  y  $-7x^2yz$  son semejantes y opuestos.
- d)  $12ab$  y  $\frac{-1}{12}ab$  son semejantes y opuestos.

- a) Verdadera, ya que tienen la misma parte literal.
- b) Falsa, pues no tienen la misma parte literal.
- c) Falsa, porque no tienen la misma parte literal.
- d) Falsa, ya que los coeficientes no son opuestos.

043



Escribe, si es posible.

- a) Dos monomios de grado 5 que sean semejantes y no opuestos.
- b) Dos monomios de grado 5 que sean opuestos y no semejantes.
- c) Dos monomios de grado 5 que sean semejantes y opuestos.
  - a)  $3x^5$  y  $6x^5$
  - b) No es posible, ya que si son opuestos serán semejantes.
  - c)  $3x^2y^3$  y  $-3x^2y^3$

044



Haz estas operaciones de monomios.

- a)  $-x^2 + x + x^2 + x^3 + x$
- b)  $2x^3 - (x^3 - 3x^3)$
- c)  $8x^2 - x + 9x + x^2$
- d)  $8xy^2 - 5x^2y + x^2y - xy^2$
- e)  $-3x + 7y - (8y + y - 6x)$
- f)  $\frac{4}{3}xy - \frac{5}{2}xy + \frac{7}{4}xy - xy$
- g)  $2x^2 \cdot 4x^3 \cdot 5x^6$
- h)  $-3x \cdot (-2x) \cdot \frac{7}{4}x$
- i)  $7x^3 \cdot 5x \cdot 9x^4$
- j)  $15x^3 : 5x^2$
- k)  $-8x^3y^2 : 2x^2y$
- l)  $10x^4yz^2 : 5xyz$

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| a) $x^3 + 2x$       | g) $40x^{11}$        |
| b) $4x^3$           | h) $\frac{21}{2}x^3$ |
| c) $9x^2 + 8x$      | i) $315x^8$          |
| d) $7xy^2 - 4x^2y$  | j) $3x$              |
| e) $3x - 2y$        | k) $-4xy$            |
| f) $\frac{-3}{4}xy$ | l) $2x^3z$           |

**045** Razona si las igualdades son verdaderas o falsas, y corrige los errores cometidos.

- |                    |                               |
|--------------------|-------------------------------|
| a) $a + a = 2a$    | e) $2a - b = 2 \cdot (a - b)$ |
| b) $2a + a = 2a^2$ | f) $2a + 3a = 5a$             |
| c) $2a - a = 2$    | g) $2a + 3b = 5ab$            |
| d) $2a - 2 = a$    | h) $2a^2 = 4a$                |
- 
- |  |   |
|--|---|
| a) Verdadera.                          | e) Falsa, $2a - 2b = 2 \cdot (a - b)$ . |
| b) Falsa, $2a + a = 3a$ .              | f) Verdadera.                           |
| c) Falsa, $2a - a = a$ .               | g) Falsa, $2a + 3b = 2a + 3b$ .         |
| d) Falsa, $2a - 2 = 2 \cdot (a - 1)$ . | h) Falsa, $2a^2 = 2a^2$ .               |

**046** Escribe  $12x^2y$  como:

- a) Suma y/o resta de tres monomios.  
 b) Producto de tres monomios.  
 c) Cociente de dos monomios.
- |                            |
|----------------------------|
| a) $3x^2y + 5x^2y + 4x^2y$ |
| b) $2x \cdot 2y \cdot 3x$  |
| c) $24x^2y^2 : 2y$         |

**047** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES COMBINADAS DE MONOMIOS?

Resuelve:  $8x^2 - (5x^4 + x^4) : 2x^2 + 15x^4 : (3x \cdot x)$ .

**PRIMERO.** Se resuelven las operaciones que hay entre paréntesis.

$$8x^2 - (5x^4 + x^4) : 2x^2 + 15x^4 : (3x \cdot x) = 8x^2 - 6x^4 : 2x^2 + 15x^4 : 3x^2$$

**SEGUNDO.** Se resuelven las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.

$$8x^2 - 6x^4 : 2x^2 + 15x^4 : 3x^2 = 8x^2 - 3x^2 + 5x^2$$

**TERCERO.** Se resuelven las sumas y restas en el mismo orden.

$$8x^2 - 3x^2 + 5x^2 = 5x^2 + 5x^2 = 10x^2$$

# Expresiones algebraicas

## 048 Opera y reduce.



- a)  $12x \cdot 3x^2 : x + 14x \cdot x^3 : 7x^2$
- b)  $16x \cdot x^3 : (-4) + 9x^5 : x^4 \cdot (-3x^3)$
- c)  $3x^2 \cdot (10 \cdot 5x^3) - 10x^4 \cdot 6x^2 : 2x$
- d)  $(5x^2 - 2x^2 + 7x^2) \cdot (4x^3 - x^3 + 6x^3)$
- e)  $(-4xy^2 + 9xy^2) : (3xy + 2xy)$
- f)  $(x^3 - 8x^3 + 4x^3) \cdot (y - 3y + 5y)$

- a)  $38x^2$
- b)  $-31x^4$
- c)  $120x^5$
- d)  $90x^5$
- e)  $y$
- f)  $-12x^3y$

## 049 Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones referidas a $2x + 3$ .



- a) 3 es el coeficiente de  $x$ .
- b) 3 es el término independiente.
- c) Hay tres términos.
- d) La  $x$  es la incógnita.

- a) Falsa
- b) Verdadera
- c) Falsa
- d) Verdadera

## 050 Señala los términos, coeficientes, variables y grados de estos polinomios.



- a)  $2x + 3y - 2$
- b)  $5 - 2x + 8y - 3x^2$
- c)  $2a + 2b + 3c$
- d)  $7 + 5t - 2z^2 - 3y$

- a) Términos:  $2x, 3y, -2$   
Coeficientes:  $2, 3, -2$   
Variables:  $x, y$   
Grado: 1
- b) Términos:  $5, -2x, 8y, -3x^2$   
Coeficientes:  $5, -2, 8, -3$   
Variables:  $x, y$   
Grado: 2
- c) Términos:  $2a, 2b, 3c$   
Coeficientes:  $2, 2, 3$   
Variables:  $a, b, c$   
Grado: 1
- d) Términos:  $7, 5t, -2z^2, -3y$   
Coeficientes:  $7, 5, -2, -3$   
Variables:  $t, z, y$   
Grado: 2

## 051 Identifica estos elementos de los polinomios.



- a) Número de términos de  $x^3 - x^2 + 4x + 5x^4 - 6$ .
- b) Término independiente de  $y + 3y^4 - 3y^3$ .
- c) Grado de  $R(x, y) = 5x^3y^2 + 6y^4 - 3x^4y^3 + 8x^2$ .
- d) Coeficientes de  $\frac{7 - 2x + 10x^3}{3}$ .

- a) 5
- b) 0
- c) 7
- d)  $\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{10}{3}$

- 052** Escribe un polinomio de una variable, con grado 7, que tenga 6 términos y cuyo término independiente sea  $-2$ .

$$x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^4 + 5x^2 - 2$$

- 053** Indica el grado de los polinomios.

- |                         |                             |
|-------------------------|-----------------------------|
| a) $5x^2 - 2xy^2$       | c) $4x^2 + 5x^2y^2 - 10xy$  |
| b) $8a^3b^2 + 5a^2b^3c$ | d) $a^2bc - 2abc + 6a^2b^3$ |
| a) 3                    | c) 4                        |
| b) 6                    | d) 5                        |

- 054** Calcula el valor numérico de estas expresiones para los valores  $n = 1$  y  $n = -2$ .

- |                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $3n^2 + 4n$                   | c) $n^2 - 1$                    |
| b) $n(n + 3)$                    | d) $n^2(n + 2)$                 |
| a) $n = 1 \rightarrow$ Valor: 7  | c) $n = 1 \rightarrow$ Valor: 0 |
| $n = -2 \rightarrow$ Valor: 4    | $n = -2 \rightarrow$ Valor: 3   |
| b) $n = 1 \rightarrow$ Valor: 4  | d) $n = 1 \rightarrow$ Valor: 3 |
| $n = -2 \rightarrow$ Valor: $-2$ | $n = -2 \rightarrow$ Valor: 0   |

- 055** Si  $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$ , calcula.

- a)  $P(1) + P(0) - P(-2)$       b)  $2 \cdot P(2) + 3 \cdot (-P(-1))$       c)  $P\left(\frac{1}{2}\right)$

a)  $P(1) + P(0) - P(-2) = -3 + (-5) - 71 = -79$

b)  $2 \cdot P(2) + 3 \cdot (-P(-1)) = 2 \cdot 23 + 3 \cdot 1 = 49$

c)  $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-77}{16}$

- 056** Halla el valor de  $a$  para que el polinomio sea de grado 2.

$$P(x) = (2a + 4)x^3 - 3x + 4x^2 - 7$$

Para que el polinomio sea de grado 2:  $2a + 4 = 0 \rightarrow a = -2$ .

- 057** Obtén el valor de  $a$  y  $b$  para que el polinomio tenga grado 3 y su término independiente sea 15.

$$P(x) = 3x^2 - (5 + a)x + x^3 - 3b$$

El polinomio siempre tendrá grado 3, ya que el coeficiente de grado 3 es 1.

Para que el término independiente sea 15:  $-3b = 15 \rightarrow b = -5$ .

El valor de  $a$  no afecta al término independiente ni al grado, por lo que puede ser cualquier valor.

# Expresiones algebraicas

058

Calcula el valor de  $a$  para que  $P(1) = 2$  si  $P(x) = ax^3 - 3x^2 + 4x - 7$ .

Si  $P(1) = 3 - 5 + a + 1 = 2$ , entonces  $a = 3$ .

059

Con estos polinomios, calcula.

$$A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 7$$

$$B(x) = x^3 + 7x^2 - 4x$$

$$C(x) = -2x^2 + x - 5$$

a)  $A(x) + B(x) + C(x)$

c)  $A(x) - B(x)$

b)  $B(x) + C(x)$

d)  $A(x) - B(x) - C(x)$

a)  $3x^3 + 2x^2 - 2x - 12$

c)  $x^3 - 10x^2 + 5x - 7$

b)  $x^3 + 5x^2 - 3x - 5$

d)  $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$

060

Halla dos polinomios cuya suma sea  $4x^3 - 6x^2 + 7x - 2$ .

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$$

$$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 7$$

061

Completa.

a)  $6x^2 - 4x + 7 + \square = 3x + 2$

b)  $5x^3 + 3x^2 - 10 - \square = x - x^2 + 7$

c)  $9x^3 + x^2 - 6x + 4 + \square = 2x^2 - x^3 + x$

a)  $-6x^2 + 7x - 5$

b)  $5x^3 + 4x^2 - x - 17$

c)  $-10x^3 + x^2 + 7x - 4$

062

Efectúa las siguientes operaciones.

a)  $(3x + 4) \cdot 2$

c)  $(4x^2 + x - 2) \cdot (-5)$

b)  $(x - 2) \cdot 4x$

d)  $(x^2 + 3x - 6) \cdot (-3x^3)$

a)  $6x + 8$

c)  $-20x^2 - 5x + 10$

b)  $4x^2 - 8x$

d)  $-3x^5 - 9x^4 + 18x^3$

063

Opera y reduce términos semejantes.

a)  $(x + 3) \cdot (x - 2)$

b)  $(2x - 6) \cdot (3x + 5)$

c)  $(4 - 6x + 3x^2) \cdot (-2 - x + x^2)$

a)  $x^2 + x - 6$

b)  $6x^2 - 8x - 30$

c)  $3x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 8x - 8$

064 Opera y reduce términos semejantes.

a)  $(9 - 3x) \cdot (-2) + 9x$   
 b)  $5x \cdot (6 + 7x) - x^2$   
 c)  $x^3 + x^2 \cdot (1 - x - 4x^2) + 8x$   
 d)  $4x^2 - 5 \cdot (x - x^2) - x \cdot (6 - 2x)$

a)  $-18 + 15x$

b)  $34x^2 + 30x$

c)  $-4x^4 + x^2 + 8x$

d)  $11x^2 - 11x$

065 Efectúa las siguientes divisiones.

a)  $(25a - 15) : 5$

b)  $(12a^2 - 18a + 69) : 6$

a)  $5a - 3$

b)  $2a^2 - 3a + \frac{23}{2}$

c)  $(10a^4 - 20a^3 - 4a^2) : 2a$

d)  $[(16a^4 : 4a^2)] : 2a$

c)  $5a^3 - 10a^2 - 2a$

d)  $2a$

066 Realiza estas operaciones.

a)  $(x^3 + 3x^3) : x^2$

b)  $(7x^3 - 4x^2 + 5x) : x$

a)  $4x$

b)  $7x^2 - 4x + 5$

c)  $(9x^3y^3 + 3x^2y + 15xy^2) : 3xy$

d)  $(12xy - x^2y) : xy$

c)  $3x^2y^2 + x + 5y$

d)  $12 - x$

067 Completa.

a)  $\square : 4xy = 3y^2z^3 + 5xy^2 - 2xyz$

b)  $\square : x^3y^2 = 9y + 6x - 4x^2y$

c)  $\square : (-5yz^3) = 2x - 5x^2z + 7y^2z^3$

a)  $12xy^3z^3 + 20x^2y^3 - 8x^2y^2z$

b)  $9x^3y^3 + 6x^4y^2 - 4x^5y^3$

c)  $-10xyz^3 + 25x^2yz^4 - 35y^3z^6$

068 Completa.

a)  $(10x^5 + 8x^3 - 6x^2 + 12x) : \square = 5x^4 + 4x^2 - 3x + 6$

b)  $(12x^4z^3 - 18x^3z^4 + 24x^2z^2) : \square = 4x^2z - 6xz^2 + 8$

c)  $(4x^5yz - 7x^4yz^2 + 6x^3y^3z^2) : \square = 4x^2 - 7xz + 6y^2z$

a)  $2x$

b)  $3x^2z^2$

c)  $x^3yz$

# Expresiones algebraicas

**069** Extrae factor común en cada caso.

a)  $3x + 6x - 9x$

b)  $4x - 12y$

c)  $10a - 10b + 10c$

d)  $3ab + 5ab$

a)  $3x \cdot (1 + 2 - 3)$

b)  $4 \cdot (x - 3y)$

c)  $10 \cdot (a - b + c)$

d)  $ab \cdot (3 + 5)$

e)  $10xy - 5xy + 15xy$

f)  $14x^4 - 35x^3 - 7x^2 + 42$

g)  $25m^2n + 20m^3n^2 - 30m^4$

h)  $x^2y - xy^3 + xy$

e)  $5xy \cdot (2 - 1 + 3)$

f)  $7 \cdot (2x^4 - 5x^3 - x^2 + 6)$

g)  $5m^2 \cdot (5n + 4mn^2 - 6m^2)$

h)  $xy \cdot (x - y^2 + 1)$

**070** Extrae factor común.

a)  $4x^5 + 3x^4 - 5x^2$

b)  $-6y^4 + 8y^3 + 4y$

a)  $x^2 \cdot (4x^3 + 3x^2 - 5)$

b)  $2y \cdot (-3y^3 + 4y^2 + 2)$

c)  $10x^2y - 15xy + 20xy^2$

d)  $3z^4 + 9z^2 - 6z^3$

c)  $5xy \cdot (2x - 3 + 4y)$

d)  $3z^2 \cdot (z^2 + 3 - 2z)$

**071** Desarrolla las igualdades notables.

a)  $(x - 5)^2$

b)  $(2x + 3y)^2$

a)  $x^2 - 10x + 25$

b)  $4x^2 + 12xy + 9y^2$

c)  $(4 + a)^2$

d)  $(3a - 6b)^2$

c)  $16 + 8a + a^2$

d)  $9a^2 - 36ab + 36b^2$

**072** Calcula.

a)  $(x^2 + y^2)^2$

b)  $(3x^2 - 5y^3)^2$

a)  $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

b)  $9x^4 - 30x^2y^3 + 25y^6$

c)  $(x^2 - y^2)^2$

d)  $(1 + a^4)^2$

c)  $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

d)  $1 + 2a^4 + a^8$

**073** Expresa como diferencia de cuadrados.

a)  $(x + 1)(x - 1)$

b)  $(5 + ab)(5 - ab)$

a)  $x^2 - 1$

b)  $25 - a^2b^2$

c)  $(3a - 2b)(3a + 2b)$

d)  $(2 + 7x^2y)(2 - 7x^2y)$

c)  $9a^2 - 4b^2$

d)  $4 - 49x^4y^2$

**074** Corrige los errores cometidos.



a)  $(x + 2)^2 = x^2 + 4$

b)  $(x - 3)^2 = x^2 + 6x - 9$

c)  $5 + 2 \cdot (x + 1)^2 = 10 \cdot (x + 1)^2 = (10x + 10)^2$

a)  $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b)  $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

c)  $5 + 2 \cdot (x + 1)^2 = 5 + 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 7$

**075** Completa con los términos que faltan.



a)  $(2x + 4)^2 = \square + 16x + \square$

c)  $(\square + 5)^2 = x^4 + 10\square + \square$

b)  $(3x^2 - 2)^2 = 9\square + \square - 12x^2$

d)  $(3 - \square)^2 = \square + 16x^2 - 24x$

a)  $(2x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$

c)  $(x^2 + 5)^2 = x^4 + 10x^2 + 25$

b)  $(3x^2 - 2)^2 = 9x^4 + 4 - 12x^2$

d)  $(3 - 4x)^2 = 9 + 16x^2 - 24x$

**076** Completa los términos que faltan para que los polinomios sean el cuadrado de una suma o una diferencia.



a)  $x^6 + 8x^3 + \square$

c)  $64 - \square + x^2$

b)  $x^2 + 16 + \square$

d)  $49 - \square + 4x^2$

a)  $x^6 + 8x^3 + 16$

c)  $64 - 16x + x^2$

b)  $x^2 + 16 + 8x$

d)  $49 - 28x + 4x^2$

**077** Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.



a)  $x^2 + 4x + 4$

d)  $x^4 + 2x^2 + 1$

b)  $4x^2 - 12x + 9$

e)  $9x^4 + 6x^3 + x^2$

c)  $\frac{1}{4}x^2 - x + 1$

f)  $9x^4 + 6x^2y + y^2$

a)  $(x + 2)^2$

d)  $(x^2 + 1)^2$

b)  $(2x - 3)^2$

e)  $(3x^2 + x)^2$

c)  $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

f)  $(3x^2 + y)^2$

**078** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXPRESA UN POLINOMIO DE LA FORMA  $a^2 - b^2$  COMO UNA SUMA POR DIFERENCIA?

Expresa  $P(x) = 16 - x^2$  como una suma por diferencia.

PRIMERO. Se identifican  $a$  y  $b$ .

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \quad b^2 = x^2 \rightarrow b = x$$

SEGUNDO. Se aplica la igualdad.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$$

# Expresiones algebraicas

079

Expresa los polinomios como producto de una suma por diferencia.

a)  $100 - 64x^2$

c)  $1 - x^2$

e)  $16x^2 - 25$

b)  $49x^4 - 36x^2$

d)  $9x^6 - x^8$

f)  $x^4 - 4$

a)  $(10 - 8x)(10 + 8x)$

d)  $(3x^3 + x^4)(3x^3 - x^4)$

b)  $(7x^2 + 6x)(7x^2 - 6x)$

e)  $(4x + 5)(4x - 5)$

c)  $(1 - x)(1 + x)$

f)  $(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

080

El precio del kilo de naranjas es  $x$  y el de uvas es  $y$ . Expresa en lenguaje algebraico.

a) El precio de 2 kg de naranjas y 3 kg de uvas.

b) Las uvas cuestan el doble que las naranjas.

c) El precio de 1,5 kg de naranjas y 2,5 kg de uvas.

a)  $2x + 3y$

b)  $y = 2x$

c)  $1,5x + 2,5y$

081

Si  $x$  es la edad actual de Jorge y Pedro tiene 8 años más que él, contesta a estas preguntas utilizando expresiones algebraicas.

a) ¿Cuál será la edad de Jorge dentro de 20 años?

b) ¿Qué edad tenía Jorge hace 7 años?

c) ¿Cuándo tendrá Jorge el doble de la edad que tiene ahora?

d) ¿Cuál es la edad actual de Pedro?

e) ¿Cuál será la edad de Pedro dentro de 15 años?

f) ¿Hace cuántos años Pedro tenía la mitad de la edad actual de Jorge?

g) ¿Dentro de cuántos años tendrá Jorge el doble de la edad actual de Pedro?

a)  $x + 20$

c) Dentro de  $x$  años.

e)  $x + 8 + 15$

g)  $2 \cdot (x + 8) - x$

b)  $x - 7$

d)  $x + 8$

f)  $x + 8 - \frac{x}{2}$



082

Un comerciante contabiliza 10 cajas de bolsas de gusanitos, 7 de palomitas y 8 de quicos. El repartidor trae 2 cajas de cada producto. Durante la semana se han vendido 2 cajas de bolsas de quicos,

4 de gusanitos y 3 de palomitas. Expresa en lenguaje algebraico

las operaciones que debe hacer el comerciante para saber qué mercancía tendrá la semana que vuelva el repartidor.



El repartidor traerá  $x$  cajas de gusanitos,  $y$  cajas de palomitas y  $z$  cajas de quicos.

Las cajas de cada producto que tendrá cuando vuelva el repartidor serán:

gusanitos:  $x + 10 + 2 - 4$ ; palomitas:  $y + 7 + 2 - 3$ ; quicos:  $z + 8 + 2 - 2$ .

- 083** Elige dos números de: 1, 2, 3, 4, 5, 6, y colócalos en los triángulos para que la expresión:

$$5(2x - \triangle) - (\nabla x + 3)(x - 2)$$

verde                      naranja

tome el valor 0 cuando  $x = 1$ .

El triángulo verde es  $a$  y el naranja es  $b$ .

Operando, tenemos que:  $13 - 5a + b = 0$ .

Como son valores positivos, resulta:  $5a > 13 \rightarrow a \geq 3$ .

Y como el mayor valor de  $b$  es 6:  $5a < 20 \rightarrow a < 4$ , por lo que  $a = 3$  y  $b = 2$ .

- 084** Encuentra el valor de  $x$ ,  $y$  y  $z$  para que este cuadrado sea un cuadrado mágico compuesto por números del 1 al 9.

(Recuerda: en un cuadrado mágico, la suma de los elementos de cada columna, fila y diagonal es la misma.)

Aunque existen varias soluciones, si  $y > z$ , solo hay una solución. ¿Cuál es?

$x + y$	$x - y + z$	$x - z$
$x - y - z$	$x$	$x + y + z$
$x + z$	$x + y - z$	$x - y$

En los cuadrados mágicos, el centro está ocupado por el número 5, luego  $x = 5$ .

Como el mayor valor es 9, tenemos que:  $y + z = 4$ , y al ser  $y > z$ :  $y = 3$  y  $z = 1$ .

8	3	4
1	5	9
6	7	2

- 085** Observa esta tabla.

$x + y + z$	=	15
$x + y - z$	=	15
$x + 2y + z$	=	17

- a) ¿Cuánto tiene que valer  $z$  para que dé igual sumar que restar?  
 b) ¿Puedes hallar el valor de  $y$ ? ¿Y el de  $x$ ?

a) El valor de  $z$  debe ser 0.

b)  $x + y = 15$

$$x + 2y = (x + y) + y = 17 \rightarrow y = 2, x = 13$$

# Expresiones algebraicas

## EN LA VIDA COTIDIANA

086



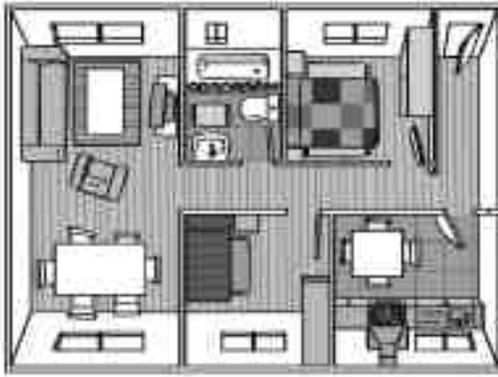
Tras varios debates sobre vivienda y habitabilidad se han extraído una serie de conclusiones sobre las dimensiones idóneas que debe tener una vivienda.

En el caso de viviendas de dos dormitorios, las recomendaciones son:

- El largo del recibidor debe ser el triple que el ancho.
- La cocina y los dormitorios deben tener de ancho el doble que el del recibidor, y de largo, el triple que el ancho del recibidor.
- El ancho del pasillo debe ser la mitad que el de la cocina, y el largo, cinco veces el ancho del recibidor.
- El salón debe tener un ancho igual al largo de la cocina, y un largo, cinco veces el ancho del recibidor.
- El servicio debe ser cuadrado, y su lado, igual al ancho de la cocina.



Considerando que el ancho del recibidor no puede ser inferior a 1,5 m, ¿cuál es la superficie mínima de una vivienda de estas características?



Ancho del recibidor:  $x = 1,5 \text{ m} \rightarrow$  Largo del recibidor:  $3x = 4,5 \text{ m}$ .  
Área del recibidor:  $1,5 \cdot 4,5 = 6,75 \text{ m}^2$ .

Ancho de la cocina y dormitorios:  $2x = 3 \text{ m}$ .  
Largo de la cocina y dormitorios:  $3x = 4,5 \text{ m}$ .  
Área de la cocina y dormitorios:  $3 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ m}^2$ .

Ancho del pasillo:  $\frac{2x}{2} = x = 1,5 \text{ m} \rightarrow$  Largo del pasillo:  $5x = 7,5 \text{ m}$ .  
Área del pasillo:  $1,5 \cdot 7,5 = 11,25 \text{ m}^2$ .

Ancho del salón:  $3x = 4,5 \text{ m} \rightarrow$  Largo del salón:  $5x = 7,5 \text{ m}$ .  
Área del salón:  $4,5 \cdot 7,5 = 33,75 \text{ m}^2$ .

Ancho del servicio:  $2x = 3 \text{ m} \rightarrow$  Largo del servicio:  $2x = 3 \text{ m}$ .  
Área del servicio:  $3 \cdot 3 = 9 \text{ m}^2$ .

Área total =  $6,75 + 3 \cdot 13,5 + 11,25 + 33,75 + 9 = 101,25 \text{ m}^2$

087

La editorial SANTILIBRO va a lanzar una colección de novela de ciencia ficción. Los diseñadores gráficos quieren dar un aspecto innovador a esta colección y proponen variar, además del tipo de letra, el formato de los libros, siendo las páginas 5 cm más anchas que largas.



El equipo directivo, por su parte, ha propuesto tres opciones:

- Aumentar en 3 cm el ancho de la página.
- Aumentar en 3 cm el largo de la página.
- Aumentar en 3 cm las dos dimensiones.



Si se estima que el coste en tintas de una página impresa es de  $0,007 \text{ €/cm}^2$ , ¿qué diferencia de coste hay entre las cuatro propuestas?

Ancho habitual:  $x$ .      Largo habitual:  $y$ .      Área habitual:  $xy$ .  
 Área para 5 cm más de ancho:  $xy + 5y$ . Diferencia de coste:  $0,035y \text{ €}$ .  
 Área para 3 cm más de ancho:  $xy + 3y$ . Diferencia de coste:  $0,021y \text{ €}$ .  
 Área para 3 cm más de largo:  $xy + 3x$ . Diferencia de coste:  $0,021x \text{ €}$ .  
 Área para 3 cm más de ancho y 3 cm más largo:  $xy + 3x + 3y$ .  
 Diferencia de coste:  $0,021 \cdot (x + y) \text{ €}$ .

088

La constructora TORA ha adquirido un solar de forma cuadrada y han realizado un proyecto de urbanización que han presentado al ayuntamiento.

Según el reglamento de urbanismo han de ceder un terreno de 3 m de ancho a lo largo de uno de los lados del solar.



- ¿En cuánto disminuye la superficie del solar?
- ¿Qué gasto supone esto si inicialmente el solar les iba a reportar unos beneficios de  $422.000 \text{ €}$ ?

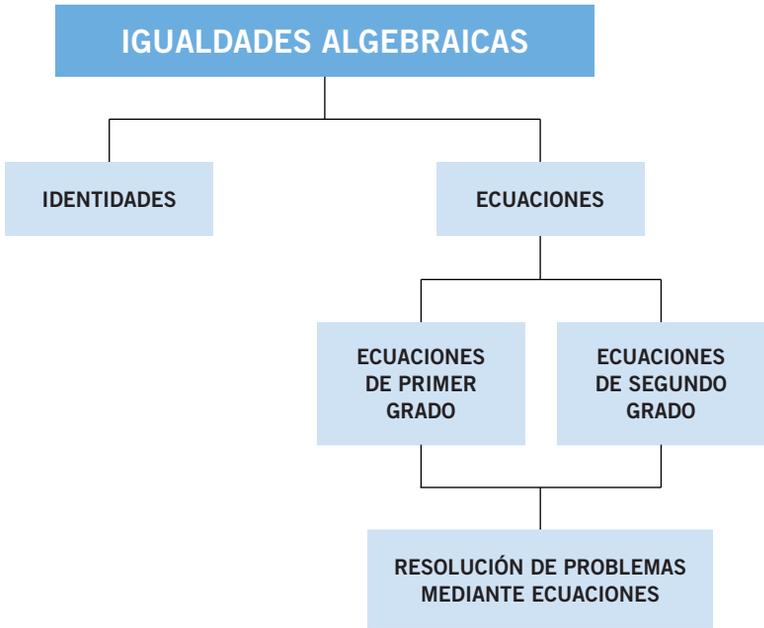
Consideramos que el lado es  $x$ .

a) La superficie disminuye en  $3x \text{ m}^2$ .

b) El beneficio por metro cuadrado es  $\frac{422.000}{x^2}$ ,

por lo que supondrá un gasto de:  $\frac{422.000}{x^2} \cdot 3x = \frac{1.266.000}{x} \text{ €}$ .

# Ecuaciones de primer y segundo grado



## París bien vale una misa

Cuando su primo Enrique III, el último de la dinastía Valois, lo nombró su sucesor, Enrique IV ya sabía que el camino al trono se hallaba sembrado de espinas.

Las guerras de religión habían dividido no solo a Francia sino a toda Europa, y aunque él había sido bautizado católicamente, fue educado en la doctrina de Calvino, y las sufrió en sus propias carnes. Todavía recordaba cómo, después de llevar cuatro años reinando en Francia, tuvo que abjurar de su fe y abrazar nuevamente la doctrina católica para que la Santa Liga de París lo aceptara como rey.

Las disputas de poder contra el católico Felipe II continuaban años después y, mientras leía la misiva que su secretario le había traído, Enrique IV se asombraba por el talento de François Viète para interpretar los mensajes cifrados que los españoles utilizaban para comunicarse entre ellos.

Cerró los ojos e intentó recordar alguna de las nociones de Álgebra que Viète logró hacerle comprender. Recordó así que usaba las consonantes, B, C, D..., para suplir las cantidades conocidas y las vocales, A, E, I..., para las desconocidas.

*¿Cómo escribiría Viète una ecuación de segundo grado?*

***Escogiendo como incógnita la letra A y usando valores diferentes para cada coeficiente, una ecuación de segundo grado sería:***

$$BA^2 + CA + D = 0$$



# Ecuaciones de primer y segundo grado

## EJERCICIOS

**001** Clasifica estas igualdades algebraicas en identidades y ecuaciones.

- a)  $2x + 1 = 11$       c)  $\frac{x}{2} = -8$       e)  $6x = 18$       g)  $x - 2 = 2x$   
b)  $x + x = 2x$       d)  $4x + 5 = 5 + 4x$       f)  $a^7 = a^2 \cdot a^5$       h)  $y + 1 = 1 + y$
- a) Ecuación      c) Ecuación      e) Ecuación      g) Ecuación  
b) Identidad      d) Identidad      f) Identidad      h) Identidad

**002** Comprueba si se cumplen las igualdades.

a)  $13 + x = 18$ , para  $x = 6$ .

b)  $3 \cdot x = -12$ , para  $x = -4$ .

a)  $13 + 6 = 19 \neq 18 \rightarrow$  No se cumple.

b)  $3 \cdot (-4) = -12 \rightarrow$  Sí se cumple.

**003** Calcula  $a$  para que la ecuación  $x^2 - 3x + a = 0$  se cumpla para  $x = 2$ .

$a = 2$

**004** Determina los miembros, los términos y el grado de estas ecuaciones.

- a)  $x + 3 = 10$       d)  $x - x^2 + 3 = 8 + x(5 - x)$   
b)  $4x - x = x + 8$       e)  $x^2(x - 3) + 5x^2 = x(1 + x^2)$   
c)  $x(x - 2) = 3 - 4(x + 2)$

a) Miembros:  $x + 3, 10$

Términos:  $x, 3, 10$

Grado: 1

b) Miembros:  $4x - x, x + 8$

Términos:  $4x, x, x, 8$

Grado: 1

c)  $x^2 - 2x = 3 - 4x - 8$

Miembros:  $x^2 - 2x, 3 - 4x - 8$

Términos:  $x^2, 2x, 3, 4x, 8$

Grado: 2

d)  $x - x^2 + 3 = 8 + 5x - x^2$

Miembros:  $x - x^2 + 3, 8 + 5x - x^2$

Términos:  $x, x^2, 3, 8, 5x, x^2$

Grado: 1

e)  $x^3 - 3x^2 + 5x^2 = x + x^3$

Miembros:  $x^3 - 3x^2 + 5x^2, x + x^3$

Términos:  $x^3, 3x^2, 5x^2, x, x^3$

Grado: 2

**005** ¿Cuáles de estos valores son solución de la ecuación  $x(x + 1) = 6$ ?

a)  $x = 2$

b)  $x = -2$

c)  $x = 3$

d)  $x = -3$

a)  $2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$  Es solución.

c)  $3 \cdot 4 \neq 6 \rightarrow$  No es solución.

b)  $(-2) \cdot (-1) \neq 6 \rightarrow$  No es solución.

d)  $(-3) \cdot (-2) = 6 \rightarrow$  Es solución.

**006** Calcula, probando valores, la solución.

a)  $x - 5 = 20$

b)  $-4 + x = -12$

a)  $x = 25$

b)  $x = -8$

**007** Resuelve estas ecuaciones utilizando la transposición de términos.

a)  $x + 4 = 12$

c)  $x - 3 = 8$

e)  $2x = 16$

g)  $5x = 25$

b)  $1 - x = 12$

d)  $-5 + x = -3$

f)  $7x = 49$

h)  $2x = 5$

a)  $x = 8$

c)  $x = 11$

e)  $x = 8$

g)  $x = 5$

b)  $x = -11$

d)  $x = 2$

f)  $x = 7$

h)  $x = \frac{5}{2}$

**008** Halla el valor de la incógnita.

a)  $-10 = -x + 3$

b)  $\frac{x}{4} = -8$

c)  $\frac{x}{-5} = 3$

a)  $x = 13$

b)  $x = -32$

c)  $x = -15$

**009** Calcula el valor de  $a$  para que la solución de  $x + a = 10$  sea 7.

$a = 3$

**010** Resuelve estas ecuaciones.

a)  $2x + 4 = 16$

e)  $5x - 5 = 25$

b)  $7x + 8 = 57$

f)  $3x + 4 = 2(x + 4)$

c)  $x + 2 = 16 - 6x$

g)  $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

d)  $x - 1 = 9 - x$

h)  $4(x - 2) + 1 + 3x = 5(x + 1)$

a)  $2x = 12 \rightarrow x = 6$

e)  $5x = 30 \rightarrow x = 6$

b)  $7x = 49 \rightarrow x = 7$

f)  $x = 4$

c)  $7x = 14 \rightarrow x = 2$

g)  $-4x = -4 \rightarrow x = 1$

d)  $2x = 10 \rightarrow x = 5$

h)  $2x = 12 \rightarrow x = 6$

**011** Resuelve.

a)  $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

b)  $5(x - 2) - (3 + x) = 3(x - 4)$

a)  $9x + 3 - x + 1 = 6x + 60 \rightarrow 2x = 56 \rightarrow x = 28$

b)  $5x - 10 - 3 - x = 3x - 12 \rightarrow x = 1$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

**012** Despeja  $x$  en  $x(a - 3) = a(8 - x) - 5(x + a)$ .

$$ax - 3x = 8a - ax - 5x - 5a \rightarrow 2ax + 2x = 3a \rightarrow x = \frac{3a}{2a + 2}$$

**013** Resuelve estas ecuaciones con denominadores.

a)  $\frac{x + 3}{4} = \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 4}{5}$                       c)  $-(x + 4) + \frac{x}{3} = -\frac{8x}{3}$

b)  $\frac{x + 6}{40} - \frac{1}{4} = \frac{x - 4}{3}$

a)  $\frac{x + 3}{4} = \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 4}{5} \rightarrow 5(x + 3) = 10(x + 1) + 4(x + 4) \rightarrow$   
 $\rightarrow 5x + 15 = 14x + 26 \rightarrow x = \frac{-11}{9}$

b)  $\frac{x + 6}{40} - \frac{1}{4} = \frac{x - 4}{3} \rightarrow 3(x + 6) - 30 = 40(x - 4) \rightarrow$   
 $\rightarrow 3x - 12 = 40x - 160 \rightarrow 37x = 148 \rightarrow x = \frac{148}{37}$

c)  $-(x + 4) + \frac{x}{3} = -\frac{8x}{3} \rightarrow -3(x + 4) + x = -8x \rightarrow$   
 $\rightarrow -2x - 12 = -8x \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$

**014** Resuelve estas ecuaciones.

a)  $\frac{2x - 1}{5} = 9$

b)  $\frac{x - 3}{12} = \frac{3x - 9}{10}$

a)  $2x - 1 = 45 \rightarrow x = 23$

b)  $10(x - 3) = 12(3x - 9) \rightarrow 10x - 30 = 36x - 108 \rightarrow 26x = 78 \rightarrow x = 3$

**015** Despeja  $x$  en la ecuación.

$$\frac{a(x - 3)}{12} = \frac{a(8 - x)}{3}$$

$$a(x - 3) = 4a(8 - x) \rightarrow ax - 3a = 32a - 4ax \rightarrow 5ax = 35a \rightarrow x = 7$$

**016** La suma de un número y el doble de ese número es 120.

¿De qué números se trata?

$$x + 2x = 120 \rightarrow x = 40. \text{ Los números son } 40 \text{ y } 80.$$

**017** El perímetro de un rectángulo es 400 m. Halla la longitud de sus lados, sabiendo que la base es 2 m mayor que la altura.

Altura:  $x$ , base:  $x + 2$

$$2x + 2(x + 2) = 400 \rightarrow x = 99 \rightarrow \text{Altura} = 99 \text{ m, base} = 101 \text{ m}$$

**018** El perímetro de un cuadrado es 60 cm. Calcula la longitud de cada lado.

Lado:  $x$

$$4x = 60 \rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

**019** Antonio tiene 4 € de paga semanal y se gasta 2,50 € cada semana. Si quiere comprarse un teléfono móvil que vale 54 €, ¿cuánto tardará en ahorrar lo suficiente?

Número de semanas que tarda en ahorrar:  $x$

Ahorro semanal:  $4 - 2,50 = 1,50 \text{ €}$

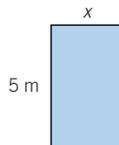
$$1,50x = 54 \rightarrow x = 36 \text{ semanas}$$

**020** Por cada día de retraso en el pago de una multa de tráfico se aumenta su coste en 3 €. Juan tiene una multa por aparcar en doble fila. ¿Cuántos días se ha retrasado en pagar si ha abonado 156 € en vez de 105 €?

Días de retraso:  $x$

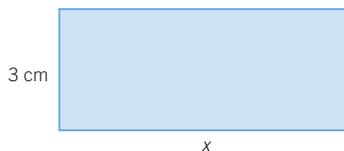
$$156 = 105 + 3x \rightarrow x = 17 \text{ días}$$

**021** En un rectángulo de base  $x$  y altura 5 m, sabemos que su perímetro es 16 m. Calcula la longitud de la base.



Como  $16 = 10 + 2x$ , la base  $x$  mide 3 m.

**022** Halla la base  $x$  de un rectángulo de altura 3 cm y perímetro 22 cm.



$$2x + 6 = 22 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

**023** En un zoológico hay el doble número de chimpancés que de gorilas. Si en total son 171 animales, ¿cuántos habrá de cada especie?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gorilas: } x \\ \text{Chimpancés: } 2x \end{array} \right\} \rightarrow 2x + x = 171 \rightarrow 3x = 171 \rightarrow x = 57$$

Hay 57 gorilas y 114 chimpancés.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

- 024** En una clase de 33 alumnos hay doble número de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?



$$\left. \begin{array}{l} \text{Chicos: } x \\ \text{Chicas: } 2x \end{array} \right\} \rightarrow 3x = 33 \rightarrow x = 11$$

Hay 11 chicos y 22 chicas.

- 025** La suma de dos números consecutivos impares es 156. ¿Qué números son?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Un número impar: } 2x + 1 \\ \text{Su consecutivo: } 2x + 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2x + 1 + 2x + 3 = 156 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = 38$$

Los números buscados son:

$$2x + 1 = 2 \cdot 38 + 1 = 76 + 1 = 77$$

$$2x + 3 = 2 \cdot 38 + 3 = 76 + 3 = 79$$

- 026** Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado, y determina sus coeficientes.

a)  $(x - 1)(x + 4) = 1$

e)  $3x^2 - 5x = 0$

b)  $x^2 - 5x + 2 = -x^2$

f)  $-x^2 - x - 1 = 0$

c)  $3x^2 - 5 = -2x^2 + x - 4$

g)  $(x - 2)3x = 4$

d)  $x(4x + 2) = 0$

a)  $x^2 + 3x - 5 = 0$  Coeficientes:  $a = 1$        $b = 3$        $c = -5$

b)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  Coeficientes:  $a = 2$        $b = -5$        $c = 2$

c)  $5x^2 - x - 1 = 0$  Coeficientes:  $a = 5$        $b = -1$        $c = -1$

d)  $4x^2 + 2x = 0$  Coeficientes:  $a = 4$        $b = 2$        $c = 0$

e)  $3x^2 - 5x = 0$  Coeficientes:  $a = 3$        $b = -5$        $c = 0$

f)  $-x^2 - x - 1 = 0$  Coeficientes:  $a = -1$        $b = -1$        $c = -1$

g)  $3x^2 - 6x - 4 = 0$  Coeficientes:  $a = 3$        $b = -6$        $c = -4$

- 027** Escribe una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes sean:

a)  $a = 4, b = -3, c = -2$

c)  $a = -1, b = 2, c = 0$

b)  $a = 6, b = 0, c = -3$

d)  $a = -1, b = 0, c = 0$

a)  $4x^2 - 3x - 2 = 0$

c)  $-x^2 + 2x = 0$

b)  $6x^2 - 3 = 0$

d)  $-x^2 = 0$

**028** Determina si estas ecuaciones son de segundo grado.

a)  $3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 + 2x$

c)  $(x - 2)(x + 1) = 0$

b)  $3x^2 - 2x^2 = 2x^2 + x$

d)  $x(x + 1) = x^2 + 2x$

a)  $-7x + 2 = 0 \rightarrow$  Primer grado

c)  $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$  Segundo grado

b)  $-x^2 - x = 0 \rightarrow$  Segundo grado

d)  $x = 0 \rightarrow$  Primer grado

**029** Resuelve estas ecuaciones.

a)  $x^2 - 36 = 0$

d)  $x^2 - 2x = 0$

b)  $x^2 + 16 = 0$

e)  $7x^2 + 21x = 0$

c)  $5x^2 - 320 = 0$

f)  $x(x - 4) = 0$

a)  $x_1 = 6, x_2 = -6$

d)  $x_1 = 0, x_2 = 2$

b) No hay solución.

e)  $x_1 = 0, x_2 = -3$

c)  $x_1 = 8, x_2 = -8$

f)  $x_1 = 0, x_2 = 4$

**030** Resuelve estas ecuaciones.

a)  $2x^2 = 72$

c)  $-2x^2 = 72x$

b)  $3x^2 = -27$

d)  $-3x^2 = -27x$

a)  $x_1 = 6, x_2 = -6$

c)  $x_1 = 0, x_2 = -36$

b) No hay solución.

d)  $x_1 = 0, x_2 = 9$

**031** Escribe una ecuación cuyas soluciones sean:

a)  $x_1 = 5, x_2 = -5$

b)  $x_1 = 0, x_2 = -2$

a)  $x^2 - 25 = 0$

b)  $x^2 + 2x = 0$

**032** Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $x^2 - 6x + 8 = 0$

d)  $-x^2 + 4x - 3 = 0$

b)  $2x^2 - x - 1 = 0$

e)  $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

c)  $3x^2 + 4x + 1 = 0$

a)  $x_1 = 2, x_2 = 4$

d)  $x_1 = 1, x_2 = 3$

b)  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

e)  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

c)  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$

**033** Calcula la solución de estas ecuaciones.

a)  $(x - 2)(x + 1) = 0$

b)  $x^2 + 2x = 15$

a)  $x_1 = 2, x_2 = -1$

b)  $x_1 = -5, x_2 = 3$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

- 034 En la ecuación  $x^2 + 3x + c = 0$ , obtén el valor de  $c$  sabiendo que sus soluciones son  $-1$  y  $-2$ .

$$c = x_1 \cdot x_2 = 2$$

## ACTIVIDADES

- 035 Indica si estas igualdades algebraicas son ciertas para  $x = 2$ .

• a)  $5x^2 - 3x + 7 = 21$

d)  $3x(2x - 4) - 1 = -1$

b)  $(x + 1)(x - 2) = 0$

e)  $(7x - 3)(-2) + x = 0$

c)  $\frac{4x - 3}{2} = \frac{1}{2}$

f)  $\frac{x + 1}{3} - \frac{x + 4}{2} = -2$

a) Verdadera

c) Falsa

e) Falsa

b) Verdadera

d) Verdadera

f) Verdadera

- 036 ¿Cuál de los siguientes valores hace cierta la igualdad  $\frac{x + 3}{2} = \frac{x}{4} - 1$ ?

• a)  $x = -1$

b)  $x = 2$

c)  $x = -10$

d)  $x = 12$

Es cierta con la opción c)  $x = -10$ .

- 037 Di cuáles de las igualdades algebraicas son identidades o ecuaciones.

• a)  $-3(2 - 5x) = 15x - 6$

d)  $2x = 10$

b)  $\frac{8}{3}x - x = \left(1 + \frac{2}{3}\right)x$

e)  $\frac{2x - 4}{2} = x - 2$

c)  $7x = 6x + x$

f)  $5(x - 2) = 5 - 2x$

a) Identidad

c) Identidad

e) Identidad

b) Ecuación

d) Ecuación

f) Ecuación

- 038 Escribe dos igualdades algebraicas que sean identidades y otras dos que sean ecuaciones.

Identidades:  $2x - 5 = -5 + 2x$ ;  $3x + 1 = 2x + x + 1$

Ecuaciones:  $2x = 6$ ;  $3x + 5 = 8$

- 039 Halla tres igualdades algebraicas que sean ciertas para estos valores.

•• a)  $x = 5$

c)  $x = -4$

b)  $x = \frac{3}{2}$

d)  $x = \frac{-4}{3}$

¿Podrías escribir una igualdad algebraica que se verifique únicamente para los cuatro valores a la vez? ¿Qué nombre recibe?

- a)  $2x = 10; x + 1 = 5; 3x - 2 = 13$
- b)  $2x = 3; 4x + 2 = 8; 6x - 3 = 6$
- c)  $x + 4 = 0; 3x + 1 = -11; 5 - 2x = 13$
- d)  $3x = -4; 9x + 8 = -4; 20 - 6x = 28$

La ecuación  $(x - 5) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 4) \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$  cumple esa condición.

**040 Encuentra el error y corrígelo.**

- a) La ecuación  $4x = 3$  se cumple para  $x = -1$  porque  $4 - 1 = 3$ .
- b) La ecuación  $4 - x = 3$  se cumple para  $x = -1$  porque  $4 - 1 = 3$ .

c) La ecuación  $\frac{x}{4} + 1 = 2$  es cierta para  $x = \frac{1}{4}$

porque  $\frac{1/4}{4} + 1 = 1 + 1 = 2$ .

- a) La ecuación  $4x = 3$  se cumple para  $x = \frac{3}{4}$  porque  $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ .
- b) La ecuación  $4 - x = 3$  se cumple para  $x = 1$  porque  $4 - 1 = 3$ .
- c) La ecuación  $\frac{x}{4} + 1 = 2$  es cierta para  $x = 4$  porque  $\frac{4}{4} + 1 = 2$ .

**041 Indica si la igualdad  $x^2 = -4$  se verifica para los siguientes valores de  $x$ .**

- a)  $x = 2$
- b)  $x = -2$
- c)  $x = 1$
- d)  $x = -1$
- e)  $x = 3$
- f)  $x = -3$

¿Puede existir algún valor de  $x$  que cumpla la ecuación?

No se verifica para ninguna de las opciones, ya que no tiene solución.

**042 Identifica los elementos de las ecuaciones.**

Ecuación	1.º miembro	2.º miembro	Incógnitas	Grado
$4x - 3 = 5$	$4x - 3$	5	$x$	1
$4(x - 3) = 5x$	$4(x - 3)$	$5x$	$x$	1
$8y - y = \frac{y + 2}{3}$	$8y - y$	$\frac{y + 2}{3}$	$y$	1
$3a - b = \frac{a}{5}$	$3a - b$	$\frac{a}{5}$	$a, b$	1
$z^2 - 4z + 3 = 0$	$z^2 - 4z + 3$	0	$z$	2
$x(x + 1) = x^2 + 9$	$x(x + 1)$	$x^2 + 9$	$x$	2
$x(3 - x) = x - 1$	$x(3 - x)$	$x - 1$	$x$	2

# Ecuaciones de primer y segundo grado

**043** Escribe una ecuación para estos enunciados.



- a) El doble de un número es 8.
- b) El triple de un número es 12.
- c) La mitad de un número es 10.
- d) La tercera parte de un número es 2.
- e) El doble de un número más 3 es 8.
- f) La mitad de un número menos 5 es 120.
- g) La cuarta parte de un número menos 6 es 7.
- h) El doble de un número más 7 es 18.
- i) La diferencia entre el cuádruple de un número menos 10 es 24.

a)  $2x = 8$

d)  $\frac{x}{3} = 2$

g)  $\frac{x}{4} - 6 = 7$

b)  $3x = 12$

e)  $2x + 3 = 8$

h)  $2x + 7 = 18$

c)  $\frac{x}{2} = 10$

f)  $\frac{x}{2} - 5 = 120$

i)  $4x - 10 = 24$

**044** Asigna una ecuación a cada enunciado.



- a) El cuadrado de un número es 100.
- b) El cubo de un número es 125.
- c) La suma del cuadrado de un número más 2 es 82.
- d) La diferencia del cubo de un número menos 3 es 124.
- e) La mitad del cuadrado de un número es 8.
- f) La quinta parte del cubo de un número es 310.

a)  $x^2 = 100$

c)  $x^2 + 2 = 82$

e)  $\frac{x^2}{2} = 8$

b)  $x^3 = 125$

d)  $x^3 - 3 = 124$

f)  $\frac{x^3}{5} = 310$

**045** Escribe los enunciados correspondientes a estas ecuaciones.



- a)  $2x + 5 = 3$
- c)  $2(x + 1) = 10$
- e)  $x^2 - 1 = 8$
- g)  $\frac{x - 4}{2} = 1$
- b)  $7 - x = 2$
- d)  $\frac{x^2}{2} = 3$
- f)  $3(x - 2) = 9$
- h)  $\frac{x + 6}{3} = 2$

- a) El doble de un número más 5 es 3.
- b) El número 7 menos un número es 2.
- c) El doble de la suma de un número más 1 es 10.
- d) La mitad del cuadrado de un número es 3.
- e) El cuadrado de un número menos 1 es 8.
- f) El triple de la diferencia de un número menos 2 es 9.
- g) La mitad de la diferencia de un número menos 4 es 1.
- h) La tercera parte de la suma de un número más 6 es 2.

- 046 Simplifica estas ecuaciones reduciendo términos semejantes, tal como se indica en el ejemplo.

$$\begin{array}{r} 3x + 4 - 7x + 5 - x = -3 \\ -5x + 9 = -3 \\ -5x + 9 + 3 = 0 \\ -5x + 12 = 0 \end{array}$$

a)  $5(x - 6) + 2(-3x - 7) = 2(3x + 5)$

b)  $4x + 5 - x = 10x + 7 - x$

c)  $7 - 10x + 3(x^2 - 9x) = x - 8$

d)  $8 + \frac{7}{3}(x - 3) - x^2 + x = \frac{5}{4}$

e)  $-2(2x + 4) - x(x + 3) = 5 - 3x$

a)  $5x - 30 - 6x - 14 = 6x + 10 \rightarrow -7x - 54 = 0$

b)  $-6x - 2 = 0 \rightarrow 6x + 2 = 0$

c)  $7 - 10x + 3x^2 - 27x = x - 8 \rightarrow 3x^2 - 38x + 15 = 0$

d)  $96 + 28x - 84 - 12x^2 + 12x = 15 \rightarrow -12x^2 + 40x - 3 = 0$

e)  $-4x - 8 - x^2 - 3x = 5 - 3x \rightarrow -x^2 - 4x - 13 = 0$

- 047 Corrige los errores cometidos al reducir términos semejantes de estas ecuaciones.

a) 
$$\begin{array}{r} 7x - (2 - x) = 3x + 1 \\ 7x - 2 - x = 3x + 1 \\ 7x - x - 3x - 2 + 1 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{array}$$

c) 
$$\begin{array}{r} 5 - (x - 3) = x - (-7) \\ 5 + 7 - x - 3 - x = 0 \\ -2x + 9 = 0 \end{array}$$

b) 
$$\begin{array}{r} 8(2 - x) - x = x \\ 16 - 8x - x = x \\ 8x - x - x + 16 = 0 \\ 6x + 16 = 0 \end{array}$$

a) 
$$\begin{array}{r} 7x - (2 - x) = 3x + 1 \\ 7x - 2 + x = 3x + 1 \\ 7x + x - 3x - 2 - 1 = 0 \\ 5x - 3 = 0 \end{array}$$

c) 
$$\begin{array}{r} 5 - (x - 3) = x - (-7) \\ 5 - 7 - x + 3 - x = 0 \\ -2x + 1 = 0 \end{array}$$

b) 
$$\begin{array}{r} 8(2 - x) - x = x \\ 16 - 8x - x = x \\ -8x - x - x + 16 = 0 \\ -10x + 16 = 0 \end{array}$$

- 048 Averigua cuáles de las ecuaciones son equivalentes a la ecuación  $x = 4$ .

a)  $2x = 8$

c)  $4x = 12$

e)  $-2x = 8$

b)  $3x = 9$

d)  $-x = -4$

f)  $-3x = -12$

a) Equivalente

c) No equivalente

e) No equivalente

b) No equivalente

d) Equivalente

f) Equivalente

# Ecuaciones de primer y segundo grado

**049** Resuelve estas ecuaciones.

- a)  $x + 2 = 7$
  - b)  $x - 3 = 15$
  - c)  $x + 13 = 21$
  - d)  $x - 7 = 2$
  - e)  $x + 11 = 3$
  - f)  $x - 17 = 17$
  - g)  $x + \frac{6}{2} = 11$
  - h)  $x - 9 = -16$
  - i)  $4x = 20$
  - j)  $13x = 91$
  - k)  $\frac{x}{4} = 5$
  - l)  $-x = 3$
  - m)  $-7x = 21$
  - n)  $-12x = 60$
  - ñ)  $6x = 18$
  - o)  $-3x = 21$
- a)  $x = 7 - 2 = 5$
- b)  $x = 15 + 3 = 18$
- c)  $x = 21 - 13 = 8$
- d)  $x = 2 + 7 = 9$
- e)  $x = 3 - 11 = -8$
- f)  $x = 17 + 17 = 34$
- g)  $x = 11 - \frac{6}{2} \rightarrow x = 8$
- h)  $x = -16 + 9 = -7$
- i)  $x = 5$
- j)  $x = 7$
- k)  $x = 20$
- l)  $x = -3$
- m)  $x = -3$
- n)  $x = -5$
- ñ)  $x = 3$
- o)  $x = -7$

**050** Resuelve estas ecuaciones.

- a)  $\frac{2x}{20} = 5$
  - b)  $\frac{9x}{6} = 27$
  - c)  $\frac{4x}{2} = 82$
  - d)  $\frac{3x}{6} = 9$
- a)  $2x = 5 \cdot 20 \rightarrow 2x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{2} = 50$
- b)  $9x = 27 \cdot 6 \rightarrow 9x = 162 \rightarrow x = \frac{162}{9} = 18$
- c)  $4x = 82 \cdot 2 \rightarrow 4x = 164 \rightarrow x = \frac{164}{4} = 41$
- d)  $3x = 9 \cdot 6 \rightarrow 3x = 54 \rightarrow x = \frac{54}{3} = 18$

**051** Halla la solución de las ecuaciones.

- a)  $-5x = 45$
- b)  $6x = -36$
- c)  $3x = 2$
- d)  $8x = 48$
- e)  $-12x = -72$
- f)  $\frac{x}{-3} = 8$
- g)  $\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$
- h)  $\frac{x}{15} = 1$
- i)  $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$
- j)  $x + 4 + x = 18 + 3$
- k)  $x + 3x + 4x = 8$
- l)  $5x - 2 + 2x = 6x + 8$
- m)  $4x + 3x - 2x = 45$
- n)  $-x + 4x - 3 = 5 - 2x$

a)  $x = \frac{45}{-5} = -9$

h)  $x = 15$

b)  $x = \frac{-36}{6} = -6$

i)  $2x = 4 \rightarrow x = 2$

c)  $x = \frac{2}{3}$

j)  $2x + 4 = 21 \rightarrow 2x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{2}$

d)  $x = \frac{48}{8} = 6$

k)  $8x = 8 \rightarrow x = 1$

l)  $7x - 2 = 6x + 8 \rightarrow x = 10$

e)  $x = 6$

m)  $5x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{5} = 9$

f)  $x = 8 \cdot (-3) = -24$

n)  $5x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{5}$

g)  $4x = 4 \rightarrow x = 1$

**052** Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a)  $2x - 10 = 0$

b)  $5x + 4 = x - 8$

c)  $x + 2(x - 1) = 4$

d)  $2(3x - 5) - x - (2x - 3) = 1 - (2x - 5)$

e)  $7(x + 2) + 4(x + 3) = 3x + 1$

f)  $3(x - 3) - 4(2 - 3x) = 2(1 - 2x)$

a)  $x = 5$

d)  $x = \frac{13}{5}$

b)  $x = -3$

e)  $x = \frac{-25}{8}$

c)  $x = 2$

f)  $x = 1$

**053** Obtén la solución de estas ecuaciones de primer grado.

a)  $4x + 1 + 3x - 5 = 2(x - 2) + 30$

b)  $3(x + 8) = 6(x - 2) + 24$

c)  $3(x + 8) - (x - 4) = 12$

d)  $2(4 - x) + 3(4x + 16) = 3$

e)  $6(x + 8) - 2(x - 4) = 24$

f)  $6(x - 2) = 3(x + 8) - 24$

a)  $7x - 4 = 2x - 4 + 30 \rightarrow 7x - 2x = -4 + 30 + 4 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

b)  $3x + 24 = 6x - 12 + 24 \rightarrow 3x - 6x = -12 + 24 - 24 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = 4$

c)  $3x + 24 - x + 4 = 12 \rightarrow 2x = 12 - 24 - 4 \rightarrow 2x = -16 \rightarrow x = -8$

d)  $8 - 2x + 12x + 48 = 3 \rightarrow 10x = 3 - 8 - 48 \rightarrow 10x = -53 \rightarrow x = \frac{-53}{10}$

e)  $6x + 48 - 2x + 8 = 24 \rightarrow 4x = 24 - 48 - 8 \rightarrow 4x = -32 \rightarrow x = -8$

f)  $6x - 12 = 3x + 24 - 24 \rightarrow 6x - 3x = 24 - 24 + 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

054

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a)  $\frac{5-x}{7} = 1$

e)  $\frac{3x+8}{4} = x$

b)  $\frac{x-8}{6} = 3$

f)  $\frac{3x}{2} - 25 = x - 20$

c)  $\frac{x+5}{6} = 4$

g)  $\frac{x+4}{5} - 1 = \frac{x}{2} - x$

d)  $\frac{4x-8}{-2} = 2$

h)  $\frac{3x}{5} - 9 = \frac{2x}{6} - 7$

a)  $x = -2$

f)  $x = 10$

b)  $x = 26$

g)  $x = \frac{2}{7}$

c)  $x = 19$

h)  $x = \frac{15}{2}$

d)  $x = 1$

e)  $x = 8$

055

Halla la solución de las ecuaciones.

a)  $\frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = \frac{x}{15} + 13$

c)  $\frac{3x-4}{4} = x-3$

b)  $\frac{x}{2} - x = \frac{x+4}{5} - 1$

d)  $\frac{x}{3} - 7 = \frac{3x}{5} - 9$

a)  $\frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = \frac{x}{15} + 13 \rightarrow 12x + 3x = 2x + 195 \rightarrow 13x = 195 \rightarrow x = 15$

b)  $\frac{x}{2} - x = \frac{x+4}{5} - 1 \rightarrow 5x - 10x = 2x + 8 - 10 \rightarrow 7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

c)  $\frac{3x-4}{4} = x-3 \rightarrow 3x-4 = 4x-12 \rightarrow x = 8$

d)  $\frac{x}{3} - 7 = \frac{3x}{5} - 9 \rightarrow 5x - 105 = 9x - 135 \rightarrow 4x = 30 \rightarrow x = \frac{15}{2}$

056

Resuelve las ecuaciones.

a)  $\frac{x+8}{2} = \frac{x-4}{6} + 2$

b)  $\frac{x-5}{5} + \frac{8-x}{2} = 3 - \frac{2x-10}{2}$

c)  $\frac{x-10}{2} - 5 = \frac{x-20}{4} + \frac{x-30}{3}$

d)  $-\frac{3x-12}{4} = -1 - \frac{2x-10}{3}$

$$a) \frac{x+8}{2} = \frac{x-4}{6} + 2 \rightarrow 3x+24 = x-4+12 \rightarrow x = -8$$

$$b) \frac{x-5}{5} + \frac{8-x}{2} = 3 - \frac{2x-10}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x-10+40-5x = 30-10x+50 \rightarrow x = \frac{50}{7}$$

$$c) \frac{x-10}{2} - 5 = \frac{x-20}{4} + \frac{x-30}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x-60-60 = 3x-60+4x-120 \rightarrow x = 60$$

$$d) -\frac{3x-12}{4} = -1 - \frac{2x-10}{3} \rightarrow -9x+36 = -12-8x+40 \rightarrow x = 8$$

**057** Obtén la solución de las siguientes ecuaciones.

$$a) \frac{4x+3}{5} - \frac{x-2}{4} = 2 - \frac{x+3}{6}$$

$$c) x - \frac{2-x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{3}$$

$$b) \frac{13-2x}{6} + \frac{5x-2}{4} = 1 - \frac{x+1}{12}$$

$$d) \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = \frac{4-2x}{5}$$

$$a) \frac{4x+3}{5} - \frac{x-2}{4} = 2 - \frac{x+3}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow 48x+36-15x+30 = 120-10x-30 \rightarrow x = \frac{24}{43}$$

$$b) \frac{13-2x}{6} + \frac{5x-2}{4} = 1 - \frac{x+1}{12} \rightarrow$$

$$\rightarrow 26-4x+15x-6 = 12-x-1 \rightarrow x = \frac{9}{10}$$

$$c) x - \frac{2-x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{3} \rightarrow 6x-2+2x = 9-2x-2 \rightarrow x = \frac{9}{10}$$

$$d) \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = \frac{4-2x}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x-20-15x+45 = 24-12x \rightarrow x = \frac{-1}{7}$$

**058** Resuelve estas ecuaciones.

$$a) y + 2 = 3y - 4$$

$$d) 6 + 5t = (7 - t)(-2)$$

$$b) \frac{z}{2} + 1 = \frac{4z}{3} - 2$$

$$e) \frac{v+3}{2} - \frac{v}{3} = 4$$

$$c) 3u = u + 4$$

$$f) 1 - (4w - 7) = (1 - w)(-1)$$

$$a) y = 3$$

$$c) u = 2$$

$$e) v = 15$$

$$b) z = \frac{18}{5}$$

$$d) t = \frac{-20}{7}$$

$$f) w = \frac{9}{5}$$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

059

Corrige los errores cometidos en la resolución de la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(x-2) - \frac{2}{3}(2x+6) + x &= -4 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{4x+12}{3} + x &= -4 \\ \frac{3x-2-32x+96+x}{24} &= \frac{-4}{24} \\ 3x-32x+x &= -4+96-2 \\ 7x &= 90 \\ x &= \frac{90}{27} = \frac{45}{14} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8}(x-2) - \frac{2}{3}(2x+6) + x = -4$$

$$\frac{x-2}{8} - \frac{4x+12}{3} + x = -4$$

$$\frac{3x-6-32x-96+24x}{24} = \frac{-96}{24}$$

$$3x-32x+24x = -96+96+6$$

$$5x = -6$$

$$x = \frac{-6}{5}$$

060

Identifica cuáles de estas ecuaciones son de segundo grado.

a)  $x(x+2) = 0$

b)  $x^2 - 3(x-5) = 3x - 4$

c)  $5 + x + x^2 = -30 + x^2$

d)  $\frac{x^2+8}{3} = \frac{x}{4}(2+x)$

e)  $(x+1)^2 + x^2 = 5x$

f)  $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 8$

a) Segundo grado

b) Segundo grado

c) Primer grado

d) Segundo grado

e) Segundo grado

f) Primer grado

**061** Expresa estas ecuaciones de segundo grado de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , e identifica los términos  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

a)  $\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{3} = 0$

b)  $5(x - 3)^2 = 2$

c)  $x^2 - x(2x + 4) + 7 = 6$

d)  $3x(2x - 6) - x(x - 5) = 9$

a)  $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{1}{3}$

b)  $5x^2 - 30x + 43 = 0 \rightarrow a = 5, b = -30, c = 43$

c)  $-x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow a = -1, b = -4, c = 1$

d)  $5x^2 - 13x - 9 = 0 \rightarrow a = 5, b = -13, c = -9$

**062** Expresa la forma general de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a)  $(x + 3)(x - 5) = 3$

c)  $-5x^2 - 3x + 9 = -x^2 - 7x + 11$

b)  $2x^2 - 5x = -4x^2 - x + 8$

d)  $-4x(7 - 3x) = 0$

a)  $x^2 - 2x - 18 = 0$

c)  $4x^2 - 4x + 2 = 0$

b)  $6x^2 - 4x - 8 = 0$

d)  $12x^2 - 28x = 0$

**063** Escribe las ecuaciones de segundo grado cuyos coeficientes son:

a)  $a = -1$     $b = 2$     $c = -3$

b)  $a = 3$     $b = 0$     $c = 9$

c)  $a = 4$     $b = 2$     $c = 0$

d)  $a = \frac{1}{2}$     $b = \frac{2}{3}$     $c = \frac{-1}{5}$

a)  $-x^2 + 2x - 3 = 0$

c)  $4x^2 + 2x = 0$

b)  $3x^2 + 9 = 0$

d)  $\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{5} = 0$

**064** Halla la solución de las ecuaciones.

a)  $4x^2 - 16 = 0$

c)  $3x^2 - 75 = 0$

e)  $8x^2 - 8 = 0$

g)  $16x^2 = 9$

b)  $5x^2 = 45$

d)  $4x^2 = 64$

f)  $9x^2 = 900$

h)  $x^2 = \frac{25}{4}$

a)  $x_1 = 2, x_2 = -2$

e)  $x_1 = 1, x_2 = -1$

b)  $x_1 = 3, x_2 = -3$

f)  $x_1 = 10, x_2 = -10$

c)  $x_1 = 5, x_2 = -5$

g)  $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{3}{4}$

d)  $x_1 = 4, x_2 = -4$

h)  $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

**065** Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $x^2 - x = 0$

e)  $9x = 18x^2$

b)  $5x^2 + 10x = 0$

f)  $6x - 10x^2 = 0$

c)  $7x - 21x^2 = 0$

g)  $4x^2 = 9x$

d)  $2x^2 = 16x$

h)  $5x^2 + 3x = 0$

a)  $x_1 = 0, x_2 = 1$

e)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

b)  $x_1 = 0, x_2 = -2$

f)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{5}$

c)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$

g)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{9}{4}$

d)  $x_1 = 0, x_2 = 8$

h)  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{5}$

**066** Resuelve estas ecuaciones de segundo grado completas, aplicando la fórmula general.

a)  $7x^2 + 21x - 28 = 0$

c)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

b)  $2x^2 - 3x - 5 = 0$

d)  $x^2 + x - 20 = 0$

a)  $x_1 = -4, x_2 = 1$

c)  $x_1 = -3, x_2 = -1$

b)  $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$

d)  $x_1 = -5, x_2 = 4$

**067** Obtén la solución de las ecuaciones.

a)  $x^2 - 3x = x - 2$

e)  $2x^2 - 7x + 3 = 0$

b)  $x^2 - 2x = -1$

f)  $6x^2 = 5x - 1$

c)  $x^2 + 5 = 6x$

g)  $3x^2 - 1 = -2x$

d)  $x - 12 = -x^2$

h)  $5x = 3 - 2x^2$

a)  $x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}, x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$

b)  $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$

c)  $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1$

d)  $x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3$

e)  $2x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}$

f)  $6x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

g)  $3x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{-1}{3}$

h)  $2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{-1}{2}$

## 068 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN LAS ECUACIONES EN LAS QUE UN PRODUCTO ES IGUAL A UN NÚMERO?

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $(3x - 1)(4x + 2) = 0$

b)  $(x - 1)(x + 2) = -2$

a) Cuando el número es 0.

**PRIMERO.** Se iguala a cero cada uno de los factores.

$$(3x - 1)(4x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} (3x - 1) = 0 \\ (4x + 2) = 0 \end{cases}$$

**SEGUNDO.** Se resuelve cada una de las ecuaciones de primer grado. Estas serán las soluciones de la ecuación de segundo grado.

$$3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) Cuando el producto es igual a un número distinto de 0.

**PRIMERO.** Se realiza el producto y se agrupan los términos en el mismo miembro.

$$(x - 1) \cdot (x + 2) = -2$$

$$x^2 + 2x - x - 2 = -2$$

$$x^2 + x = 0$$

**SEGUNDO.** Se resuelve la ecuación de segundo grado resultante.

$$x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

## 069 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $x(x - 3) = 0$

b)  $(x - 5)(3x + 9) = 0$

c)  $(7x + 1)(4x - 3) + 3 = 3$

d)  $(x + 4)(x - 5) = -14$

e)  $(5x + 3)\left(x - \frac{1}{5}\right) + 2 = 3$

f)  $(x + 3)(x + 3) = 0$

g)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

a)  $x_1 = 0, x_2 = 3$

b)  $x_1 = 5, x_2 = -3$

c)  $x_1 = -\frac{1}{7}, x_2 = \frac{3}{4}$

d)  $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$

e)  $25x^2 + 10x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{4}{5}, x_2 = \frac{2}{5}$

f)  $x_1 = -3, x_2 = -3$

g)  $x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

## 070 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES DEL TIPO  $(ax + b)^2 = n$ ?

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $(x - 2)^2 = -9$

b)  $(x - 2)^2 = 9$

a) Cuando el término de la derecha es negativo, la ecuación no tiene solución. No existe ningún número que elevado al cuadrado sea un número negativo.

b) Cuando el término de la derecha es mayor o igual que 0 se procede de esta manera:

**PRIMERO.** Se calcula la raíz cuadrada en los dos miembros, teniendo en cuenta el signo positivo y negativo de su resultado.

$$(x - 2)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{9} \rightarrow x - 2 = \pm 3$$

**SEGUNDO.** Se resuelve cada una de las ecuaciones de primer grado que resultan.

$$x - 2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \rightarrow x_1 = 5 \\ x - 2 = -3 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

## 071 Halla la solución de las ecuaciones.



a)  $(3x + 4)^2 = 0$

d)  $(5x - 8)^2 = 0$

b)  $\left(9x + \frac{3}{7}\right)^2 = 0$

e)  $(4x - 2)^2 = 4$

c)  $(x + 3)^2 = 64$

f)  $(3x - 2)^2 = 8$

a)  $x_1 = x_2 = \frac{-4}{3}$

b)  $x_1 = x_2 = \frac{-1}{21}$

c)  $x + 3 = \pm 8 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -11$

d)  $x_1 = x_2 = \frac{8}{5}$

e)  $4x - 2 = \pm 2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$

f)  $3x - 2 = \pm\sqrt{8} \rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{3}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{3}$

## 072 Escribe una ecuación de segundo grado con estas soluciones.



a) 0 y -3

b) 5 y -5

c) 0 y 2

d) 8 y 3

a)  $x^2 + 3x = 0$

b)  $x^2 - 25 = 0$

c)  $x^2 - 2x = 0$

d)  $x^2 - 11x + 24 = 0$

**073** Resuelve las ecuaciones.

a)  $\frac{x^2 - 1}{3} = \frac{(x - 1)^2}{2}$

b)  $\frac{3x^2 - 33}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

c)  $\frac{(x + 4)(2x - 1)}{7} = 0$

a)  $2x^2 - 2 = 3x^2 - 6x + 3 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$

b)  $21x^2 - 231 - 10x^2 + 600 = 1.260 \rightarrow 11x^2 = 891 \rightarrow x_1 = 9, x_2 = -9$

c)  $(x + 4)(2x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{2}$

**074** Calcula el número tal que si le sumamos 2 nos da 10.

Si llamamos al número  $x$ , le sumamos 2, y es igual a 10:

$$x + 2 = 10 \rightarrow x = 8$$

**075** Obtén el número cuyo doble más su triple suman 35.

Si llamamos al número  $x$ , su doble es  $2x$  y su triple es  $3x$ , y han de sumar 35:

$$2x + 3x = 35 \rightarrow 5x = 35 \rightarrow x = 7$$

**076** Determina un número, de forma que la suma de su triple y cuatro veces el número sea 21.

Si llamamos al número  $x$ , su triple es  $3x$ , y cuatro veces el número es  $4x$ , y han de sumar 21:

$$3x + 4x = 21 \rightarrow 7x = 21 \rightarrow x = 3$$

**077** Escribe en lenguaje algebraico los enunciados y resuélvelos.

a) La suma de dos números consecutivos es 63.

b) La suma de dos números pares consecutivos es 126.

c) El doble de un número y su mitad suman 10.

d) El doble de la suma de un número más 7 es 18.

e) El triple de un número menos 8 es 40.

f) Un número menos su quinta parte es 80.

a)  $x + x + 1 = 63 \rightarrow x = 31$   
Los números son 31 y 32.

d)  $2(x + 7) = 18 \rightarrow x = 2$   
El número es 2.

b)  $x + x + 2 = 126 \rightarrow x = 62$   
Los números son 62 y 64.

e)  $3x - 8 = 40 \rightarrow x = 16$   
El número es 16.

c)  $2x + \frac{x}{2} = 10 \rightarrow x = 4$   
El número es 4.

f)  $x - \frac{x}{5} = 80 \rightarrow x = 100$   
El número es 100.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

- 078** ●● La suma de dos números es 55 y uno de ellos es la cuarta parte del otro. Halla los números.

Primer número:  $x$

Segundo número:  $\frac{x}{4}$

$$x + \frac{x}{4} = 55 \rightarrow x = 44$$

Los números son 44 y 11.

- 079** ●● Encuentra dos números sabiendo que su suma es 20 y se diferencian en 6 unidades.

Primer número:  $x$

Segundo número:  $x - 6$

$$x + x - 6 = 20$$

$$x = 13$$

Los números son 13 y 7.

- 080** ●● La suma de tres números es 330. El primero es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcula dichos números.

Tercer número:  $x$

Segundo número:  $3x$

Primer número:  $6x$

$$x + 3x + 6x = 330$$

$$x = 33$$

Los números son 33, 99 y 198.

- 081** ●● Un trayecto en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada kilómetro. Si pagamos 13 €, ¿qué distancia hemos recorrido?

Distancia (en km):  $x$

$$2,50 + 1,50x = 13$$

$$x = 7$$

Hemos recorrido 7 km.

- 082** ●● En el zoológico hay el doble de tigres que de panteras, y sabemos que en total son 171 animales. Determina cuántos hay de cada especie.

Panteras:  $x$

Tigres:  $2x$

$$2x + x = 171$$

$$x = 57$$

Hay 57 panteras y 114 tigres.



- 083** ●● Carlos, David y Sergio han ganado 3.200 € que van a repartir así: Carlos tendrá 200 € menos que Sergio, y David 200 € menos que Carlos. Calcula el dinero de cada uno.

Carlos:  $x - 200$

David:  $(x - 200) - 200$

Sergio:  $x$

$$\begin{aligned} x - 200 + x - 400 + x &= 3.200 \rightarrow 3x - 600 = 3.200 \rightarrow \\ &\rightarrow 3x = 3.800 \rightarrow x = 1.266,\overline{6} \end{aligned}$$

Carlos: 1.066 € y 67 céntimos

David: 866 € y 67 céntimos

Sergio: 1.266 € y 67 céntimos

- 084** ●● En una clase hay  $\frac{3}{7}$  partes de chicos y las chicas son 16. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

$$\text{Alumnos: } x \qquad \text{Chicos: } \frac{3x}{7} \qquad \text{Chicas: } \frac{4x}{7} = 16$$

$$\frac{4x}{7} = 16 \rightarrow x = 28 \text{ alumnos}$$

$$\text{El número de chicos es: } \frac{3}{7} \cdot 28 = 12 \text{ chicos.}$$

- 085** ●● Juan realiza la cuarta parte de un viaje en autobús, la sexta parte en moto, tres octavas partes en bicicleta, y los últimos 40 km andando.

a) ¿Qué distancia recorrió en total?

b) ¿Qué distancia ha recorrido en cada medio de transporte?



Recorrido total:  $x$

$$\text{En autobús: } \frac{x}{4} \qquad \text{En moto: } \frac{x}{6} \qquad \text{En bicicleta: } \frac{3x}{8} \qquad \text{Andando: } 40 \text{ km}$$

$$\text{a) } 40 = x - \left( \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{3x}{8} \right) \rightarrow 960 = 24x - 19x \rightarrow x = 192 \text{ km}$$

$$\begin{aligned} \text{b) En autobús: } &48 \text{ km} & \text{En bicicleta: } &72 \text{ km} \\ \text{En moto: } &32 \text{ km} & \text{Andando: } &40 \text{ km} \end{aligned}$$

# Ecuaciones de primer y segundo grado

086



Luis tiene 92 monedas de 1, 2 y 5 céntimos. Calcula cuántas monedas tiene de cada tipo si las monedas de 1 céntimo son la tercera parte de las de 5 céntimos, y estas son el quintuplo de las monedas de 2 céntimos.

Monedas de 5 céntimos:  $x$

Monedas de 2 céntimos:  $\frac{x}{5}$

Monedas de 1 céntimo:  $\frac{x}{3}$

$$x + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 92 \rightarrow 15x + 3x + 5x = 1.380 \rightarrow x = 60$$

Monedas de 5 céntimos: 60

Monedas de 2 céntimos: 12

Monedas de 1 céntimo: 20

087



María se entrena aumentando el recorrido del día anterior en 1 km. Al cabo de siete días, el recorrido total que ha hecho es de 42 km. ¿Cuánto ha entrenado el último día?

Día 1:  $x$                       Día 5:  $x + 4$

Día 2:  $x + 1$                   Día 6:  $x + 5$

Día 3:  $x + 2$                   Día 7:  $x + 6$

Día 4:  $x + 3$

Total:  $7x + 21$

$$7x + 21 = 42$$

$$x = 3$$

El último día entrenó:  $3 + 6 = 9$  km.

088



Un bebé gana durante su primer mes de vida la quinta parte de su peso, y en el segundo mes aumenta las cuatro quintas partes del peso que aumentó en el mes anterior. Si al acabar el segundo mes pesa 5.450 g, ¿cuánto pesó al nacer?



Peso al nacer:  $x$

$$\left. \begin{array}{l} \text{El 1.}^{\text{er}} \text{ mes ganó: } \frac{x}{5} \\ \text{El 2.}^{\text{o}} \text{ mes ganó: } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{x}{5} \end{array} \right\} \rightarrow x + \frac{x}{5} + \frac{4x}{25} = 5.450$$

$$25x + 25 \cdot \frac{x}{5} + 25 \cdot \frac{4x}{25} = 25 \cdot 5.450 \rightarrow 25x + 5x + 4x = 136.250 \rightarrow$$

$$\rightarrow 34x = 136.250 \rightarrow x = \frac{136.250}{34} = 4.007,4 \text{ g}$$

El bebé pesó al nacer 4.007,4 g.

089

Preguntamos la hora y nos contestan de la siguiente manera: «Lo que queda de día es igual a 7 veces la quinta parte de las horas que han transcurrido». ¿Qué hora es?

$$\left. \begin{array}{l} x: \text{ lo que queda del día} \\ 24 - x: \text{ lo que ha transcurrido del día} \end{array} \right\} \rightarrow x = 7 \cdot \frac{24 - x}{5}$$

$$5x = 7(24 - x) \rightarrow 5x = 168 - 7x \rightarrow 12x = 168 \rightarrow x = 14 \text{ horas}$$

Por tanto, son las 10 de la mañana.

090

Averigua mi edad si tengo el triple de la edad que tenía hace 8 años.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Edad actual: } x \\ \text{Edad hace 8 años: } 3(x - 8) \end{array} \right\} \rightarrow = 3(x - 8)$$

$$x = 3x - 24 \rightarrow 2x = 24$$

Actualmente tengo 12 años.

091

Una madre tiene 36 años y las edades de sus tres hijos suman 18 años.

a) ¿Cuántos años tienen que pasar para que sumen la edad de la madre?

b) ¿Y para que sumen el doble de su edad?

a) Años que tienen que pasar:  $x$

$$36 = 18 + 3x$$

$$x = 6$$

Tienen que pasar 6 años.

b) Años que tienen que pasar:  $x$

$$72 = 18 + 3x$$

$$x = 18$$

Tienen que pasar 18 años.

092

Lola tiene ahorradas monedas de 50 céntimos y las cambia por monedas de 1 euro.

Tras el cambio, tiene 80 monedas menos.

a) ¿Cuánto dinero tiene Lola?

b) Si tuviese 120 monedas menos que al principio, ¿cuánto dinero tendría que cambiar?

c) ¿Y si las monedas fuesen de 20 céntimos y al cambiarlas obtuviese 60 monedas menos?



a) Monedas de 50 céntimos:  $x$

$$\text{Monedas de 1 €: } \frac{x}{2}$$

$$x - \frac{x}{2} = 80$$

$$x = 160$$

Lola tiene 80 €.

$$\text{b) } x - \frac{x}{2} = 120$$

$$x = 240$$

Tendría que cambiar 120 €.

c) Monedas de 20 céntimos:  $x$

$$\text{Monedas de 1 €: } \frac{x}{5}$$

$$x - \frac{x}{5} = 60$$

$$x = 75$$

Lola tiene 15 €.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

## 093 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO?

El área de una parcela que tiene forma rectangular es  $450 \text{ m}^2$ . Si mide el doble de largo que de ancho, ¿cuánto medirá su ancho?

PRIMERO. Identificar la incógnita.

Lo que sé...	Lo que no sé...
Parcela rectangular Área = $450 \text{ m}^2$ El doble de largo que de ancho	Medida del ancho

Incógnita ( $x$ ) → Medida del ancho

SEGUNDO. Plantear la ecuación.

Ancho  $\xrightarrow{\hspace{10em}}$   $x$

Largo = Doble que ancho  $\xrightarrow{\hspace{10em}}$   $2x$

Área =  $450 \text{ m}^2$   $\xrightarrow{\text{Área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}}$   $x \cdot 2x = 450$

TERCERO. Resolver la ecuación.

$$x \cdot 2x = 450 \rightarrow 2x^2 = 450 \rightarrow x^2 = \frac{450}{2} = 225 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{225} = \begin{cases} x_1 = +\sqrt{225} = 15 \\ x_2 = -\sqrt{225} = -15 \end{cases}$$

CUARTO. Comprobar e interpretar la solución.

COMPROBACIÓN:

$$x \cdot 2x = 450 \xrightarrow{x=15} 15 \cdot 2 \cdot 15 = 450 \rightarrow 450 = 450$$

$$x \cdot 2x = 450 \xrightarrow{x=-15} (-15) \cdot 2 \cdot (-15) = 450 \rightarrow 450 = 450$$

Ambos valores son soluciones de la ecuación.

INTERPRETACIÓN: Descartamos la solución  $-15$  porque no existen longitudes negativas.

Por tanto, el ancho de la parcela es  $15 \text{ m}$ .

## 094 ●● Halla las dimensiones de un rectángulo de área $30 \text{ cm}^2$ , siendo la base la mitad de la altura.

Base:  $x$

Altura:  $2x$

$$x \cdot 2x = 30 \rightarrow 2x^2 = 30 \rightarrow x^2 = 15 \rightarrow x = \sqrt{15}$$

Base:  $\sqrt{15} \text{ cm}$

Altura:  $2\sqrt{15} \text{ cm}$

- 095** ●● Calcula las dimensiones de un rectángulo de  $80 \text{ cm}^2$  cuyo largo es 2 cm mayor que el ancho.

Ancho:  $x$       Largo:  $x + 2$

$$x(x + 2) = 80 \rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \rightarrow x_1 = 8, x_2 = -10$$

Como las medidas de longitud tienen que ser positivas:

Ancho: 8 cm      Largo: 10 cm

- 096** ●●● Halla la longitud del lado de una parcela cuadrada si su área, más cinco veces su lado, menos 18, es igual a 482.



Lado:  $x$       Área:  $x^2$

$$x^2 + 5x - 18 = 482 \rightarrow x^2 + 5x - 500 = 0 \rightarrow x_1 = -25, x_2 = 20$$

Como es válida solo la medida positiva, el lado de la parcela mide 20 m.

- 097** ●●● La solución de esta ecuación es  $x = 9$ .

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{x-\Delta}{10} = x-6$$

Investiga a qué número equivale el triángulo.

$$\frac{18-3}{5} - \frac{9-\Delta}{10} = 9-6 \rightarrow 3 - \frac{9-\Delta}{10} = 3 \rightarrow \frac{9-\Delta}{10} = 0 \rightarrow \Delta = 9$$

- 098** ●●● Investiga qué relación debe existir entre  $b$  y  $c$  para que las soluciones de la ecuación  $x^2 + bx + c = 0$  sean iguales.

Basándote en tus investigaciones, escribe una ecuación de segundo grado cuyas dos soluciones sean 7.

¿Es posible que si  $b$  y  $c$  son números enteros y  $b$  es impar sean las dos soluciones iguales?

Para que las soluciones sean iguales, tenemos que:

$$\sqrt{b^2 - 4c} = 0 \rightarrow b^2 - 4c = 0 \rightarrow b^2 = 4c$$

Una posible ecuación con 7 como solución doble es:  $x^2 - 14x + 49 = 0$ .

Si  $b$  y  $c$  son números enteros y  $b$  es impar no puede existir una solución doble, ya que  $b^2$  sería impar y  $4c$  es par, por lo que las soluciones no serán iguales.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

099

Encuentra el error y recuerda que «2 no es igual a 1».

$$\begin{aligned}
 x = y &\xrightarrow{\cdot x} x^2 = xy \xrightarrow{-y^2} \overbrace{x^2 - y^2}^{\text{Diferencia de cuadrados}} = \overbrace{xy - y^2}^{\text{Factor común } y} \rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y) \rightarrow \\
 &\xrightarrow{: (x - y)} x + y = y \xrightarrow{\text{Como } x = y} y + y = y \rightarrow 2y = y \xrightarrow{: y} 2 = 1
 \end{aligned}$$

El error está en el paso en el que dividimos los términos entre  $(x - y)$ , ya que  $x - y = 0$  y, además, no podemos dividir entre 0.

100

Calcula el tiempo que necesitas para resolver este problema si empleas:

$\frac{1}{25}$  partes del tiempo total en leerlo

$\frac{1}{4}$  partes del tiempo total en plantearlo

$\frac{41}{100}$  partes del tiempo total en resolverlo y minuto y medio en comprobarlo

$$\begin{aligned}
 x - \frac{x}{25} - \frac{x}{4} - \frac{41x}{100} = 1,5 &\rightarrow 100x - 4x - 25x - 41x = 150 \rightarrow \\
 &\rightarrow 30x = 150 \rightarrow x = 5
 \end{aligned}$$

Se necesitan 5 minutos para resolverlo.

## EN LA VIDA COTIDIANA

101

La familia Alcubilla quiere construir una piscina en su jardín. Han estado tomando medidas y se han reunido para ponerse de acuerdo sobre sus dimensiones y su ubicación.

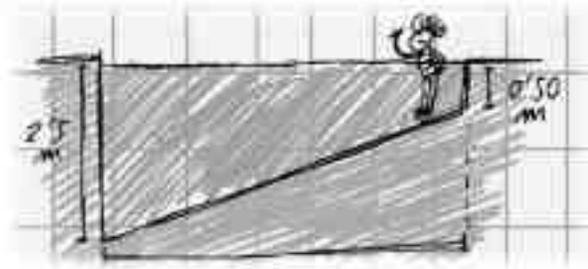
Debería tener una parte con una profundidad de 2,5 m para que podamos tirarnos de cabeza.

Sí, pero también necesitamos una zona con poca profundidad, no mayor de medio metro...

Por las medidas del jardín, el largo de la piscina no puede pasar de 8 m...



Siguiendo estas indicaciones, Alberto ha dibujado el siguiente croquis de la piscina.



El único aspecto que quedaría por determinar sería el ancho de la piscina, que por las características del terreno en el que se construirá no puede ser superior a 9 m.

Además, Celia ha encontrado en unos almacenes una oferta interesante de baldosas para cubrir la piscina, pero de cantidad limitada.

¿Tendrán suficientes baldosas para cubrir la piscina?



La superficie que hay que alicatar es el fondo y las cuatro paredes laterales.

$$\text{Longitud del fondo: } \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 8,25 \text{ m.}$$

$$\text{Área del fondo: } 9 \cdot 8,25 = 74,25 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área del lateral con forma de trapecio: } \frac{2,5 + 0,5}{2} \cdot 8 = 12 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área del lateral de la zona más profunda: } 2,5 \cdot 9 = 22,5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área del lateral de la zona menos profunda: } 0,5 \cdot 9 = 4,5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área total: } 74,25 + 2 \cdot 12 + 22,5 + 4,5 = 125,25 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área que cubren las baldosas: } 24 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 25 = 900.000 \text{ cm}^2 = 90 \text{ m}^2.$$

Como  $125,25 \text{ m}^2 > 90 \text{ m}^2$ , no tendrán suficientes baldosas.

# Ecuaciones de primer y segundo grado

102



La fórmula para calcular el espacio recorrido por un móvil,  $S$ , que parte con una velocidad inicial,  $v_0$ , y que lleva una aceleración,  $a$ , durante un tiempo  $t$ , es:

$$S = v_0 \cdot t + a \cdot t^2$$



¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 1.000 metros una moto que circula a 25 m/s, con una aceleración de 1,5 m/s<sup>2</sup>?

$$1.000 = 25t + 1,5t^2$$

$$3t^2 + 50t - 2.000 = 0$$

$$t = \frac{-50 \pm \sqrt{2.500 + 24.000}}{6} = \frac{-50 \pm \sqrt{26.500}}{6} =$$

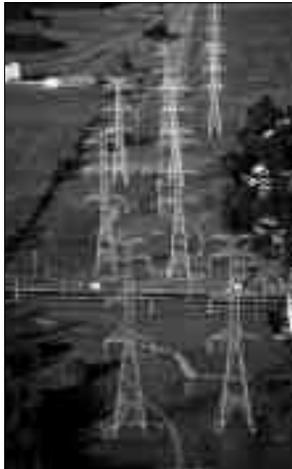
$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-50 + \sqrt{26.500}}{6} \approx 18,8 \text{ s} \\ x_2 = \frac{-50 - \sqrt{26.500}}{6} = -35,5 \text{ s} \end{cases}$$

Como la medida del tiempo debe ser positiva, tardará 18,8 s.

103



Los vientos han sido tan fuertes que han partido una torre eléctrica de alta tensión situada en el Cerro de los Mochuelos.

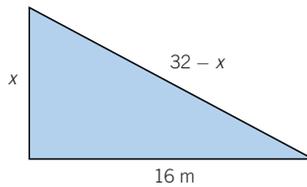


La torre medía 32 m de altura y se ha quebrado de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo, a una distancia de 16 m de la base.



Los técnicos de la empresa encargada del mantenimiento dicen que colocarán unos refuerzos que irán desde la base de la torre hasta la zona donde se ha partido.

¿Qué altura deberían tener estos refuerzos?



Se forma un triángulo rectángulo de base 16 m.

Cateto:  $x$

Hipotenusa:  $32 - x$

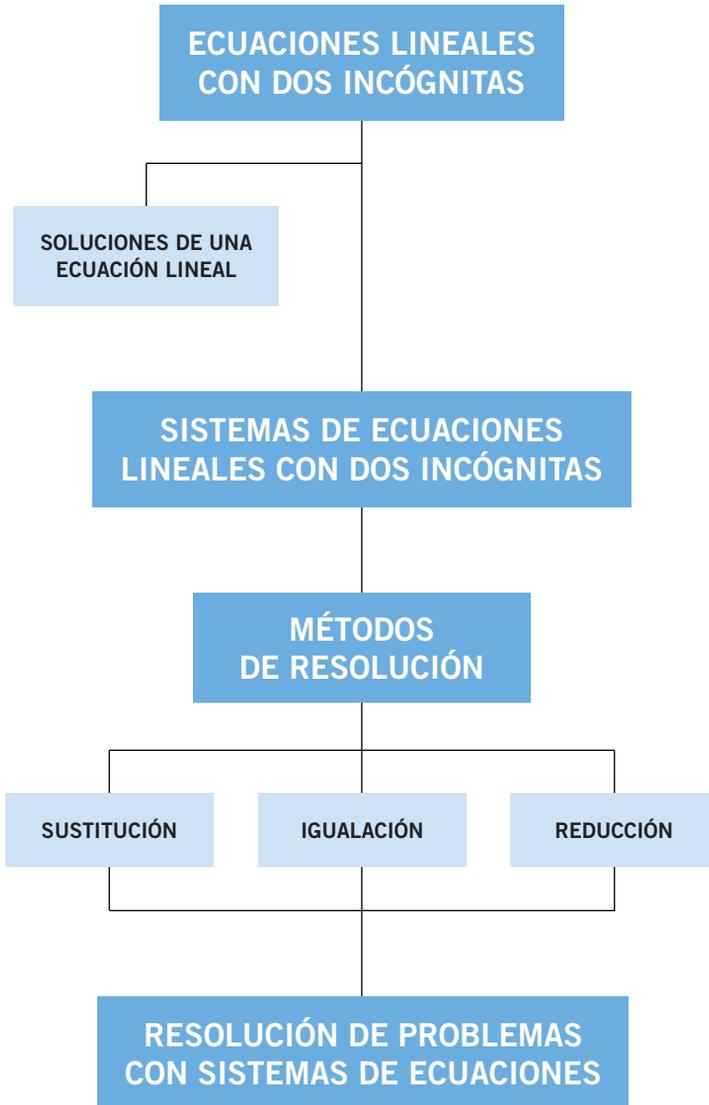
$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2$$

$$1.024 - 64x + x^2 = x^2 + 256$$

$$64x = 768$$

$$x = 12$$

Luego la altura de los refuerzos será de 12 m.



## Gabriel & Giovanni

No hacía mucho tiempo que los dos jóvenes, Gabriel Cramer y Giovanni Calandrini, habían sido rivales al competir por la misma cátedra de Filosofía, que los dos perdieron y, al mismo tiempo, los dos ganaron: la cátedra de Filosofía fue asignada a otra persona, pero ambos impresionaron tanto al tribunal que crearon una nueva cátedra de Matemáticas que fue adjudicada a los dos.

Y es que sus personalidades tan diferentes hicieron que se complementaran y, a la postre, se convirtieron en inseparables amigos.

Aquel día, un pensativo Calandrini le dijo a Cramer:

–Gabriel, te has dado cuenta de que pasamos una parte importante de nuestra vida averiguando lo que queremos ser, y cuando lo sabemos, gastamos el resto del tiempo intentando cambiar en lo que nos hemos convertido.

–La solución es sencilla –contestó Cramer–; ponemos a un lado lo que sabemos y al otro lo que no sabemos, y, planteando las relaciones de manera correcta, la solución surge ante nosotros de forma natural.

Calandrini dio un manotazo al aire y respondió:

–A veces me sacas de quicio, no sé por qué tienes que aplicar las Matemáticas a todo.

–Porque pienso que cualquier problema tiene su solución, aunque lamentablemente no somos capaces de plantear las ecuaciones adecuadas.

*Si las edades de los dos amigos sumaban 55 años y Giovanni era un año mayor, plantea el problema y di cuál era la edad de cada uno.*

$$x = \text{edad de Cramer}$$

$$x + 1 = \text{edad de Giovanni}$$

$$x + x + 1 = 55 \rightarrow 2x = 54 \rightarrow x = 27$$

**Cramer tenía 27 años y Giovanni tenía 28 años.**



# Sistemas de ecuaciones

## EJERCICIOS

**001** Encuentra tres soluciones para cada ecuación lineal.

a)  $x - y = 10$

Si  $x = 10 \rightarrow y = 0$

Si  $x = 0 \rightarrow y = -10$

Si  $x = 1 \rightarrow y = -9$

b)  $2x - 3y = 8$

Si  $x = 4 \rightarrow y = 0$

Si  $x = 0 \rightarrow y = \frac{-8}{3}$

Si  $x = 1 \rightarrow y = -2$

**002** Comprueba si  $x = -1, y = 8$  es solución de estas ecuaciones.

a)  $2x + y = 6$

$2 \cdot (-1) + 8 \stackrel{?}{=} 6 \rightarrow -2 + 8 = 6 \rightarrow$  Sí lo es.

b)  $7x - y = 11$

$7 \cdot (-1) - 8 \stackrel{?}{=} 11 \rightarrow -7 - 8 = -15 \neq 11 \rightarrow$  No lo es.

c)  $(-1) - 8 \stackrel{?}{=} 7 \rightarrow -1 - 8 = -9 \neq 7 \rightarrow$  No lo es.

d)  $(-1) + 8 \stackrel{?}{=} 7 \rightarrow -1 + 8 = 7 \rightarrow$  Sí lo es.

c)  $x - y = 7$

d)  $x + y = 7$

**003** Expresa, mediante una ecuación lineal con dos incógnitas, los enunciados.

a) La diferencia de dos números es 3.

a)  $x - y = 3$

b) El doble de un número más otro es 43.

b)  $2x + y = 43$

**004** Escribe dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea  $x = 3, y = -2$ .

$2x + 3y = 0$

$x - 2y = 7$

**005** Comprueba si  $x = 1$  e  $y = -1$  es solución de este sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 \\ 1 + (-1) = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Ambas ecuaciones se verifican, por lo que es solución.

**006** Dados los valores numéricos  $x = 0$  e  $y = 3$ , di si son solución de este sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x + 5y = 15 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ 0 + 5 \cdot 3 = 15 \end{array} \right\} \text{ Las ecuaciones se verifican; por tanto, son solución.}$$

**007** Halla la solución del sistema utilizando tablas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

a)

$x$	10	11	12	13	<b>14</b>
$(x + y = 12) y$	2	1	0	-1	<b>-2</b>
$(x + 2y = 10) y$	0	-1/2	-1	-3/2	<b>-2</b>

b)

$x$	0	1	2	<b>3</b>	4
$(x - y = 1) y$	-1	0	1	<b>2</b>	3
$(x + y = 5) y$	5	4	3	<b>2</b>	1

**008** Raquel paga 3 € por 1 bote de gel y 1 bolsa de galletas, y Luis paga 4 € por 1 bote de gel y 2 bolsas de galletas. Calcula el precio de cada producto.

Precio del gel:  $x$       Precio de las galletas:  $y$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow$$

$x$	0	1	<b>2</b>
$(x + y = 3) y$	3	2	<b>1</b>
$(x + 2y = 4) y$	4	$\frac{3}{2}$	<b>1</b>

El precio del bote de gel es 2 € y el precio de la bolsa de galletas es 1 €.

**009** Resuelve por el método de sustitución.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

a)  $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

- 1.º De la 1.ª ecuación despejamos  $x$ :  $x = 12 - y$ .
- 2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $(12 - y) - y = 2$ .
- 3.º Resolvemos:  $12 - 2y = 2 \rightarrow 10 = 2y \rightarrow y = 5$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 12 - 5 = 7$ .
- 5.º Solución:  $x = 7, y = 5$ .

b)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$

- 1.º De la 1.ª ecuación despejamos  $x$ :  $x = 5 - y$ .
- 2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $-(5 - y) + 2y = -2$ .
- 3.º Resolvemos:  $-5 + y + 2y = -2 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 5 - 1 = 4$ .
- 5.º Solución:  $x = 4, y = 1$ .

# Sistemas de ecuaciones

**010** Resuelve por el método de sustitución.

$$\text{a) } \begin{cases} x - (y + 1) = 3 \\ y + (x + 2) = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 10(x - 2) + y = 1 \\ x + 3(x - y) = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - (y + 1) = 3 \\ y + (x + 2) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 1.º De la 2.ª ecuación despejamos la  $x$ :  $x = 2 - y$ .
- 2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $(2 - y) - y = 4$ .
- 3.º Resolvemos:  $2 - y - y = 4 \rightarrow -2 = 2y \rightarrow y = -1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$ .
- 5.º Solución:  $x = 3, y = -1$ .

$$\text{b) } \begin{cases} 10(x - 2) + y = 1 \\ x + 3(x - y) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + y = 21 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- 1.º De la 1.ª ecuación despejamos la  $y$ :  $y = 21 - 10x$ .
- 2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $4x - 3 \cdot (21 - 10x) = 5$ .
- 3.º Resolvemos:  $4x - 63 + 30x = 5 \rightarrow 34x = 68 \rightarrow x = 2$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $y = 21 - 20 = 1$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = 1$ .

**011** Corrige los errores cometidos al resolver el sistema.

$$\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases} \rightarrow x = (1 - y) \cdot 5$$

$$2x + 4y = -1 \xrightarrow{x = (1 - y) \cdot 5} 2 \cdot (1 - y) \cdot 5 + 4y = -1 \rightarrow 2 - 2y + 4y = -1 \rightarrow 2y = -3 \rightarrow y = -3 - 2 = -5$$

$$x = (1 - y) \cdot 5 \xrightarrow{y = -5} x = (1 - (-5)) \cdot 5 \rightarrow x = 30$$

$$\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1 + y}{5}$$

$$2x + 4y = -1 \xrightarrow{x = \frac{1 + y}{5}} 2 \cdot \frac{1 + y}{5} + 4y = -1 \rightarrow 2 + 2y + 20y = -5 \rightarrow 22y = -7 \rightarrow y = -\frac{7}{22}$$

$$x = \frac{1 + y}{5} \xrightarrow{y = -\frac{7}{22}} x = \frac{1 - \frac{7}{22}}{5} \rightarrow x = \frac{3}{22}$$

**012** Resuelve por el método de igualación.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

1.º Despejamos la  $x$  en las dos ecuaciones:  $x = 12 - y$ ;  $x = 2 + y$ .

2.º Igualamos:  $12 - y = 2 + y$ .

3.º Resolvemos:  $12 - 2 = y + y \rightarrow 10 = 2y \rightarrow y = 5$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 12 - 5 = 7$ .

5.º Solución:  $x = 7$ ,  $y = 5$ .

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

1.º Despejamos la  $x$  en las dos ecuaciones:  $x = 5 - y$ ;  $x = 2y + 2$ .

2.º Igualamos:  $5 - y = 2y + 2$ .

3.º Resolvemos:  $5 - 2 = 2y + y \rightarrow 3 = 3y \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 5 - 1 = 4$ .

5.º Solución:  $x = 4$ ,  $y = 1$ .

**013 Resuelve por los métodos de igualación y sustitución, y comprueba que coinciden las soluciones.**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 9y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -4x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 9y = -3 \end{cases}$$

1.º Despejamos la  $x$ :  $x = \frac{7 + 3y}{2}$ ;  $x = \frac{-3 - 9y}{3} = -1 - 3y$ .

2.º Igualamos y resolvemos:

$$\frac{7 + 3y}{2} = -1 - 3y \rightarrow 7 + 3y = -2 - 6y \rightarrow 9y = -9 \rightarrow y = -1$$

3.º Hallamos la otra variable:  $x = \frac{7 + 3 \cdot (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ .

4.º Solución:  $x = 2$ ,  $y = -1$ .

$$\text{b) } \begin{cases} -4x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

1.º Despejamos la  $x$ :  $x = \frac{3y + 7}{4}$ ;  $x = \frac{7 - 5y}{2}$ .

2.º Igualamos y resolvemos:

$$\frac{3y + 7}{4} = \frac{7 - 5y}{2} \rightarrow 6y + 14 = 28 - 20y \rightarrow 26y = 14 \rightarrow y = \frac{7}{13}$$

3.º Hallamos la otra variable:  $x = \frac{3 \cdot \frac{7}{13} + 7}{4} = \frac{28}{13}$ .

4.º Solución:  $x = \frac{28}{13}$ ,  $y = \frac{7}{13}$ .

# Sistemas de ecuaciones

**014** Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 7 - y \\ x = 3 + \frac{y}{4} \end{array} \right\} \rightarrow 7 - y = 3 + \frac{y}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \cdot (7 - y) = 4 \cdot \left(3 + \frac{y}{4}\right) \rightarrow 28 - 4y = 12 + 4y \rightarrow -8y = 40 \rightarrow y = 5$$

$$x = 7 - y \xrightarrow{y=5} x = 7 - 5 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 7 - y \\ x = \frac{3 + y}{4} \end{array} \right\} \rightarrow 7 - y = \frac{3 + y}{4} \rightarrow 4 \cdot (7 - y) = 3 + y \rightarrow$$
$$\rightarrow 28 - 4y = 3 + y \rightarrow -5y = -25 \rightarrow y = 5$$

$$x = 7 - y \xrightarrow{y=5} x = 2$$

**015** Resuelve por el método de reducción.

a)  $\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$

b)  $\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array} \right\}$

a)  $\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array} \right\}$

- 1.º Elegimos la variable  $y$  para reducir.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $2x = 14$ .
- 3.º Resolvemos:  $x = 7$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $7 + y = 12 \rightarrow y = 5$ .
- 5.º Solución:  $x = 7, y = 5$ .

b)  $\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array} \right\}$

- 1.º Elegimos la variable  $x$  para reducir.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $3y = 3$ .
- 3.º Resolvemos:  $y = 1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$ .
- 5.º Solución:  $x = 4, y = 1$ .

**016** Resuelve estos sistemas por los métodos de sustitución, igualación y reducción y comprueba que coincide la solución.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $x$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $2y = 2$ .

3.º Resolvemos:  $y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 1$ .

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por  $(-1)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $10x = 100$ .

3.º Resolvemos:  $x = 10$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $20 - 3y = -25 \rightarrow 45 = 3y \rightarrow y = 15$ .

5.º Solución:  $x = 10, y = 15$ .

**017** Corrige los errores cometidos.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 3 \\ - 3x + 2y = -4 \\ \hline 5y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{5} \end{array}$$

$$x + y = 0 \xrightarrow{y = \frac{7}{5}} x + \frac{7}{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 0 \\ - 3x + 2y = -4 \\ \hline y = 4 \end{array}$$

$$x + y = 0 \xrightarrow{y = 4} x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$

# Sistemas de ecuaciones

**018** Resuelve por el método de reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 7x + 4y = 39 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 7x + 4y = 39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 21x + 35y = 140 \\ -21x - 12y = 117 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por 7 y la 2.ª ecuación por  $(-3)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $23y = 23$ .

3.º Resolvemos:  $y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $3x + 5 = 20 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$ .

5.º Solución:  $x = 5, y = 1$ .

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 39 \\ -6x - 4y = -24 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $x$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª ecuación por  $(-2)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $5y = 15$ .

3.º Resolvemos:  $y = 3$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $2x + 9 = 13 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 3$ .

**019** Resuelve este sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$x - \frac{3}{2}y = 2$$

$$- \quad x + 2y = 2$$

$$\hline \frac{1}{2}y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x + 2y = 2 \xrightarrow{y=0} x = 2$$

020 Resuelve estos sistemas por el método que creas más adecuado.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -14 \\ 5x + 2y = 12 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por  $(-2)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $x = -2$ .

3.º Hallamos la otra variable:  $2 \cdot (-2) + y = 7 \rightarrow y = 11$ .

4.º Solución:  $x = -2, y = 11$ .

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $3x = 6$ .

3.º Resolvemos:  $x = 2$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $2 + y = 5 \rightarrow y = 3$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 3$ .

$$\text{c) } \begin{cases} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - y = -9 \\ 4x + 10y = 18 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $x$ , y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $9y = 9$ .

3.º Resolvemos:  $y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $-4x - 1 = -9 \rightarrow -4x = -8 \rightarrow x = 2$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 1$ .

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $5x = 15$ .

3.º Resolvemos:  $x = 3$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $3 + y = 5 \rightarrow y = 2$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 2$ .

# Sistemas de ecuaciones

$$e) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 2y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por  $(-1)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $3x = 9$ .

3.º Resolvemos:  $x = 3$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $3 + 2y = 5 \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = 1$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

$$f) \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 24 \\ -6x - 4y = -30 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $x$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por 3 y la segunda por  $(-2)$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $2y = -6$ .

3.º Resolvemos:  $y = -3$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $2x - 6 = 8 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$ .

5.º Solución:  $x = 7, y = -3$ .

## 021 Busca dos números cuya suma es 14 y su diferencia es 4.

Un número:  $x$ . Otro número:  $y$

Suma:  $x + y$

Diferencia:  $x - y$

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos:  $2x = 18 \rightarrow x = 9$ , y sustituyendo en la 1.ª ecuación:  $y = 5$ . Los números buscados son 9 y 5.

## 022 ¿Qué dos números suman 21 y el doble de uno más el triple del otro es 56?

Un número:  $x$ . Otro número:  $y$

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 2x + 3y = 56 \end{cases} \rightarrow x = 21 - y$$

$$2x + 3y = 56 \xrightarrow{x=21-y} 42 - 2y + 3y = 56 \rightarrow y = 14, x = 7$$

Los números buscados son 7 y 14.

## 023 Reparte 60 € entre dos personas, de manera que una obtenga el doble de dinero que la otra.

Dinero de una persona:  $x$ . Dinero de la otra persona:  $y$

Una persona tiene el doble de dinero que la otra:  $x = 2y$

Dinero de las dos personas:  $x + y = 60$

$$\text{Sistema: } \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 60 \end{cases}$$

Sustituyendo la 1.ª ecuación en la 2.ª:  $3y = 60 \rightarrow y = 20$ , y sustituyendo en la 1.ª:  $x = 40$ . El reparto es 40 € y 20 €.

- 024** En una granja hay 100 animales, entre conejos y gallinas. Las patas de estos animales son 260. Halla el número de conejos y gallinas que hay en la granja.

Conejos:  $x$ . Gallinas:  $y$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 260 \end{cases}$$

Despejamos en la 1.ª ecuación:

$$y = 100 - x$$

Sustituimos en la 2.ª ecuación:

$$4x + 2 \cdot (100 - x) = 260 \rightarrow 4x + 200 - 2x = 260 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

Hallamos la otra variable:

$$y = 100 - 30 = 70$$

Hay 30 conejos y 70 gallinas.

- 025** En una cafetería, el camarero anota: mesa A: 2 cafés y 4 zumos, 16 €; mesa B: 3 cafés y 2 zumos, 12 €. Halla el precio del café.

Cafés:  $x$ . Zumos:  $y$

Anotaciones del camarero:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ -6x - 4y = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x = -8 \rightarrow x = 2 \\ 4 + 4y = 16 \rightarrow 4y = 12 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Los cafés cuestan 2 € y los zumos cuestan 3 €.

- 026** En un avión vuelan 192 pasajeros entre hombres y mujeres. El número de mujeres es  $\frac{3}{5}$  del número de hombres. ¿Cuántos hombres hay en el avión? ¿Y mujeres?

Hombres:  $x$ . Mujeres:  $y$

$$\begin{cases} x + y = 192 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases} \rightarrow x + \frac{3}{5}x = 192 \rightarrow 5x + 3x = 960 \rightarrow x = 120, y = 72$$

Hay 120 hombres y 72 mujeres.

- 027** En un aparcamiento hay 120 vehículos entre coches y motos. Si se van 40 coches, el número de coches y el número de motos es el mismo. ¿Cuántos coches hay en el aparcamiento? ¿Y motos?

Coches:  $x$ . Motos:  $y$

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x - 40 = y \end{cases} \xrightarrow{y = x - 40} x + x - 40 = 120 \rightarrow 2x = 160 \rightarrow x = 80, y = 40$$

En el aparcamiento hay 80 coches y 40 motos.

# Sistemas de ecuaciones

**028** Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos, y el hijo, 8 años más, ambos tendrían la misma edad. ¿Cuáles son las edades del padre y el hijo?

Padre:  $x$ . Hijo:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x - 30 = y + 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{x=3y} 3y - 30 = y + 8 \rightarrow 2y = 38 \rightarrow \\ \rightarrow y = 19, x = 57$$

El padre tiene 57 años y el hijo tiene 19 años.

## ACTIVIDADES

**029** Identifica cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones lineales con dos incógnitas.



- |                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| a) $x + 2y = 4$          | f) $x^2 = y$         |
| b) $x + y = 0$           | g) $x + y = y$       |
| c) $x + y = x$           | h) $-x = 2y$         |
| d) $2(x - y) = 3x$       | i) $x \cdot y = 8$   |
| e) $\frac{x - y}{5} = 3$ | j) $\frac{x}{y} = 8$ |

Son ecuaciones lineales con dos incógnitas: a), b), c), d), e), g) y h).

**030** Dada la ecuación  $2x - 3y = 7$ , di cuál es su solución.



- a)  $x = 1, y = 5$       b)  $x = 5, y = 1$
- a)  $2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13 \rightarrow$  No es solución.  
b)  $2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7 \rightarrow$  Sí es solución.

**031** ¿Cuáles de estas ecuaciones tienen como solución  $x = -1, y = 3$ ?



- a)  $3x + y = 3$       c)  $3x - \frac{y}{3} = 0$
- b)  $3x - y = 0$       d)  $\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 1$

Ninguna de las ecuaciones tiene como solución  $x = -1, y = 3$ .

**032** Escribe tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como solución  $x = 2, y = -1$ .



$$\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{array}$$

**033** Comprueba que si  $x = 2$ ,  $y = -3$  es solución de una ecuación, también lo será de la ecuación que resulta al:

- a) Sumar 8 en los dos miembros.
- b) Restar 10 en los dos miembros.
- c) Multiplicar los dos miembros por 3.
- d) Dividir los dos miembros entre 5.

Es cierto porque al sumar, restar, multiplicar o dividir los dos términos de una ecuación por un mismo número, las ecuaciones resultantes son equivalentes.

**034** Comprueba que  $x = 2$ ,  $y = 1$  es solución de las ecuaciones.

- a)  $3x + 2y = 8$
- b)  $\frac{3}{2}x + y = 4$
- c)  $9x + 6y = 24$
- d)  $12x + 8y = 32$
- e)  $15x + 10y = 40$
- f)  $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 2$
- g)  $6x + 4y = 16$
- h)  $x + \frac{2}{3}y = \frac{8}{3}$

¿Encuentras alguna relación entre ellas?

- a)  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$
- b)  $\frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = 4$
- c)  $9 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 24$
- d)  $12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 32$
- e)  $15 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 40$
- f)  $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$
- g)  $6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$
- h)  $2 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$

La relación que hay entre las ecuaciones es:

- b)  $= \frac{a}{2}$
- c)  $= 3a$
- d)  $= 4a$
- e)  $= 5a$
- f)  $= \frac{a}{4}$
- g)  $= 2a$
- h)  $= \frac{a}{3}$

**035** ¿Son los valores  $x = -2$ ,  $y = -1$  solución de estos sistemas de ecuaciones?

- a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x + y = -3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} x + y = -3 \\ -x - 2y = 4 \end{cases}$

- a)  $-2 + (-1) = -3 \neq 3 \rightarrow$  No es solución.
- b)  $\begin{cases} 3 \cdot (-2) - (-1) = -5 \\ -2 - 2 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \rightarrow$  Sí es solución.
- c)  $-2 - 2 \cdot (-1) = 0 \neq -4 \rightarrow$  No es solución.
- d)  $\begin{cases} (-2) + (-1) = -3 \\ -(-2) - 2 \cdot (-1) = 4 \end{cases} \rightarrow$  Sí es solución.

# Sistemas de ecuaciones

036

Escribe un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea:

a)  $x = 3, y = 4$                       d)  $x = \frac{1}{2}, y = 8$                       g)  $x = -2, y = -2$

b)  $x = -2, y = 5$                       e)  $x = -4, y = 0,5$                       h)  $x = 0, y = 0$

c)  $x = 8, y = 10$                       f)  $x = 6, y = 0$

a)  $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \end{cases}$                       d)  $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$                       g)  $\begin{cases} 2x + 3y = -10 \\ x - y = 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x - 3y = -17 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$                       e)  $\begin{cases} x - 4y = -6 \\ 3x + 2y = -11 \end{cases}$                       h)  $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ x + 6y = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 28 \end{cases}$                       f)  $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$

037

Resuelve por el método de sustitución los sistemas de ecuaciones.

a)  $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$                       e)  $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$                       i)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$                       f)  $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$                       j)  $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$                       g)  $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$                       h)  $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 4 - 3y$ .

2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $2 \cdot (4 - 3y) - 3y = -1$ .

3.º Resolvemos:  $8 - 6y - 3y = -1 \rightarrow 9 = 9y \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 4 - 3 = 1$ .

5.º Solución:  $x = 1, y = 1$ .

b)  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 1 + 2y$ .

2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $2 \cdot (1 + 2y) + 2y = 8$ .

3.º Resolvemos:  $2 + 4y + 2y = 8 \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 1 + 2 = 3$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

c)  $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 3y$ .

2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $2 \cdot 3y + y = 7$ .

3.º Resolvemos:  $6y + y = 7 \rightarrow 7y = 7 \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 3$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

$$d) \begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

- 1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = y$ .
- 2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $5y + 3y = 16$ .
- 3.º Resolvemos:  $8y = 16 \rightarrow y = 2$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 2$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = 2$ .

$$e) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

- 1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 5 + y$ .
- 2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $2 \cdot (5 + y) + y = 1$ .
- 3.º Resolvemos:  $3y = -9 \rightarrow y = -3$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 2$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = -3$ .

$$f) \begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

- 1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 9 - 4y$ .
- 2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación:  $3 \cdot (9 - 4y) - 6y = 9$ .
- 3.º Resolvemos:  $27 - 12y - 6y = 9 \rightarrow 18 = 18y \rightarrow y = 1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 9 - 4 = 5$ .
- 5.º Solución:  $x = 5, y = 1$ .

$$g) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

- 1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $y$ :  $y = 11 - 4x$ .
- 2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $5x - 3 \cdot (11 - 4x) = 1$ .
- 3.º Resolvemos:  $5x - 33 + 12x = 1 \rightarrow 17x = 34 \rightarrow x = 2$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $y = 11 - 8 = 3$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = 3$ .

$$h) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$$

- 1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $y$ :  $y = 14 - 4x$ .
- 2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $3x - 2 \cdot (14 - 4x) = 5$ .
- 3.º Resolvemos:  $3x - 28 + 8x = 5 \rightarrow 11x = 33 \rightarrow x = 3$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $y = 14 - 12 = 2$ .
- 5.º Solución:  $x = 3, y = 2$ .

$$i) \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

- 1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $x$ :  $x = 6 - 2y$ .
- 2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $(6 - 2y) + y = 5$ .
- 3.º Resolvemos:  $6 - 2y + y = 5 \rightarrow y = 1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x = 6 - 2 = 4$ .
- 5.º Solución:  $x = 4, y = 1$ .

# Sistemas de ecuaciones

$$j) \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable  $y$ :  $y = x - 1$ .

2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación:  $x + 3 \cdot (x - 1) = 5$ .

3.º Resolvemos:  $x + 3x - 3 = 5 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $y = 2 - 1 = 1$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 1$ .

## 038 Resuelve estos sistemas por sustitución.

$$a) \begin{cases} x = 3y + 2 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 5x - 3y = -19 \end{cases} \quad e) \begin{cases} -2x - 3y = -7 \\ 5x + y = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 1 - y \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 4x + y = 6 \\ -x - y = 0 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 4x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x = 3y + 2 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases} \xrightarrow{x=3y+2} 2 \cdot (3y + 2) - 5y = 5 \rightarrow \\ \rightarrow y = 1, x = 5$$

$$b) \begin{cases} x = 1 - y \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \xrightarrow{x=1-y} 3 \cdot (1 - y) + 2y = -1 \rightarrow \\ \rightarrow y = 4, x = -3$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 5x - 3y = -19 \end{cases} \longrightarrow x = \frac{11 - 5y}{2}$$

$$5x - 3y = -19 \xrightarrow{x = \frac{11 - 5y}{2}} 5 \cdot \left( \frac{11 - 5y}{2} \right) - 3y = -19 \rightarrow \\ \rightarrow 55 - 25y - 6y = -38 \rightarrow \\ \rightarrow y = 3, x = -2$$

$$d) \begin{cases} 4x + y = 6 \\ -x - y = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 6 - 4x$$

$$-x - y = 0 \xrightarrow{y=6-4x} -x - (6 - 4x) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x = 2, y = -2$$

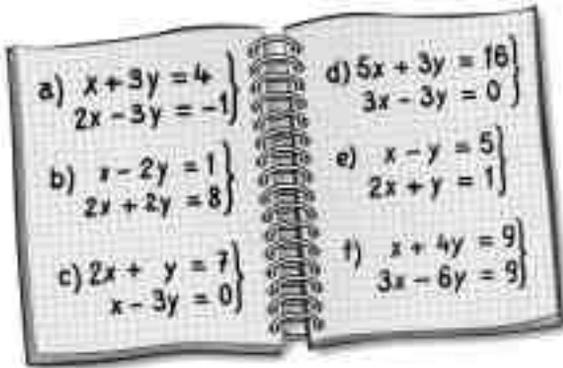
$$e) \begin{cases} -2x - 3y = -7 \\ 5x + y = -2 \end{cases} \longrightarrow y = -2 - 5x$$

$$-2x - 3y = -7 \xrightarrow{y=-2-5x} -2x - 3 \cdot (-2 - 5x) = -7 \rightarrow \\ \rightarrow x = -\frac{13}{13}, y = -1$$

$$f) \begin{cases} 4x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \longrightarrow y = 9 - 2x$$

$$2x + 3y = 11 \xrightarrow{y=9-2x} 2x + 3 \cdot (9 - 2x) = 11 \rightarrow \\ \rightarrow x = 4, y = 1$$

039 Resuelve por el método de igualación los sistemas de ecuaciones.



$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $x$ :  $x = 4 - 3y$ ;  $x = \frac{3y - 1}{2}$ .

2.º Igualamos:  $4 - 3y = \frac{3y - 1}{2}$ .

3.º Resolvemos:  $8 - 6y = 3y - 1 \rightarrow 9 = 9y \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 4 - 3 = 1$ .

5.º Solución:  $x = 1, y = 1$ .

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $x$ :  $x = 1 + 2y$ ;  $x = \frac{8 - 2y}{2}$ .

2.º Igualamos:  $1 + 2y = \frac{8 - 2y}{2}$ .

3.º Resolvemos:  $2 + 4y = 8 - 2y \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 1 + 2 = 3$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $x$ :  $x = \frac{7 - y}{2}$ ;  $x = 3y$ .

2.º Igualamos:  $\frac{7 - y}{2} = 3y$ .

3.º Resolvemos:  $7 - y = 6y \rightarrow 7 = 7y \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 3$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

# Sistemas de ecuaciones

$$d) \begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $x$ :  $x = \frac{16 - 3y}{5}$ ;  $x = y$ .

2.º Igualamos:  $\frac{16 - 3y}{5} = y$ .

3.º Resolvemos:  $16 - 3y = 5y \rightarrow 16 = 8y \rightarrow y = 2$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 2$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = 2$ .

$$e) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $y$ :  $y = x - 5$ ;  $y = 1 - 2x$ .

2.º Igualamos:  $x - 5 = 1 - 2x$ .

3.º Resolvemos:  $3x = 6 \rightarrow x = 2$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $y = -3$ .

5.º Solución:  $x = 2, y = -3$ .

$$f) \begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

1.º Despejamos la variable  $x$ :  $x = 9 - 4y$ ;  $x = \frac{9 + 6y}{3}$ .

2.º Igualamos:  $9 - 4y = \frac{9 + 6y}{3}$ .

3.º Resolvemos:  $27 - 12y = 9 + 6y \rightarrow 18 = 18y \rightarrow y = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $x = 9 - 4 = 5$ .

5.º Solución:  $x = 5, y = 1$ .

## 040 Resuelve estos sistemas por igualación.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2y - x = 3 \\ 3x + 7y = 43 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = 13 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 2x + 5y = 29 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7 - 2y}{3} \\ x = \frac{15 + 3y}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{7 - 2y}{3} = \frac{15 + 3y}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 28 - 8y = 45 + 9y \rightarrow y = -1, x = 3$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{13 - 3y}{2} \\ x = 4 - 2y \end{cases} \rightarrow \frac{13 - 3y}{2} = 4 - 2y \rightarrow$$

$$\rightarrow 13 - 3y = 8 - 4y \rightarrow y = -5, x = 14$$

$$\begin{cases} c) 2x + 4y = 6 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ x = \frac{5 - 7y}{3} \end{cases} \rightarrow 3 - 2y = \frac{5 - 7y}{3} \rightarrow \\ \rightarrow 9 - 6y = 5 - 7y \rightarrow y = -4, x = 11$$

$$\begin{cases} d) x + y = 13 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ x = \frac{5y - 23}{2} \end{cases} \rightarrow 13 - y = \frac{5y - 23}{2} \rightarrow \\ \rightarrow 26 - 2y = 5y - 23 \rightarrow y = 7, x = 6$$

$$\begin{cases} e) 2y - x = 3 \\ 3x + 7y = 43 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ x = \frac{43 - 7y}{3} \end{cases} \rightarrow 2y - 3 = \frac{43 - 7y}{3} \rightarrow \\ \rightarrow 6y - 9 = 43 - 7y \rightarrow y = 4, x = 5$$

$$\begin{cases} f) 3x + y = 11 \\ 2x + 5y = 29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = \frac{29 - 2x}{5} \end{cases} \rightarrow 11 - 3x = \frac{29 - 2x}{5} \rightarrow \\ \rightarrow 55 - 15x = 29 - 2x \rightarrow x = 2, y = 5$$

**041** Resuelve por el método de reducción.

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$	g) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$	h) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$	

$$a) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $3x = 3$ .

3.º Resolvemos:  $x = 1$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $1 + 3y = 4 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$ .

5.º Solución:  $x = 1, y = 1$ .

$$b) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

1.º Elegimos la variable  $y$ .

2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $3x = 9$ .

3.º Resolvemos:  $x = 3$ .

4.º Hallamos la otra variable:  $3 - 2y = 1 \rightarrow 2 = 2y \rightarrow y = 1$ .

5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

# Sistemas de ecuaciones

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por 3.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $7x = 21$ .
- 3.º Resolvemos:  $x = 3$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $6 + y = 7 \rightarrow y = 1$ .
- 5.º Solución:  $x = 3, y = 1$ .

$$\text{d) } \begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $y$ .
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $8x = 16$ .
- 3.º Resolvemos:  $x = 2$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $10 + 3y = 16 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = 2$ .

$$\text{e) } \begin{cases} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x - 12y = -27 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $x$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por  $(-3)$ .
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $-18y = -18$ .
- 3.º Resolvemos:  $y = 1$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $x + 4 = 9 \rightarrow x = 5$ .
- 5.º Solución:  $x = 5, y = 1$ .

$$\text{f) } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 12x + 3y = 33 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 2.ª ecuación por 3.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $17x = 34$ .
- 3.º Resolvemos:  $x = 2$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $10 - 3y = 1 \rightarrow -3y = -9 \rightarrow y = 3$ .
- 5.º Solución:  $x = 2, y = 3$ .

$$\text{g) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 8x + 2y = 28 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $y$ , y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $11x = 33$ .
- 3.º Resolvemos:  $x = 3$ .
- 4.º Hallamos la otra variable:  $9 - 2y = 5 \rightarrow 4 = 2y \rightarrow y = 2$ .
- 5.º Solución:  $x = 3, y = 2$ .

$$\text{h) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

- 1.º Elegimos la variable  $x$ , y multiplicamos la 1.ª ecuación por  $(-1)$ .
- 2.º Sumamos las dos ecuaciones:  $y = 1$ .
- 3.º Hallamos la otra variable:  $x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$ .
- 4.º Solución:  $x = 4, y = 1$ .

042 Resuelve estos sistemas por reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -10 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -x + 4y = 4 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} -3x + 7y = -44 \\ 2x - 9y = 38 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x - 5y = 6 \\ x + 4y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -10 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} x + y = 0 \\ -x - y = -10 \\ \hline 2y = 10 \end{array} \end{array} \rightarrow y = 5, x = -5$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -x + 4y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 2x - 8y = -8 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} 2x - 5y = 1 \\ -2x - 8y = -8 \\ \hline 3y = 9 \end{array} \end{array} \rightarrow y = 3, x = 8$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array}} \begin{cases} 6x + 8y = -4 \\ 6x + 9y = 0 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} 6x + 8y = -4 \\ -6x + 9y = 0 \\ \hline -y = -4 \end{array} \end{array} \rightarrow y = 4, x = -6$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 4 \end{array}} \begin{cases} 20x - 10y = -10 \\ 20x + 12y = 24 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} 20x - 10y = -10 \\ -20x + 12y = 24 \\ \hline -22y = -34 \end{array} \end{array} \rightarrow y = \frac{17}{11}, x = \frac{3}{11}$$

$$\begin{array}{r} \text{e) } \begin{cases} -3x + 7y = -44 \\ 2x - 9y = 38 \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array}} \begin{cases} -6x + 14y = -88 \\ -6x + 27y = -114 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} -6x + 14y = -88 \\ -6x + 27y = -114 \\ \hline -13y = 26 \end{array} \end{array} \rightarrow y = -2, x = 10$$

$$\begin{array}{r} \text{f) } \begin{cases} x - 5y = 6 \\ x + 4y = 15 \end{cases} \\ \quad \begin{array}{r} x - 5y = 6 \\ -x + 4y = 15 \\ \hline -9y = -9 \end{array} \end{array} \rightarrow y = 1, x = 11$$

# Sistemas de ecuaciones

043

Resuelve por el método más adecuado.

a)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

g)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$  Resolvemos por reducción, sumando:  $2x = 8 \rightarrow x = 4$ .

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:  $4 + y = 2 \rightarrow y = -2$ .

Solución:  $x = 4, y = -2$ .

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$  Resolvemos por reducción, sumando:  $4x = 8 \rightarrow x = 2$ .

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:  $4 + 3y = 4 \rightarrow 3y = 0 \rightarrow y = 0$ .

Solución:  $x = 2, y = 0$ .

c)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$  Por sustitución:  $x = 5 - 2y \rightarrow 2 \cdot (5 - 2y) + 5y = 11$

$\rightarrow 10 - 4y + 5y = 11 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 5 - 2 = 3$ .

Solución:  $x = 3, y = 1$ .

d)  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Resolvemos por reducción, multiplicando la 2.ª ecuación por  $(-2)$ , y sumando las dos ecuaciones:

$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases} \rightarrow -y = 2 \rightarrow y = -2 \rightarrow x - 4 = 3 \rightarrow x = 7$

Solución:  $x = 7, y = -2$ .

e)  $\begin{cases} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{cases}$  Resolvemos multiplicando la 1.ª ecuación por 3:

$\begin{cases} 3x + 3y = 27 \\ 20x - 3y = -4 \end{cases}$ , y sumando:  $23x = 23 \rightarrow x = 1 \rightarrow 1 + y = 9 \rightarrow y = 8$ .

Solución:  $x = 1, y = 8$ .

f)  $\begin{cases} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases}$  Resolvemos por reducción, multiplicando la 1.ª ecuación por  $(-1)$ :

$\begin{cases} -2x + 3y = 25 \\ 12x - 3y = 75 \end{cases}$ , y sumando:  $10x = 100 \rightarrow x = 10 \rightarrow$

$12x - 3y = 75 \rightarrow 20 - 3y = -25 \rightarrow 45 = 3y \rightarrow y = 15$ .

Solución:  $x = 10, y = 15$ .

g)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$  Resolvemos despejando la  $x$  en la 1.ª ecuación:  $x = 5 - 2y$ ,

y sustituyendo en la 2.ª ecuación:  $2 \cdot (5 - 2y) + y = 7 \rightarrow 10 - 4y + y = 7 \rightarrow$   
 $\rightarrow 3 = 3y \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3$ .

Solución:  $x = 3, y = 1$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{h) } \left. \begin{array}{l} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{array} \right\} \text{Resolvemos multiplicando la 1.ª ecuación por 5:} \\
 & \left. \begin{array}{l} 25x - 5y = 115 \\ -9x + 5y = 13 \end{array} \right\} \text{, y sumando las dos ecuaciones: } 16x = 128 \rightarrow x = 8 \rightarrow \\
 & \rightarrow 40 - y = 23 \rightarrow y = 17. \\
 & \text{Solución: } x = 8, y = 17.
 \end{aligned}$$

**044 Resuelve por el método más adecuado.**

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 4 \\ 2x - 5y = 8 \end{array} \right\} & \text{c) } \left. \begin{array}{l} 4x - 5y = 10 \\ 2x + 7y = -4 \end{array} \right\} & \text{e) } \left. \begin{array}{l} 8x + 14y = -6 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \\
 \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 6x - y = 0 \end{array} \right\} & \text{d) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 13 \\ 5x - 2y = 26 \end{array} \right\} & \text{f) } \left. \begin{array}{l} 3x - \frac{4}{5}y = 13 \\ \frac{8}{3}x - y = -4 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 4 \\ 2x - 5y = 8 \end{array} \right\} & \rightarrow x = 4 + 3y \\
 & 2x - 5y = 8 \xrightarrow{x=4+3y} 2 \cdot (4 + 3y) - 5y = 8 \rightarrow y = 0, x = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 6x - y = 0 \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{r} 3x + y = 3 \\ + 6x - y = 0 \\ \hline 9x = 3 \end{array} & \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \left. \begin{array}{l} 4x - 5y = 10 \\ 2x + 7y = -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left. \begin{array}{l} 4x - 5y = 10 \\ 4x + 14y = -8 \end{array} \right\} \\
 \begin{array}{r} 4x - 5y = 10 \\ - 4x + 14y = -8 \\ \hline -19y = 18 \end{array} & \rightarrow y = \frac{-18}{19}, x = \frac{25}{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \left. \begin{array}{l} x - 3y = 13 \\ 5x - 2y = 26 \end{array} \right\} & \rightarrow x = 13 + 3y \\
 & 5x - 2y = 26 \xrightarrow{x=13+3y} 5 \cdot (13 + 3y) - 2y = 26 \rightarrow y = -3, x = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \left. \begin{array}{l} 8x + 14y = -6 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} & \rightarrow x = -y \\
 & 8x + 14y = -6 \xrightarrow{x=-y} -8y + 14y = -6 \rightarrow y = -1, x = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \left. \begin{array}{l} 3x - \frac{4}{5}y = 13 \\ \frac{8}{3}x - y = -4 \end{array} \right\} & \rightarrow y = \frac{8}{3}x + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x - \frac{4}{5}y = 13 & \xrightarrow{y = \frac{8}{3}x + 4} 3x - \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{8}{3}x + 4 \right) = 13 \rightarrow \\
 & \rightarrow 45x - 32x - 48 = 195 \rightarrow x = \frac{243}{13}, y = \frac{376}{13}
 \end{aligned}$$

# Sistemas de ecuaciones

## 045 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVE UN SISTEMA CON PARÉNTESIS Y FRACCIONES?

Resuelve.

$$\left. \begin{aligned} 2(x - 2) - 3(y + 1) + 6 &= 17 \\ 4(x - y) - \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &= 25 \end{aligned} \right\}$$

**PRIMERO.** Se eliminan paréntesis y denominadores, y se reducen los términos semejantes en las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} 2(x - 2) - 3(y + 1) + 6 &= 17 \\ 4(x - y) - \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &= 25 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - 4 - 3y - 3 + 6 &= 17 \\ 4x - 4y - \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &= 25 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - 3y - 1 &= 17 \\ \frac{24x - 24y - 2x + 3y}{6} &= 25 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 18 \\ 22x - 21y &= 150 \end{aligned} \right\}$$

**SEGUNDO.** Se resuelve por uno de los tres métodos, en este caso por reducción.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 18 \\ 22x - 21y &= 150 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cdot(-11)} \left. \begin{aligned} -22x + 33y &= -198 \\ + 22x - 21y &= 150 \end{aligned} \right\}$$
$$12y = -48 \rightarrow y = -4$$
$$2x - 3y = 18 \xrightarrow{y=-4} 2x - 3 \cdot (-4) = 18 \rightarrow x = 3$$

## 046 Resuelve estos sistemas.



a)  $\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 &= 3 - 4y \end{aligned} \right\}$

b)  $\left. \begin{aligned} 2y - x - 1 &= 4 - y - 2x \\ 2x - y &= 1 + x \end{aligned} \right\}$

c)  $\left. \begin{aligned} 3y - 2 &= x - 2 \cdot (x + y) \\ (x + 4) + 2 \cdot (y - 2) &= 18 - x - y \end{aligned} \right\}$

d)  $\left. \begin{aligned} 3x - 2 \cdot (y - 1) &= y - x + 1 \\ 2x - y &= x + y - 9 \end{aligned} \right\}$

e)  $\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} &= \frac{11}{5} \\ \frac{4x - 5y}{2} &= 2 \end{aligned} \right\}$

f)  $\left. \begin{aligned} \frac{x + 4y}{3} + \frac{x - y}{5} &= \frac{2}{3} \\ -x + 5y &= 13 \end{aligned} \right\}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 + x + 2y \\ x - 2y - 3 &= 3 - 4y \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} -x - y &= -5 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow y = 1, x = 4 \end{aligned}$$

Solución:  $x = 4, y = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{aligned} 2y - x - 1 &= 4 - y - 2x \\ 2x - y &= 1 + x \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} -x - 3y &= -5 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow -4y = -4 \rightarrow y = 1, x = 2 \end{aligned}$$

Solución:  $x = 2, y = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{aligned} 3y - 2 &= x - 2 \cdot (x + y) \\ (x + 4) + 2 \cdot (y - 2) &= 18 - x - y \end{aligned} \right\} &\rightarrow \\ &\rightarrow \left. \begin{aligned} 3y - 2 &= x - 2x - 2y \\ x + 4 + 2y - 4 &= 18 - x - y \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} x + 5y &= 2 \\ 2x + 3y &= 18 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \left. \begin{aligned} -2x - 10y &= -4 \\ 2x + 3y &= 18 \end{aligned} \right\} &\rightarrow -7y = 14 \rightarrow y = -2, x = 12 \end{aligned}$$

Solución:  $x = 12, y = -2$ .

$$\begin{aligned} \text{d) } \left. \begin{aligned} 3x - 2 \cdot (y - 1) &= y - x + 1 \\ 2x - y &= x + y - 9 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} 3x - 2y + 2 &= y - x + 1 \\ 2x - y &= x + y - 9 \end{aligned} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \left. \begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \\ x - 2y &= -9 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left. \begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \\ -4x + 8y &= 36 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5y = 35 \rightarrow y = 7, x = 5 \end{aligned}$$

Solución:  $x = 5, y = 7$ .

$$\begin{aligned} \text{e) } \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} &= \frac{11}{5} \\ \frac{4x - 5y}{2} &= 2 \end{aligned} \right\} &\begin{aligned} \cdot 10 &\rightarrow 5x - 2y = 22 \\ \cdot 2 &\rightarrow 4x - 5y = 4 \end{aligned} \rightarrow x = 1 + \frac{5y}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 2y = 22 &\xrightarrow{x = 1 + \frac{5y}{4}} 5 \cdot \left(1 + \frac{5y}{4}\right) - 2y = 22 \rightarrow \\ &\rightarrow 20 + 25y - 8y = 88 \rightarrow y = 4, x = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \left. \begin{aligned} \frac{x + 4y}{3} + \frac{x - y}{5} &= \frac{2}{3} \\ -x + 5y &= 13 \end{aligned} \right\} &\begin{aligned} \cdot 15 &\rightarrow 5 \cdot (x + 4y) + 3 \cdot (x - y) = 2 \cdot 5 \\ &\rightarrow -x + 5y = 13 \end{aligned} \rightarrow \\ &\rightarrow \left. \begin{aligned} 8x + 17y &= 10 \\ -x + 5y &= 13 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = 5y - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x + 17y = 10 &\xrightarrow{x = 5y - 13} 8 \cdot (5y - 13) + 17y = 10 \rightarrow \\ &\rightarrow 40y - 104 + 17y = 10 \rightarrow y = 2, x = -3 \end{aligned}$$

# Sistemas de ecuaciones

## 047 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXPRESAN CIERTOS ENUNCIADOS MEDIANTE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS?

Expresa mediante ecuaciones con dos incógnitas estos enunciados.

- La suma de dos números es 33.
- Cuatro sillas y una mesa cuestan 260 €.
- Jaime pesa 22 kg más que su perro.
- El ancho de un rectángulo es el doble que su altura.

**PRIMERO.** Se asigna una incógnita a cada dato desconocido.

**SEGUNDO.** Se relacionan los datos conocidos y desconocidos mediante una igualdad.

- La suma de dos números es 33  $\longrightarrow x + y = 33$
- 4 sillas y 1 mesa cuestan 260 €  $\longrightarrow 4x + y = 260$
- Jaime pesa 22 kg más que su perro  $\rightarrow x + 22 = y$
- El ancho es el doble que la altura  $\rightarrow x = 2y$

Datos desconocidos	Incógnitas
Dos números	$x$ , un número $y$ , el otro número
Precio de una silla y una mesa	$x$ , precio de una silla $y$ , precio de una mesa
Peso de Jaime y su perro	$x$ , peso de Jaime $y$ , peso del perro
Ancho y altura de un rectángulo	$x$ , ancho $y$ , altura

## 048 Expresa mediante una ecuación lineal con dos incógnitas estos enunciados, e indica qué representan las incógnitas.

- La suma de dos números es 15.
- La mitad de un número más el doble de otro es igual a 52.
- La diferencia entre las edades de un padre y un hijo es 28 años.
- He recorrido 20 km más que tú.
- Tengo 16,50 € en monedas de 1 € y 50 céntimos.
- El precio de 2 kg de naranjas y 3 kg de manzanas es 5,80 €.
- Dos bocadillos y tres refrescos cuestan 14 €.
- El perímetro de un rectángulo es 32 m.

¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? Da una solución para cada una.

- Un número:  $x$ . Otro número:  $y$ . Ecuación:  $x + y = 15$ . Solución:  $x = 7, y = 8$ .
- Un número:  $x$ . Otro número:  $y$ . Ecuación:  $\frac{x}{2} + 2y = 52$ .  
Solución:  $x = 4, y = 25$ .
- Edad del padre:  $x$ . Edad del hijo:  $y$ . Ecuación:  $x - y = 28$ .  
Solución:  $x = 50, y = 12$ .
- Kilómetros recorridos por uno:  $x$ . Kilómetros recorridos por otro:  $y$ .  
Ecuación:  $x - y = 20$ . Solución:  $x = 35, y = 15$ .
- Monedas de 1 €:  $x$ . Monedas de 50 céntimos:  $y$ .  
Ecuación:  $x + y \cdot 0,50 = 16,50$ . Solución:  $x = 10, y = 17$ .
- Precio de 1 kg de naranjas:  $x$ . Precio de 1 kg de manzanas:  $y$ .  
Ecuación:  $2x + 3y = 5,80$ . Solución:  $x = 2, y = 0,60$ .

- g) Precio de un bocadillo:  $x$ . Precio de un refresco:  $y$ . Ecuación:  $2x + 3y = 14$ .  
Solución:  $x = 4, y = 2$ .
- h) Altura:  $x$ . Ancho:  $y$ . Ecuación:  $2x + 2y = 32$ . Solución:  $x = 11, y = 5$ .  
Todas las ecuaciones tienen infinitas soluciones.

049

Asocia a cada ecuación de la actividad anterior otra ecuación que resulte del mismo apartado en esta actividad. Calcula la solución del sistema de ecuaciones lineales que forman.

- a) Su diferencia es 1.  
b) La cuarta parte del primer número más la tercera parte del segundo es 16.  
c) La edad del padre es cinco veces la del hijo.  
d) He recorrido el doble de distancia que tú.  
e) El número de monedas es 23.  
f) El kilo de naranjas vale 40 céntimos más que el de manzanas.  
g) Los bocadillos cuestan el doble que los refrescos.  
h) La altura es tres quintas partes de la base.

- a) Un número:  $x$ . Otro número:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x = 8, y = 7$$

- b) Un número:  $x$ . Otro número:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + 2y = 52 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 16 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 104 \\ 3x + 4y = 192 \end{array} \right\} \rightarrow x = 44, y = 15$$

- c) Edad del padre:  $x$ . Edad del hijo:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 28 \\ x = 5y \end{array} \right\} \rightarrow x = 35, y = 7$$

- d) Kilómetros recorridos por uno:  $x$ . Kilómetros recorridos por otro:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 20 \\ x = 2y \end{array} \right\} \rightarrow x = 40, y = 20$$

- e) Monedas de 1 €:  $x$ . Monedas de 50 céntimos:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x + 0,50y = 16,50 \\ x + y = 23 \end{array} \right\} \rightarrow x = 10, y = 13$$

- f) Precio de 1 kg de naranjas:  $x$ . Precio de 1 kg de manzanas:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5,80 \\ x = y + 0,40 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1,40; y = 1$$

- g) Precio de un bocadillo:  $x$ . Precio de un refresco:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x = 2y \end{array} \right\} \rightarrow x = 4, y = 2$$

- h) Altura:  $x$ . Ancho:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 32 \\ x = \frac{3}{5}y \end{array} \right\} \rightarrow x = 6, y = 10$$

# Sistemas de ecuaciones

- 050** Ana tiene 5 cromos más que Juan y entre los dos suman 59 cromos. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?



Cromos de Ana:  $x$ . Cromos de Juan:  $y$

Suma:  $x + y$

Diferencia:  $x - y$

Sistema:  $\left. \begin{array}{l} x + y = 59 \\ x - y = 5 \end{array} \right\}$ , y sumando las dos ecuaciones:  $2x = 64 \rightarrow$

$\rightarrow x = 32, y = 27$ . Ana tiene 32 cromos y Juan tiene 27 cromos.

- 051** En la clase de Alicia hay 21 alumnos, siendo 7 chicos más que chicas. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en la clase?

Chicos:  $x$ . Chicas:  $y$

Suma:  $x + y$

Diferencia:  $x - y$

Sistema:  $\left. \begin{array}{l} x + y = 21 \\ x - y = 7 \end{array} \right\}$ , y sumando las dos ecuaciones:  $2x = 28 \rightarrow$

$\rightarrow x = 14, y = 7$ . Hay 14 alumnos y 7 alumnas.

- 052** Juan tiene un total de 13 bolígrafos y rotuladores, y hay 3 rotuladores más que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos y rotuladores tiene?

Rotuladores:  $x$ . Bolígrafos:  $y$

Suma:  $x + y$

Diferencia:  $x - y$

Sistema:  $\left. \begin{array}{l} x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{array} \right\}$ , y sumando las dos ecuaciones:  $2x = 16 \rightarrow$

$\rightarrow x = 8, y = 5$ . Juan tiene 8 rotuladores y 5 bolígrafos.

- 053** María lleva en el monedero varias monedas de 20 y 5 céntimos. Di cuántas monedas tiene de cada tipo si son 12 monedas y suman un total de 1,50 €.

Monedas de 20 céntimos:  $x$

Monedas de 5 céntimos:  $y$

Sistema:  $\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 0,20x + 0,05y = 1,5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -0,05x - 0,05y = -0,6 \\ 0,2x + 0,05y = 1,5 \end{array} \right\}$

y sumando las dos ecuaciones:  $0,1 \cdot 5x = 0,9 \rightarrow x = 6, y = 6$ .

María tiene 6 monedas de cada tipo.

- 054** En un taller, el número de coches es igual al doble del número de motos más 2. Calcula el número de coches y motos si en total hay 48 ruedas.



Coches:  $x$ . Motos:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y + 2 \\ 4x + 2y = 48 \end{array} \right\}$$

$$4x + 2y = 48 \xrightarrow{x=2y+2} 8y + 8 + 2y = 48 \rightarrow y = 4, x = 10$$

Hay 10 coches y 4 motos.

- 055** Por un desierto avanza una caravana formada por camellos y dromedarios, con un total de 440 patas y 160 jorobas. ¿Cuántos camellos y dromedarios hay en la caravana?



Dromedarios:  $x$ . Camellos:  $y$

Total de patas:  $4x + 4y = 440$

Total de jorobas:  $x + 2y = 160$

$$\text{Sistema: } \left. \begin{array}{l} 4x + 4y = 440 \\ x + 2y = 160 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 4y = 440 \\ -2x - 4y = -320 \end{array} \right\} \rightarrow 2x = 120 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 60 \rightarrow 60 + 2y = 160 \rightarrow y = 50$$

Hay 60 dromedarios y 50 camellos.

- 056** Ana recibe el doble de dinero que su hermana como paga semanal, y entre las dos suman 30 €. ¿Cuál es la paga de cada una?

Paga de Ana:  $x$ . Paga de su hermana:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 30 \end{array} \right\}$$

$$x + y = 30 \xrightarrow{x=2y} 3y = 30 \rightarrow y = 10, x = 20$$

Ana recibe 20 € de paga y su hermana 10 €.

# Sistemas de ecuaciones

057



Una empresa de refrescos ha envasado 5.000 ℓ en 3.000 botellas de 1,5 ℓ y 2 ℓ.  
¿Cuántas botellas ha empleado de cada clase?

Botellas de 1,5 ℓ:  $x$ . Botellas de 2 ℓ:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} 1,5x + 2y = 5.000 \\ x + y = 3.000 \end{array} \right\} \rightarrow y = 3.000 - x$$

$$1,5x - 2y = 5.000 \xrightarrow{y=3.000-x} 1,5x + 6.000 - 2x = 5.000 \rightarrow \\ \rightarrow x = 2.000, y = 1.000$$

Ha empleado 2.000 botellas de 1,5 ℓ y 1.000 botellas de 2 ℓ.

058

## HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PLANTEAN LOS PROBLEMAS DE EDADES MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES?

Plantea el siguiente problema:

«Calcula las edades de una madre y su hija, sabiendo que hace cuatro años la edad de la madre era el triple que la de la hija, y que dentro de ocho años será el doble».

PRIMERO. Se identifican las incógnitas.

Edad de la hija  $\longrightarrow x$

Edad de la madre  $\rightarrow y$

SEGUNDO. Se indican los datos del problema.

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 8 años
Hija	$x - 4$	$x$	$x + 8$
Madre	$y - 4$	$y$	$y + 8$

TERCERO. Se escriben las ecuaciones.

Hace cuatro años la edad de la madre era el triple que la de la hija  $\rightarrow y - 4 = 3 \cdot (x - 4)$

Dentro de ocho años será el doble  $\longrightarrow y + 8 = 2 \cdot (x + 8)$

059



Halla las edades de dos personas si hace 10 años la primera tenía cuatro veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será el doble que la de la segunda.

Edades:  $x, y$

Diferencia:  $x - y$

Triple de la 1.<sup>a</sup> ecuación menos cuatro veces la 2.<sup>a</sup>:  $3x - 4y$

Sistema:  $\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{array} \right\}$ , y despejando la  $x$  de la 1.<sup>a</sup> ecuación y sustituyendo

$$\text{en la 2.ª ecuación: } 3 \cdot (3 + y) - 4y = 2 \rightarrow 9 + 3y - 4y = 2 \rightarrow \\ \rightarrow y = 7, x = 10$$

Una persona tiene 10 años y la otra tiene 7 años.

**060** ●● Pablo tiene 8 años, y su hermana, 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Pablo será el doble que la de su hermana?

Tiempo que ha de pasar:  $x$

La edad de Pablo es el doble que la de su hermana:

$$8 + x = 2 \cdot (2 + x) \rightarrow 8 + x = 4 + 2x \rightarrow x = 4$$

Han de transcurrir 4 años.

**061** ●● Tomás es 5 años mayor que Elena y, dentro de 10 años, la edad de Tomás será  $\frac{4}{3}$  de la edad de Elena. ¿Qué edad tiene Tomás?

Edad de Tomás:  $x$ . Edad de Elena:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + 10 = \frac{4 \cdot (y + 10)}{3} \end{array} \right\}$$

$$x + 10 = \frac{4 \cdot (y + 10)}{3} \xrightarrow{x=y+5} y + 5 + 10 = \frac{4 \cdot (y + 10)}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3y + 45 = 4y + 40 \rightarrow y = 5, x = 10$$

Tomás tiene 10 años y Elena tiene 5 años.

**062** ●● Cambiamos el valor de varias monedas de 1 céntimo de euro por monedas de 5 céntimos, obteniendo 60 monedas menos. ¿Cuántas monedas son de cada clase?

Monedas de 1 céntimo:  $x$ . Monedas de 5 céntimos:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5y \\ x = y + 60 \end{array} \right\}$$

$$5y = y + 60 \rightarrow y = 15, x = 75$$

Son 75 monedas de 1 céntimo o 15 monedas de 5 céntimos.

**063** ●●● Encuentra un número de tres cifras que cumpla las siguientes condiciones.

- Que sea múltiplo de 9.
- Cuya cifra de las decenas sea 5.
- Que intercambiando la cifra de unidades y centenas, disminuya en 198.

El número será de la forma  $x5y$  o, lo que es lo mismo,  $100x + 50 + y$ .

Por ser múltiplo de 9, la suma:  $x + 5 + y$  es múltiplo de 9.

Y por la tercera condición:

$$100x + 50 + y = 100y + 50 + x + 198 \rightarrow 99x - 99y = 198 \rightarrow x - y = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 2 + y$$

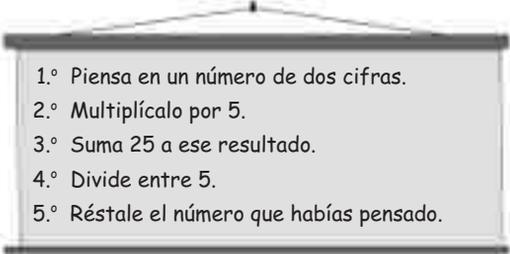
Por tanto, tenemos que  $x + 5 + y = 2 + y + 5 + y = 2y + 5$  es múltiplo de 9, y como debe estar entre 1 y 9,  $y$  es un número entero,  $y = 1$ .

El número buscado es 351.

# Sistemas de ecuaciones

064

Realiza estos cálculos y contesta.

- 
- 1.º Piensa en un número de dos cifras.
  - 2.º Multiplícalo por 5.
  - 3.º Suma 25 a ese resultado.
  - 4.º Divide entre 5.
  - 5.º Réstale el número que habías pensado.

Prueba con otros números. ¿Obtienes siempre el mismo resultado?  
¿Sabrías expresar algebraicamente lo que has hecho?

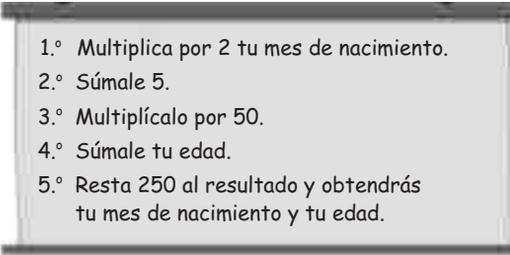
- 1.º Piensa en un número:  $x$ .
- 2.º Multiplícalo por 5:  $5x$ .
- 3.º Súmale 25:  $5x + 25$ .
- 4.º Divide entre 5:  $(5x + 25) : 5 = x + 5$ .
- 5.º Réstale el número:  $x + 5 - x = 5$ .

Por tanto, el resultado es siempre 5.

065

Un mes se puede expresar con una sola cifra como junio, que sería el mes 6, o con dos como octubre, noviembre o diciembre. Pero en cualquier caso se puede escribir como  $10 \cdot a + b$ . Así, por ejemplo, marzo se puede escribir como  $10 \cdot a + b$ , donde  $a = 0$  y  $b = 3$ ; y diciembre como  $10 \cdot a + b$ , donde  $a = 1$  y  $b = 2$ .

Siguiendo estas indicaciones, explica por qué se puede adivinar la edad y el mes de nacimiento de cualquier persona siguiendo estos pasos.

- 
- 1.º Multiplica por 2 tu mes de nacimiento.
  - 2.º Súmale 5.
  - 3.º Multiplícalo por 50.
  - 4.º Súmale tu edad.
  - 5.º Resta 250 al resultado y obtendrás tu mes de nacimiento y tu edad.

- 1.º Multiplica por 2 el mes de nacimiento:  $20a + 2b$ .
- 2.º Súmale 5:  $20a + 2b + 5$ .
- 3.º Multiplícalo por 50:  $50 \cdot (20a + 2b + 5) = 1.000a + 100b + 250$ .
- 4.º Súmale tu edad ( $10x + y$ ):  $1.000a + 100b + 250 + 10x + y$ .
- 5.º Réstale 250:  
$$1.000a + 100b + 250 + 10x + y - 250 = 1.000a + 100b + 10x + y$$

El resultado es  $abxy$ , siendo las dos primeras cifras el mes, y las otras, la edad.

## EN LA VIDA COTIDIANA

066

Alfonso tiene parte de su familia en Australia y, junto con su hermana, proyectan hacer un viaje para conocer a sus primos.



Han ido a la agencia de viajes para comprar los billetes de avión. Volarán desde Madrid hasta Sidney, donde les esperan sus primos.

Según la información que aparece en el billete de ida, salen de Madrid el día 2 de mayo a las 10:00 h (hora de España) y llegan a Sidney a las 11:00 h (hora de Australia), pero del día 3 de mayo.

2 Mayo  
10:00 h



3 Mayo  
11:00 h

Y según el billete de vuelta, regresan desde Sidney el día 22 de mayo a las 11:00 h (hora de Australia) con destino a Madrid y llegan a las 16:00 h (hora de España) del mismo día.

Alfonso no sale de su asombro: en la ida no llegan a Sidney hasta el día siguiente, y, sin embargo, en la vuelta llegan el mismo día, tan solo 5 horas después de partir.

El avión de ida y de vuelta es el mismo; por tanto, la duración del vuelo será la misma en ambos sentidos.

¿Cuántas horas de vuelo hay entre Madrid y Sidney y cuál es la diferencia horaria entre estas dos ciudades?

Duración del vuelo:  $x$ . Diferencia horaria:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 25 \\ x - y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow x = 15, y = 10$$

La duración del vuelo es 15 horas y la diferencia horaria es 10 horas.



# Sistemas de ecuaciones

067

Cada vez que Mari Pili llama a sus amigas desde casa utilizando su teléfono móvil se produce la misma discusión.



Para demostrar a su madre lo que dice, Mari Pili ha extraído un resumen de las dos últimas facturas de teléfono.

	Octubre	Diciembre
Minutos teléfono fijo	960	950
Minutos teléfono móvil	520	610
Total (€)	141,60 €	157,30 €

¿Es cierto lo que dice Mari Pili?

Precio del minuto en fijo:  $x$

Precio del minuto en móvil:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} 960x + 520y = 141,60 \\ 950x + 610y = 157,30 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 96x + 52y = 14,16 \\ 95x + 61y = 15,73 \end{array} \right\}$$

Restando las dos ecuaciones:  $x = 9y - 1,57$ .

$$\begin{aligned} 950x + 610y = 157,30 &\xrightarrow{x=9y-1,57} 950 \cdot (9y - 1,57) + 610y = 157,30 \rightarrow \\ &\rightarrow 8.550y - 1.491,50 + 610y = 157,30 \rightarrow \\ &\rightarrow 9.120y = 1.648,80 \rightarrow y = 0,18 \end{aligned}$$

$$x = 9y - 1,57 \xrightarrow{y=0,18} x = 0,06$$

El coste del minuto de teléfono fijo es 0,06 céntimos y el de móvil es 0,18 céntimos, por lo que Mari Pili no tiene razón.

068

Los precios de la cafetería del instituto han vuelto a subir. Al comenzar el año aplican a cada precio un porcentaje fijo de subida que corresponde a la subida general de los precios de ese año (IPC). Este año el incremento tenía que ser del 4 %, pero los alumnos creemos que han aplicado una subida mayor.



La semana pasada, antes de aumentar los precios, el bocadillo de tortilla valía 1 € más que el refresco. En esa semana, dos refrescos y un bocadillo nos costaron 4 €. Con los precios actuales, tres refrescos y dos bocadillos nos han costado 7,70 €. ¿En qué tanto por ciento se han incrementado los precios?

Precio anterior del bocadillo:  $x$

Precio anterior del refresco:  $y$

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 1 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow y + 1 + 2y = 4 \rightarrow y = 1$$

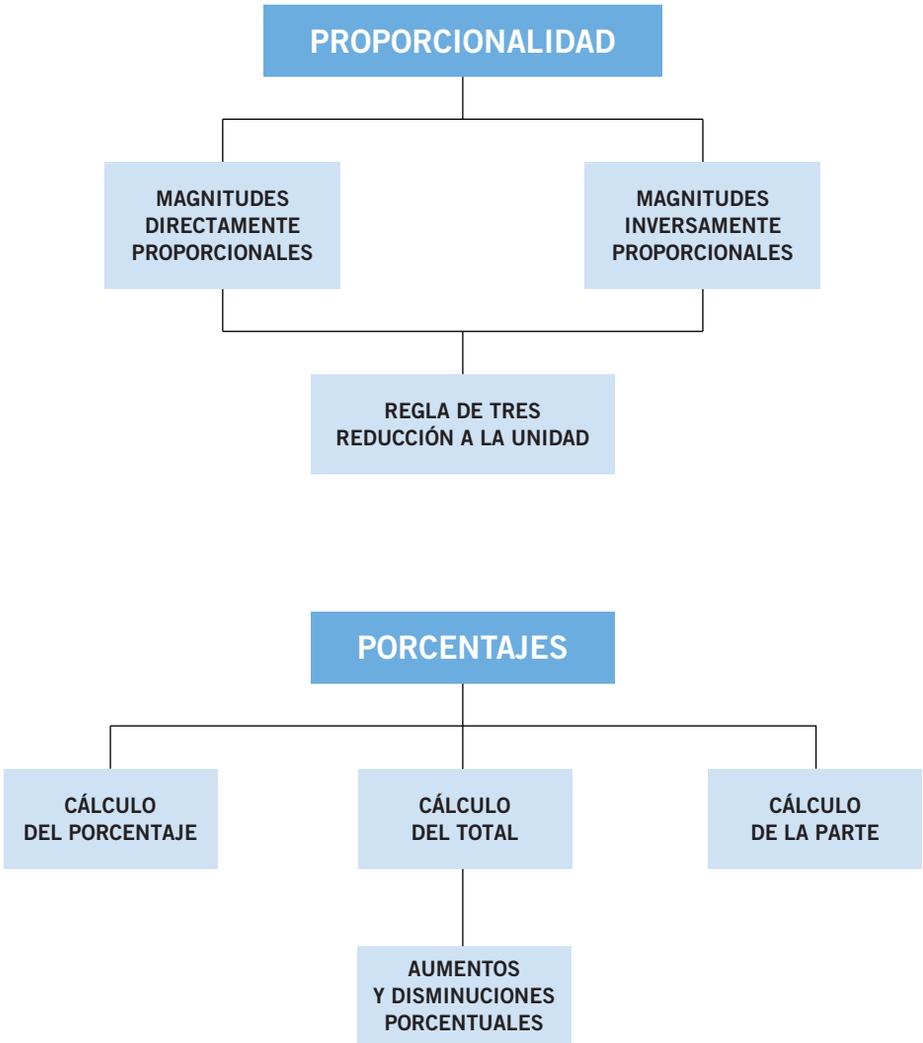
$$x = 1 + 1 = 2$$

El bocadillo costaba 2 € y el refresco 1 €.

Con el precio anterior 3 refrescos y 2 bocadillos habrían costado:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ €}.$$

$$\frac{7,70}{7} = 1,10 \rightarrow \text{El aumento de precio es del } 10\%.$$



## Cuando el verde es rojo

El joven de 26 años, John Dalton, era consolado por su hermano mayor, Jonathan, mientras paseaban por la ciudad inglesa de Kendal.

–John, no te lo tomes tan a pecho. Seguro que mamá no quiso ofenderte.

John no parecía muy convencido y miraba incrédulo la prenda que había regalado a su madre, y que esta le había devuelto visiblemente enfadada.

–No entiendo por qué no le gusta, el dependiente me aseguró que el paño era de primera calidad.

–Ya sabes que mamá es muy religiosa y el color rojo... –le contestó su hermano Jonathan.

–Tú tampoco te habías dado cuenta –protestó John y, mientras arrojaba la prenda escarlata al río, comenzó a pensar: ¿Por qué su hermano y él mismo no podían distinguir los colores?

Dos años después, en 1793, John Dalton publicaba un trabajo donde se describía el tipo de enfermedad que él mismo sufría, conocida a partir de entonces como daltonismo.

Dalton adquirió fama y pasó a la historia de la ciencia por su teoría atómica, donde juega un papel fundamental la proporcionalidad numérica.

Por ejemplo, una molécula de agua tiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Su teoría afirma que, independientemente de la cantidad de agua, la cantidad de átomos de hidrógeno y oxígeno estará siempre en la misma proporción.

*Si en una determinada cantidad de agua hay 1 billón de átomos de oxígeno, ¿cuántos habrá de hidrógeno?*

***2 átomos de H → 1 átomo de O***  
***x átomos de H → 1 billón de átomos de O***  
***x = 2 billones***  
***Habrán 2 billones de átomos de hidrógeno.***



# Proporcionalidad numérica

## EJERCICIOS

**001** Escribe las razones correspondientes a las siguientes situaciones.

- a) De las 350 páginas que tiene un libro he leído 95.
- b) Hemos recorrido 260 km de un trayecto de 600 km.
- c) Silvia tiene 28 de un total de 72 cromos.
- d) De los 32 dientes que tenemos, al bebé le han salido 4.

a)  $\frac{95}{350}$

c)  $\frac{28}{72}$

b)  $\frac{260}{600}$

d)  $\frac{4}{32}$

**002** Escribe dos números cuya razón sea  $\frac{5}{6}$  y que no sean 5 y 6.

Serán válidas las parejas del tipo  $5x, 6x$ , para cualquier valor de  $x$ , por ejemplo 10 y 12.

**003** Calcula el número  $x$ , sabiendo que:

- a)  $x$  es a 4 como 20 es a 2.
- b) 3 es a 4 como  $x$  es a 8.
- c) 9 es a  $x$  como  $x$  es a 4.

a)  $\frac{x}{4} = \frac{20}{2} \rightarrow x = 40$

b)  $\frac{3}{4} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 6$

c)  $\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

**004** Calcula el término que falta en estas proporciones.

a)  $\frac{8}{5} = \frac{12}{x}$

c)  $\frac{4}{x} = \frac{32}{16}$

e)  $\frac{x}{25} = \frac{4}{5}$

b)  $\frac{8}{12} = \frac{x}{6}$

d)  $\frac{x}{15} = \frac{18}{5}$

f)  $\frac{4}{8} = \frac{x}{16}$

a)  $\frac{8}{5} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$

d)  $\frac{x}{15} = \frac{18}{5} \rightarrow x = 54$

b)  $\frac{8}{12} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 4$

e)  $\frac{x}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow x = 20$

c)  $\frac{4}{x} = \frac{32}{16} \rightarrow x = 2$

f)  $\frac{4}{8} = \frac{x}{16} \rightarrow x = 8$

005 Si  $\frac{4}{x} = \frac{x}{100}$ , ¿cuánto vale  $x$ ?

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{100} \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = \pm 20$$

006 Halla el valor de  $a$  y  $c$ , sabiendo que  $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$  y que  $a + c = 30$ .

$$\frac{a}{2} = \frac{c}{3} \rightarrow 3a = 2c \rightarrow c = \frac{3a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = \frac{3a}{2} \\ a + c = 30 \end{array} \right\} \rightarrow a + \frac{3a}{2} = 30 \rightarrow a = 12, c = 18$$

007 «Un sobre de cromos cuesta 1,50 €.» Indica las magnitudes que intervienen en este enunciado.

Las magnitudes son  $N.^\circ$  de sobres de cromos y Precio.

008 Una revista cuesta 4,20 €. ¿Son directamente proporcionales las magnitudes  $N.^\circ$  de revistas – Precio?

Sí, las magnitudes son directamente proporcionales.

009 Completa la tabla para que corresponda a los valores de dos magnitudes directamente proporcionales.

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

1	2	3	4	5	6	7
10	20	30	40	50	60	70

La constante de proporcionalidad es 10.

010 Una máquina produce 800 tornillos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina en fabricar 1.000 tornillos?

$$\begin{array}{l} \text{Tornillos} \quad \text{Horas} \\ 800 \longrightarrow 5 \\ 1.000 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Tornillos} \\ \text{Horas} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{800}{1.000} = \frac{5}{x} \rightarrow 800 \cdot x = 5 \cdot 1.000 \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{5.000}{800} = 6,25 \text{ horas}$$

011 Al traducir un libro cobro 6 € por página. Si me han pagado 2.532 €, ¿cuántas páginas he traducido?

$$\begin{array}{l} \text{Páginas} \quad \text{Euros} \\ 1 \longrightarrow 6 \\ x \longrightarrow 2.532 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Páginas} \\ \text{Euros} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{6}{2.532} \rightarrow x = \frac{2.532}{6} = 422 \text{ páginas}$$

# Proporcionalidad numérica

- 012** Una familia bebe 2,5 litros de leche diarios. ¿Cuántos litros consume a la semana?

$$\begin{array}{l} \text{Leche} \qquad \text{Días} \\ 2,5 \longrightarrow 1 \\ x \longrightarrow 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Leche} \\ \text{Días} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{2,5}{x} = \frac{1}{7} \rightarrow 2,5 \cdot 7 = 1 \cdot x \rightarrow x = 17,5 \text{ litros}$$

- 013** Si para llevar 15 panes necesito 3 cestas, con 1 cesta tengo para...

$$\begin{array}{l} \text{Cestas} \qquad \text{Panes} \\ 3 \longrightarrow 15 \\ 1 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Cestas} \\ \text{Panes} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \text{ panes}$$

- 014** Completa la siguiente tabla de valores inversamente proporcionales.

<b>Magnitud A</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
<b>Magnitud B</b>	<b>24</b>	12	<b>8</b>	6	<b>6</b>	4

- 015** Dieciocho obreros realizan un trabajo en 30 días. Completa los valores de la tabla.

<b>Obreros</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>18</b>	<b>36</b>	<b>72</b>
<b>Días</b>	180	60	<b>30</b>	15	7,5

- 016** ¿Son inversamente proporcionales?

a) Velocidad y tiempo empleado.

b) Edad y estatura de una persona.

c) Consumo de electricidad y horas de luz solar.

a) Sí, son inversamente proporcionales.

b) No son inversamente proporcionales.

c) No son inversamente proporcionales, ya que el consumo no depende solo de la luz.

- 017** Un ganadero tiene alpacas de paja para alimentar a 20 vacas durante 60 días. Si compra 10 vacas más, ¿para cuántos días tendrá alimento?

$$\begin{array}{l} \text{N.º de vacas} \qquad \text{Días} \\ 20 \longrightarrow 60 \\ 30 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{N.º de vacas} \\ \text{Días} \end{array}} \right\} \rightarrow \text{Proporcionalidad inversa} \rightarrow \frac{20}{30} = \frac{x}{60} \rightarrow \\ \rightarrow 20 \cdot 60 = 30 \cdot x \rightarrow x = \frac{1.200}{30} = 40 \text{ días}$$



# Proporcionalidad numérica

**022** Halla el valor de  $x$ , sabiendo que:

a) 30 % de  $x$  es 20

b) 4,5 % de  $x$  es 152

c) 25 % de  $x$  es 289

d) 67 % de  $x$  es 725

$$a) \frac{30 \cdot x}{100} = 20 \longrightarrow x = \frac{20 \cdot 100}{30} = 66,67$$

$$b) \frac{4,5 \cdot x}{100} = 152 \longrightarrow x = \frac{152 \cdot 100}{4,5} = 3.377,78$$

$$c) \frac{25 \cdot x}{100} = 289 \longrightarrow x = \frac{289 \cdot 100}{25} = 1.156$$

$$d) \frac{67 \cdot x}{100} = 725 \longrightarrow x = \frac{725 \cdot 100}{67} = 1.082,09$$

**023** Un equipo ha perdido el 25 % de los 32 partidos que ha jugado esta temporada. ¿Cuántos partidos ha ganado?

Ha ganado el 75 % de los partidos:  $\frac{75 \cdot 32}{100} = 24$  partidos.

**024** Contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tanto por ciento es 7 de 15?

b) ¿Qué tanto por ciento es 3 de 18?

c) ¿Y qué tanto por ciento es 90 de 125?

$$a) \frac{x \cdot 15}{100} = 7 \longrightarrow x = \frac{7 \cdot 100}{15} = 46,67 \rightarrow \text{Es el } 46,67 \%$$

$$b) \frac{x \cdot 18}{100} = 3 \longrightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{18} = 16,67 \rightarrow \text{Es el } 16,67 \%$$

$$c) \frac{x \cdot 125}{100} = 90 \longrightarrow x = \frac{90 \cdot 100}{125} = 72 \longrightarrow \text{Es el } 72 \%$$

**025** Carlos paga de impuestos un 22 % de su salario. Si este año sus ingresos ascienden a 25.500 €, ¿cuánto tendrá que pagar de impuestos? ¿Qué cantidad neta ha cobrado?

Operando, tenemos que:  $\frac{22 \cdot 25.500}{100} = 5.610$  €.

Carlos tendrá que pagar 5.610 € de impuestos.

Por tanto, ha cobrado:  $25.500 - 5.610 = 19.890$  € netos.

- 026** En la carta de un restaurante los precios no incluyen el 7 % de IVA. Un cliente ha comido una ensalada que cuesta 3,16 €, un lenguado cuyo precio es 6,25 € y un postre de 4,78 €. ¿Cuánto pagará en total el cliente?

El precio de la comida sin IVA es:  $3,16 + 6,25 + 4,78 = 14,19$  €.

Operando, tenemos que:  $\frac{7 \cdot 14,19}{100} = 0,99$  €.

El precio final es:  $14,19 + 0,99 = 15,18$  €.

- 027** Carmen gasta el 26 % de su sueldo en comida y el 35 % en pagar el alquiler. Si gana 1.500 € al mes, ¿cuánto se gasta en cada concepto? ¿Qué porcentaje le queda para otros gastos?

El 26 % de 1.500 € es:  $\frac{26 \cdot 1.500}{100} = 390$  € gasta en comida.

El 35 % de 1.500 € es:  $\frac{35 \cdot 1.500}{100} = 525$  € gasta en alquiler.

Para otros gastos le queda:  $100 - (26 + 35) = 39$  % de su salario.

- 028** Una ciudad de 135.000 habitantes ha perdido en los últimos años el 8 % de su población. Halla los habitantes que tiene en la actualidad.

El 8 % de 135.000 es:  $\frac{8 \cdot 135.000}{100} = 10.800$  habitantes ha perdido.

En la actualidad hay:  $135.000 - 10.800 = 124.200$  habitantes.

- 029** ¿Cuál era el precio de un ordenador que está rebajado un 18 % si me ha costado 900 €?

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \longrightarrow x \\ 82\% \longrightarrow 900 \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{90.000}{82} = 1.097,56 \text{ €}$$

- 030** ¿Cuánto vale  $x$  si el 22 % de  $x$  es 44?

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \longrightarrow x \\ 22\% \longrightarrow 44 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{4.400}{22} = 200$$

- 031** Ana trabaja desde hace 10 años en una empresa, y ha cobrado 235 € por antigüedad, que es el 15 % de su salario. ¿Cuál es el sueldo de Teo si gana un 5 % menos que Ana?

El sueldo de Ana es:

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \longrightarrow x \\ 15\% \longrightarrow 235 \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{23.500}{15} = 1.566,67 \text{ €}$$

El sueldo de Teo es:

$$\left. \begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 1.566,67 \text{ €} \\ 95\% \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{1.566,67 \cdot 95}{100} = 148.833,33 \text{ €}$$

# Proporcionalidad numérica

- 032** La paga mensual de Sara es 50 €. Si sus padres le han subido un 10 %, ¿cuánto percibe ahora?

<u>Antes</u>		<u>Ahora</u>	
100 %	→	110 %	} → 100 · x = 50 · 110 → x = 55 €
50	→	x	

- 033** A Juan le han puesto una multa por exceso de velocidad de 90 €. Transcurrido el período voluntario de pago, ahora se le añade un 20 % de recargo. ¿Cuánto tendrá que pagar?



<u>Antes</u>		<u>Ahora</u>	
100 %	→	120 %	} → 100 · x = 90 · 120 → x = 108 €
90	→	x	

- 034** Un fabricante de calzado vende sus zapatos al 120 % del precio que le cuesta fabricarlos. Si el coste de fabricación de unos zapatos es 14 €, ¿por cuánto los venderá?



100 %	→	14 €	} → x = \frac{120 \cdot 14}{100} = 16,80 €
120 %	→	x	

- 035** La Seguridad Social paga un 60 % del precio de algunas medicinas. Si he comprado un medicamento, que está cubierto por la Seguridad Social, cuyo precio de venta al público es de 19 €, ¿cuánto he tenido que pagar?

100 %	→	19 €	} → x = \frac{40 \cdot 19}{100} = 7,60 €
40 %	→	x	

## ACTIVIDADES

- 036** A una vasija con 4 ℓ de vino le añaden 0,4 ℓ de agua. Averigua la razón entre vino y agua.

La razón es:  $\frac{4 \text{ ℓ vino}}{0,4 \text{ ℓ agua}} = 10$ .

Si la razón es 10, por cada 10 ℓ de vino hay 1 ℓ de agua.

- 037** Por término medio dormimos 8 horas al día. ¿Cuál es la razón entre el tiempo que dormimos y el tiempo total? ¿Cuánto tiempo has dormido, de media, hasta la actualidad?



La razón es:  $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ .

El número de horas de sueño es la edad (en días) multiplicada por 8.

- 038** Expresa la razón anterior para estos casos.

- a) Tiempo despierto y tiempo total.
- b) Tiempo dormido y tiempo despierto.
- c) Tiempo total y tiempo dormido.

a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{3}{1}$

- 039** De 500 habitantes de un pueblo, 300 son mujeres. Halla la razón entre hombres y mujeres.

En el pueblo hay:  $500 - 300 = 200$  hombres.

La razón entre hombres y mujeres es  $\frac{2}{3}$ .

- 040** Averigua si son correctas estas proporciones.

a)  $\frac{10}{4} = \frac{16}{6,4}$       b)  $\frac{5}{2} = \frac{8}{3,2}$

Para averiguarlo hay que comprobar si el producto de extremos es igual que el producto de medios.

a)  $10 \cdot 6,4 = 64$ ;  $4 \cdot 16 = 64 \rightarrow$  Es correcta.

b)  $5 \cdot 3,2 = 16$ ;  $2 \cdot 8 = 16 \rightarrow$  Es correcta.

# Proporcionalidad numérica

**041** Forma proporciones a partir de las igualdades.

a)  $5 \cdot 8 = 20 \cdot 2$

c)  $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4$

b)  $7 \cdot 4 = 14 \cdot 2$

d)  $6 \cdot 5 = 15 \cdot 2$

a)  $5 \cdot 8 = 20 \cdot 2 \rightarrow \frac{5}{20} = \frac{2}{8}; \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b)  $7 \cdot 4 = 14 \cdot 2 \rightarrow \frac{7}{14} = \frac{2}{4}; \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

c)  $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4 \rightarrow \frac{5}{10} = \frac{4}{8}; \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

d)  $6 \cdot 5 = 15 \cdot 2 \rightarrow \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; \frac{5}{15} = \frac{2}{6}$

**042** Comprueba que  $42^2 = 12 \cdot 147$  y deduce una proporción.

$$42^2 = 1.764 \quad 12 \cdot 147 = 1.764 \rightarrow 42^2 = 12 \cdot 147$$

Una proporción sería:  $\frac{42}{12} = \frac{147}{42}$ , donde 42 y 42 son los extremos, y 12 y 147 son los medios.

**043** La razón entre las probabilidades de ganar de dos equipos *A* y *B*

es  $\frac{5}{3}$ . ¿Qué significa esta razón?

¿Podrías calcular, en tanto por ciento, las posibilidades de victoria de *A*? ¿Y las de *B*?



Esta razón significa que, de cada 8 partidos, *A* gana 5 y *B* gana 3.

La posibilidad de *A* de ganar un partido es de 62,5 %, y la de *B* es de 37,5 %.

**044** Calcula *x* en las proporciones.

a)  $\frac{x}{4} = \frac{3}{1}$

b)  $\frac{4}{x} = \frac{5}{3}$

c)  $\frac{2,4}{1,5} = \frac{8}{x}$

a)  $x = \frac{4 \cdot 3}{1} = 12$

b)  $x = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4$

c)  $x = \frac{1,5 \cdot 8}{2,4} = 5$

**045** Encuentra el valor de *a*, *b* y *c* en estas proporciones:  $\frac{3}{5} = \frac{18}{a} = \frac{b}{25} = \frac{c}{12}$ .

Conocida una razón, formamos las proporciones:

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{a} \rightarrow a = \frac{5 \cdot 18}{3} = 30$$

$$\frac{3}{5} = \frac{c}{12} \rightarrow c = \frac{3 \cdot 12}{5} = 7,2$$

$$\frac{3}{5} = \frac{b}{25} \rightarrow b = \frac{3 \cdot 25}{5} = 15$$

**046** Halla el término que falta para que los siguientes números formen una proporción.

a) 24, 51 y 104

b) 5, 6 y 40

c) 3, 5 y 12

$$a) \frac{24}{51} = \frac{104}{x} \rightarrow x = \frac{51 \cdot 104}{24} = 221$$

$$b) \frac{5}{6} = \frac{40}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 40}{5} = 48$$

$$c) \frac{3}{5} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$$

**047** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LOS MEDIOS O LOS EXTREMOS DE UNA PROPORCIÓN CUANDO SON IGUALES?

Calcula  $x$  en la proporción:  $\frac{16}{x} = \frac{x}{4}$ .

**PRIMERO.** Se aplica la propiedad fundamental.

$$\frac{16}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow 16 \cdot 4 = x \cdot x \rightarrow x^2 = 64$$

**SEGUNDO.** Se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$

Luego la proporción será:  $\frac{16}{8} = \frac{8}{4}$ .

**048** Obtén dos números iguales que guarden proporción con los siguientes números.

a) 4 y 49

b) 1 y 0,64

c)  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{27}{20}$

$$a) \frac{x}{4} = \frac{49}{x} \rightarrow x^2 = 4 \cdot 49 = 196 \rightarrow x = 14$$

$$b) \frac{x}{1} = \frac{0,64}{x} \rightarrow x^2 = 1 \cdot 0,64 = 0,64 \rightarrow x = 0,8$$

$$c) \frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{x} \rightarrow x^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{27}{20} = \frac{81}{100} \rightarrow x = \frac{9}{10}$$

**049** Halla cuánto vale  $x$  en la proporción  $\frac{3+x}{5+20} = \frac{15}{70}$ .

$$\frac{3+x}{5+20} = \frac{15}{70} \rightarrow (3+x) \cdot 70 = 25 \cdot 15 \rightarrow 210 + 70x = 375 \rightarrow$$

$$\rightarrow 70x = 375 - 210 \rightarrow 70x = 165 \rightarrow x = \frac{165}{70} = 2,36$$

# Proporcionalidad numérica

050



Calcula  $a$  y  $b$ , sabiendo que  $\frac{a}{45} = \frac{16}{b}$  y  $\frac{8}{9}$  es la constante de proporcionalidad.

$$\frac{a}{45} = \frac{16}{b} = \frac{8}{9} \rightarrow a = 40, b = 18$$

051



Calcula  $a$  y  $b$  sabiendo que  $a + b = 15$  y  $\frac{7}{a} = \frac{28}{b}$ .

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 15 \\ \frac{7}{a} = \frac{28}{b} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 15 \\ b = 4a \end{array} \right\} \rightarrow a + 4a = 15 \rightarrow a = 3, b = 12$$

052



Halla dos números cuya razón es 2,25 y su suma es 65.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 65 \\ \frac{a}{b} = 2,25 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 65 \\ a = 2,25b \end{array} \right\} \rightarrow 2,25b + b = 65 \rightarrow b = 20, a = 45$$

Los números son 45 y 20.

053



Señala si son o no directamente proporcionales los siguientes pares de magnitudes.

- Tiempo de llenado de una botella y cantidad de agua en su interior.
- Número de personas que participan en una excursión y dinero que pagan.
- Número de horas trabajadas y dinero cobrado.
- Edad y peso de una persona.
- Lado de un cuadrado y área.
- Lado de un cuadrado y perímetro.
- Número de obreros y duración de una obra.
- Velocidad y tiempo en un movimiento con velocidad constante.

Son directamente proporcionales: c) y f).

054



Comprueba si estas tablas corresponden a magnitudes directamente proporcionales.

a) 

3	9	6	30
5	15	10	50

c) 

2	5	3	10
4	10	6	20

b) 

1	2	4	5
3	3	6	9

d) 

3	9	15	6
4	16	20	8

a)  $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{30}{50}$

c)  $\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

b)  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3}$

d)  $\frac{3}{4} \neq \frac{9}{16}$

Son directamente proporcionales: a) y c), y no lo son: b) y d).

**055** Completa la tabla y halla la constante de proporcionalidad directa en cada caso.

a)

Tiempo de lectura	5 min	10 min	15 min	20 min
Páginas leídas	2	4	6	8

La constante de proporcionalidad es 2,5.

b)

Tiempo de fabricación	18 min	36 min	54 min	72 min
N.º de objetos fabricados	4	8	12	16

La constante de proporcionalidad es 4,5.

**056** Completa las siguientes tablas, sabiendo que *A* y *B* representan magnitudes directamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad directa en cada caso.

a)

<i>A</i>	2	5	9	17
<i>B</i>	7	17,5	31,5	59,5

La constante es:  $\frac{2}{7} = 0,29$ .

b)

<i>A</i>	5	7	9	16
<i>B</i>	2,22	3,11	4	7,11

La constante es:  $\frac{9}{4} = 2,25$ .

c)

<i>A</i>	2	3	6	11
<i>B</i>	0,91	1,36	2,73	5

La constante es:  $\frac{11}{5} = 2,2$ .

d)

<i>A</i>	3	4	10	13
<i>B</i>	6,75	9	22,5	29,25

La constante es:  $\frac{4}{9} = 0,44$ .

**057** Estudia si la relación que existe entre estos pares de magnitudes es de proporcionalidad, y en caso de que lo sea, si es directa o inversa.

- Velocidad y tiempo en un movimiento con velocidad constante.
- Espacio y tiempo en un movimiento con velocidad constante.
- Número de personas que se reparten una tarta y porción que le toca a cada uno.
- Número de horas que un alumno ve la televisión y número de horas de estudio.
- Cantidad de dinero que ahorra una familia y cantidad de dinero que dedica a gastos.
- Cantidad de aprobados y cantidad de suspensos en una asignatura.
- Número de albañiles y tiempo que tardan en levantar una pared.
- Número de personas que comen y cantidad de alimento.
- Número de personas que participan en la compra de un regalo y dinero que aportan.
- Número de jornaleros y tiempo que tardan en la recogida de aceituna.

Proporcionalidad directa: b) y h).

Proporcionalidad inversa: a), c), g), i) y j).

Sin proporcionalidad: d), e) y f).

# Proporcionalidad numérica

- 058** ● Completa las siguientes tablas, sabiendo que *A* y *B* representan magnitudes inversamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad en cada caso.

a) 

<i>A</i>	6	5	30	10
<i>B</i>	90	108	18	54

La constante de proporcionalidad es 540.

b) 

<i>A</i>	2	6	15	4
<i>B</i>	150	50	20	75

La constante de proporcionalidad es 300.

- 059** ●● Crea una tabla de valores que relacione dos magnitudes inversamente proporcionales cuyas constantes de proporcionalidad sean:

a) 36

b) 48

c) 60

d) 140

a) 

<i>A</i>	2	3	4	6
<i>B</i>	18	12	9	6

b) 

<i>A</i>	2	6	8	12
<i>B</i>	24	8	6	4

c) 

<i>A</i>	3	4	5	6
<i>B</i>	20	15	12	10

d) 

<i>A</i>	2	5	7	10
<i>B</i>	70	28	20	14

- 060** ●● Corrige estas tablas si *A* y *B* son magnitudes inversamente proporcionales.

a) 

<i>A</i>	2	4	8	16	1,6	6,4
<i>B</i>	8	4	2	1	10	2,5

b) 

<i>A</i>	10	15	20	25	30	35
<i>B</i>	5	3,33	2,5	2	1,67	1,43

- 061** ● En una fábrica de coches se hacen 380 unidades cada 5 horas. ¿Cuántos coches se fabricarán en 12 horas, manteniendo el mismo ritmo?

$$\begin{array}{l} \text{Horas} \qquad \qquad \text{Coches} \\ 5 \longrightarrow 380 \\ 12 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Horas} \\ \text{Coches} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{380}{x} \rightarrow x = \frac{4.560}{5} = 912 \text{ coches}$$

- 062** ● Un pintor cobra 425 € por 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 7 días?

$$\begin{array}{l} \text{Días} \qquad \qquad \text{Precio} \\ 5 \longrightarrow 425 \\ 7 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Días} \\ \text{Precio} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{5}{7} = \frac{425}{x} \rightarrow x = \frac{2.975}{5} = 595 \text{ €}$$

- 063** Cuatro tractores aran un campo en 6 horas. Calcula el tiempo que emplearían 6 tractores en ararlo.

Tractores	Horas	
4	→ 6	}
6	→ x	
		$\rightarrow 4 \cdot 6 = 6 \cdot x \rightarrow x = 4$ horas

- 064** Ocho personas recogen las naranjas de un huerto en 9 horas. ¿Cuánto tardarían en hacerlo 6 personas?



Personas	Horas	
8	→ 9	}
6	→ x	
		$\rightarrow 8 \cdot 9 = 6 \cdot x \rightarrow x = 12$ horas

- 065** De un manantial hemos recogido 200 litros de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros obtendremos en 7 minutos?

Litros	Minutos	
200	→ 4	}
x	→ 7	
		$\rightarrow \frac{200}{x} = \frac{4}{7} \rightarrow x = \frac{200 \cdot 7}{4} = 350$ litros

- 066** Tres caballos consumen una carga de heno en 10 días. ¿Cuánto les durará la misma cantidad de heno a 5 caballos?

Caballos	Días	
3	→ 10	}
5	→ x	
		$\rightarrow 3 \cdot 10 = 5 \cdot x \rightarrow x = 6$ días

- 067** Cuatro excavadoras han levantado las aceras de una calle en 14 días. Para hacerlo en 7 días, ¿cuántas excavadoras se necesitarían?

Excavadoras	Días	
4	→ 14	}
x	→ 7	
		$\rightarrow 4 \cdot 14 = 7 \cdot x \rightarrow x = 8$ excavadoras

# Proporcionalidad numérica

068 Para hacer dos camisas se necesitan 4,5 m de tela.



- a) ¿Cuánta tela se necesita para hacer 3 camisas?
- b) ¿Y para hacer 7 camisas?
- c) ¿Cuántas camisas se pueden hacer con 15 m de tela?



a) Camisas      Tela

$$\left. \begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4,5 \\ 3 \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4,5}{x} \rightarrow x = \frac{13,5}{2} = 6,75 \text{ m}$$

b) Camisas      Tela

$$\left. \begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4,5 \\ 7 \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{7} = \frac{4,5}{x} \rightarrow x = \frac{31,5}{2} = 15,75 \text{ m}$$

c) Camisas      Tela

$$\left. \begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4,5 \\ x \longrightarrow 15 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4,5}{15} \rightarrow x = \frac{30}{4,5} = 6,67 \approx 6 \text{ camisas}$$

069 Con una velocidad de 20 nudos, un barco hace una travesía en 8 horas.



Halla la velocidad de otro barco que hace la misma travesía en 6 horas y media.

Nudos      Horas

$$\left. \begin{array}{l} 20 \longrightarrow 8 \\ x \longrightarrow 6,5 \end{array} \right\} \rightarrow 20 \cdot 8 = x \cdot 6,5 \rightarrow x = 24,62 \text{ nudos}$$

070 Para hacer una paella se necesitan 2 vasos de agua por cada vaso de arroz.



Si echamos 4 vasos y medio de agua, ¿cuántos vasos de arroz deberemos añadir?



Agua      Arroz

$$\left. \begin{array}{l} 2 \longrightarrow 1 \\ 4,5 \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{4,5} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{4,5}{2} = 2,25 \text{ vasos de agua}$$

071 Mi pelo crece 1 cm cada 3 semanas. Exprésalo como una razón.



Escribe la proporción del crecimiento de mi cabello al cabo de 7 semanas.

La razón es  $\frac{1}{3}$ , y en proporción  $\frac{1}{3} = \frac{x}{7} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 7}{3} = 2,3 \text{ cm}$ .

- 072** Alicia y Antonio reparten propaganda. Los 5 paquetes de Alicia pesan 6 kilos. ¿Cuánto pesarán los 7 paquetes de Antonio?

Las magnitudes son directamente proporcionales:

$$\frac{6}{5} = \frac{x}{7} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8,4 \text{ kilos}$$

- 073** La dueña de una pensión dispone de comida para alimentar a sus 18 huéspedes durante 12 días. Si vienen 6 huéspedes nuevos, ¿para cuántos días tendrán comida?

Huéspedes	Días	
18	12	}
24	x	

$$\rightarrow 18 \cdot 12 = 24 \cdot x \rightarrow x = 9 \text{ días}$$

- 074** María escribe dos páginas en media hora.

- a) ¿Cuántas páginas escribirá en 3 horas?  
b) ¿Cuánto tiempo tardará en escribir 84 páginas?

Páginas	Horas	
2	0,5	}
x	3	

$$\rightarrow \frac{2}{x} = \frac{0,5}{3} \rightarrow x = \frac{6}{0,5} = 12 \text{ páginas}$$

Páginas	Horas	
2	0,5	}
84	x	

$$\rightarrow \frac{2}{84} = \frac{0,5}{x} \rightarrow x = \frac{42}{2} = 21 \text{ horas}$$

- 075** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE ENGRANAJES?

En un reloj antiguo, un engranaje tiene dos ruedas, de 18 y 12 dientes, respectivamente. Si la rueda mayor da 6 vueltas, averigua cuántas vueltas da la menor.



**PRIMERO.** Se comprueba el tipo de proporcionalidad que guardan las magnitudes.

Con 18 dientes  $\xrightarrow{\text{da}}$  6 vueltas      Con 36 dientes  $\xrightarrow{\text{dará}}$  3 vueltas

La relación de proporcionalidad es inversa.

**SEGUNDO.** Se plantea una regla de tres.

Dientes	Vueltas	
18	6	}
12	x	

$$\xrightarrow{\text{razón inversa}} x = \frac{18 \cdot 6}{12} = 9$$

La rueda de 12 dientes dará 9 vueltas.

# Proporcionalidad numérica

- 076** ●● Dos ruedas dentadas engranan mutuamente. La primera tiene 20 dientes, y la segunda, 50. Si la primera ha dado 5.000 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

$$\begin{array}{l} \text{Dientes} \qquad \qquad \text{Vueltas} \\ 20 \longrightarrow 5.000 \\ 50 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Dientes} \\ \text{Vueltas} \end{array}} \right\} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 5.000}{50} = 2.000 \text{ vueltas}$$

- 077** ●● Las ruedas traseras y delanteras de un coche tienen 1,3 m y 1 m de diámetro, respectivamente. Si las traseras han dado 260 vueltas, ¿cuántas han dado las delanteras?

$$\begin{array}{l} \text{Metros} \qquad \qquad \text{Vueltas} \\ 1,3 \longrightarrow 260 \\ 1 \longrightarrow x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Metros} \\ \text{Vueltas} \end{array}} \right\} \rightarrow x = \frac{1,3 \cdot 260}{1} = 338 \text{ vueltas}$$



- 078** ●● He pagado 60 € por el abono de piscina de este verano, pero solo puedo asistir 45 días. Si la entrada normal cuesta 1,25 € al día, ¿me ahorraré dinero comprando el abono?

El precio sin abono es:  $1,25 \cdot 45 = 56,25$  €. Por tanto, no ahorraré dinero.

- 079** ●● En la siguiente tabla se muestra la oferta de unos grandes almacenes al comprar un determinado número de litros de leche. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

Litros comprados	40	55	75	100
Litros obsequiados	1	2	3	5

$$\frac{40}{1} \neq \frac{55}{2} \rightarrow \text{No es directamente proporcional.}$$

- 080** ●● En la siguiente tabla se muestra la oferta de una frutería al comprar un determinado número de kilos de patatas. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

Kilos comprados	20	40	60	80
Kilos obsequiados	1,5	3	4,5	6



¿Qué cantidad de patatas hay que comprar para que nos regalen 10,5 kg?

$$\frac{20}{1,5} = \frac{40}{3} = \frac{60}{4,5} = \frac{80}{6} \rightarrow \text{Es directamente proporcional.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Comprados} \qquad \qquad \text{Obsequiados} \\ 20 \longrightarrow 1,5 \\ x \longrightarrow 10,5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Comprados} \\ \text{Obsequiados} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{20}{x} = \frac{1,5}{10,5} \rightarrow x = 140 \text{ kg}$$

- 081** Un coche de carreras ha dado 5 vueltas a un circuito en 8 minutos y 30 segundos. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuánto tiempo tardará en dar las 3 próximas vueltas?



Vueltas	Minutos	
5	→ 8,5	} → $\frac{5}{3} = \frac{8,5}{x} \rightarrow x = 5,1$ minutos
3	→ x	

**082 HAZLO ASÍ**

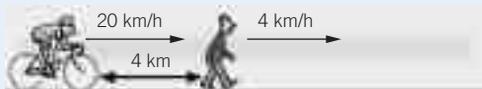
¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MÓVILES?

Un caminante y un ciclista marchan por la misma vía. El caminante lleva una velocidad de 4 km/h, y el ciclista, de 20 km/h.

- a) Si parten al mismo tiempo, desde puntos opuestos que distan entre sí 12 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?



- b) Si parten del mismo punto y el caminante lleva una ventaja de 4 km, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarlo el ciclista?



**PRIMERO.** Se suman o restan las velocidades, según vayan en distinta o en igual dirección.

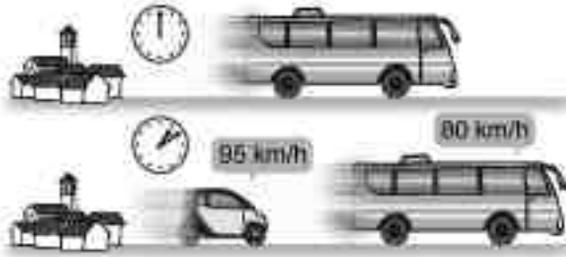
- a) VELOCIDAD DE ENCUENTRO =  $20 + 4 = 24$  km/h  
 b) VELOCIDAD DE ALCANCE =  $20 - 4 = 16$  km/h

**SEGUNDO.** La razón entre la distancia que los separa y la velocidad a la que se aproximan es el tiempo,  $t$ .

- a)  $t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{12}{24} = 0,5$  h en encontrarse.  
 b)  $t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4}{16} = 0,25$  h en alcanzarlo.

# Proporcionalidad numérica

- 083** ●● El autobús de Villa Arriba parte a las 12 de la mañana hacia Villa Abajo. Una hora y diez minutos más tarde sale de Villa Arriba un automóvil con la misma dirección. Si el autobús circula a 80 km/h y el automóvil va a 95 km/h:



- a) ¿Cuánto tardará el coche en alcanzar al autobús?  
 b) Si la distancia entre las dos ciudades es de 146 km, ¿alcanzará el coche al autobús antes de llegar a Villa Abajo?

Cuando sale el automóvil de Villa Arriba, el autobús ha recorrido:  
 $1 \text{ h } 10 \text{ min} \cdot 80 \text{ km/h} = 93,33 \text{ km}$ .

La velocidad de alcance es:  $95 - 80 = 15 \text{ km/h}$ .

a)  $t = \frac{93,33}{15} = 6,22$  horas tardará en alcanzarlo.

b) El tiempo que tarda el autobús en llegar a Villa Abajo es:

$t = \frac{146}{80} = 1,825$  horas, por lo que el autobús llega antes de que sea alcanzado por el automóvil.

- 084** ●● Un grifo arroja un caudal de 25 l/min y llena un depósito de agua en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo con un caudal de 20 l/min?

<u>Caudal</u>	<u>Tiempo</u>	
25	→ 80	} → $25 \cdot 80 = 20 \cdot x \rightarrow x = 100$ minutos
20	→ x	

- 085** ●● En una bañera, el agua alcanza 12 cm de altura con un grifo que mana 180 ml/s en 12 minutos. Si el grifo manase 90 ml/s, ¿qué altura alcanzaría en el mismo tiempo?

<u>Caudal</u>	<u>Altura</u>	
180	→ 12	} → $\frac{180}{12} = \frac{90}{x} \rightarrow x = 6$ cm
90	→ x	

## 086 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE LLENADO Y VACIADO?

Un grifo A tarda 36 horas en llenar una piscina, y otro grifo B tarda 24 horas. Si abrimos los dos grifos a la vez, ¿cuánto tardará en llenarse la piscina?

PRIMERO. Se reduce a la unidad en cada grifo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Grifo A, en 1 hora, llena: } \frac{1}{36} \text{ partes de piscina} \\ \text{Grifo B, en 1 hora, llena: } \frac{1}{24} \text{ partes de piscina} \end{array} \right\}$$

Grifo A y grifo B, en 1 hora, llenan:

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{24} = \frac{5}{72} \text{ partes de piscina}$$

SEGUNDO. Se reduce a la unidad en ambos grifos.

$$\begin{aligned} \frac{5}{72} \text{ partes de piscina en 1 h} &\rightarrow \frac{1}{72} \text{ partes de piscina en } \frac{1}{5} \text{ h} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{72}{5} \text{ partes de la piscina en } 72 \cdot \frac{1}{5} = 14 \text{ h } 24 \text{ min} \end{aligned}$$

Los dos grifos tardarán en llenarla 14 h 24 min.

087 Una piscina tiene dos desagües. El primero tarda en vaciar la piscina 8 horas. Y abriendo el segundo desagüe, la piscina tarda en vaciarse 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse si abrimos los dos desagües a la vez?



El grifo A, en 1 hora, vacía  $\frac{1}{8}$  de la piscina.

El grifo B, en 1 hora, vacía  $\frac{1}{6}$  de la piscina.

Los dos grifos, en 1 hora, desaguan:  $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$  de la piscina.

En vaciar la piscina tardarán:  $1 : \frac{7}{24} = 3 \text{ h } 25 \text{ min } 43 \text{ s}$ .

# Proporcionalidad numérica

088



Dos desagües iguales vacían una balsa de agua en 4 horas y cuarto. ¿En cuánto tiempo se vaciaría si abriésemos tres desagües?

Convertimos el tiempo en minutos:

$$4 \text{ horas y cuarto} = 4 \cdot 60 + 15 = 255 \text{ minutos}$$

<u>Desagües</u>	<u>Minutos</u>	
2	→ 255	}
3	→ x	
		→ $x = \frac{2 \cdot 255}{3} = 170 \text{ minutos}$

089



Un grifo llena un estanque en 8 horas. A consecuencia de una avería, el grifo arroja solo a 2/3 de su caudal. Para llenar el estanque todavía faltan las 3/4 partes. ¿Cuánto tiempo empleará ahora el grifo en llenarlo?

<u>Horas</u>	<u>Caudal</u>	
8	→ $\frac{3}{3}$	}
x	→ $\frac{2}{3}$	
		→ $x = \frac{8 \cdot \frac{3}{3}}{\frac{2}{3}} = 12 \text{ horas}$

<u>Horas</u>	<u>Estanque</u>	
12	→ 1	}
x	→ $\frac{3}{4}$	
		→ $x = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9 \text{ horas}$

090



Un arquitecto planea terminar un edificio en un año y medio, con la ayuda de 36 obreros. Si le conceden una prórroga de medio año, ¿de cuántos obreros puede prescindir?



<u>Obreros</u>	<u>Años</u>	
36	→ 1,5	}
x	→ 2	
		→ $x = \frac{36 \cdot 1,5}{2} = 27 \text{ obreros}$

Por tanto, puede prescindir de  $36 - 27 = 9$  obreros.

- 091** En un poblado africano hay 2.350 habitantes. Si el 68 % son niños, averigua el número de niños del poblado.

68 % de 2.350 = 1.598 niños hay en el poblado.

- 092** En una clase de 30 alumnos han faltado 6. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias?

Si 6 es el 20 % de 30, ha faltado el 20 % de los alumnos.

- 093** De 475 personas, a 76 les gusta el fútbol. ¿A qué porcentaje de personas no les gusta el fútbol?



No les gusta el fútbol a 399 personas, que son el 84 % del total.

- 094** El 18 % de una cosecha de lechugas son 10.800 kg. ¿Cuántos kilos tiene la cosecha?

La cosecha de lechugas tiene:  $\frac{18 \cdot 10.800}{100} = 1.944$  kg.

- 095** Un traje cuesta 280 €. Si suben el precio un 12 %, ¿cuánto costará?

El traje costará:  $\frac{280 \cdot 112}{100} = 313,60$  €.

- 096** Las reservas de agua de una Comunidad Autónoma eran de 350 hm<sup>3</sup>. Si han subido un 12 %, ¿cuáles son las reservas actuales?

Las reservas de agua actuales son:  $\frac{350 \cdot 112}{100} = 392$  hm<sup>3</sup>.

# Proporcionalidad numérica

- 097** De los 1.200 alumnos de un instituto el 25 % practica atletismo; el 15 %, baloncesto, y el 40 %, fútbol. Calcula el número de alumnos que practican cada deporte y el porcentaje de los que no lo practican.

$$\text{Atletismo: } \frac{25}{100} \cdot 1.200 = 300 \text{ alumnos}$$

$$\text{Baloncesto: } \frac{15}{100} \cdot 1.200 = 180 \text{ alumnos}$$

$$\text{Fútbol: } \frac{40}{100} \cdot 1.200 = 480 \text{ alumnos}$$

Alumnos que no realizan deporte:

$$1.200 - (300 + 180 + 480) = 1.200 - 960 = 240 \text{ alumnos}$$

$$\frac{x}{100} \cdot 1.200 = 240 \rightarrow 1.200x = 24.000 \rightarrow x = \frac{24.000}{1.200} = 20 \%$$

- 098** Tres montañeros se llevan alimento para su estancia en la montaña. Al llegar al refugio descubren que tienen un 15 % más de provisiones. Si disponen de 402,5 kg de comida, averigua cuánta tenían al principio.

$$\frac{115}{100} \cdot x = 402,5 \rightarrow x = \frac{402,5 \cdot 100}{115} = 350 \text{ kg}$$

- 099** Un establecimiento vendía café a 5 €/kg. Si ahora lo vende a 4,75 €/kg, encuentra el porcentaje de descuento que ha aplicado.

$$\left( \frac{100 - x}{100} \right) \cdot 5 = 4,75 \rightarrow 500 - 5x = 475 \rightarrow 500 - 475 = 5x \rightarrow \\ \rightarrow 25 = 5x \rightarrow x = 5 \% \text{ de descuento}$$

- 100** Queremos hacer la fotocopia de una lámina, reduciendo 12,5 cm de altura a 6 cm. ¿Qué porcentaje de reducción aplicaremos?



$$\left( \frac{100 - x}{100} \right) \cdot 12,5 = 6 \rightarrow \\ \rightarrow 1.250 - 12,5x = 600 \rightarrow \\ \rightarrow 1.250 - 600 = 12,5x \rightarrow \\ \rightarrow 650 = 12,5x \rightarrow x = 52 \%$$

Aplicaremos una reducción del 52 %.



**101 HAZLO ASÍ**

**¿CÓMO SE CALCULA LA CANTIDAD FINAL DE UNA INVERSIÓN?**

**Metemos 3.000 € en el banco a un rédito del 5% anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos después de 10 años?**

**PRIMERO.** Se calcula el beneficio anual.

$$\text{Beneficio anual} = 3.000 \cdot \frac{5}{100} = 150 \text{ €}$$

**SEGUNDO.** Se multiplica el beneficio anual por el número de años que se mantiene la inversión.

$$\text{Beneficio} = 150 \cdot 10 = 1.500 \text{ €}$$

**TERCERO.** Se suman los beneficios a la cantidad inicial.

$$\text{Cantidad final} = 3.000 + 1.500 = 4.500 \text{ €}$$

Después de 10 años tendremos 4.500 €.

**102 Calcula el capital final que se retirará después de 6 años si se invierten:**

**a) 10.000 €, al 3,5% anual.**

$$\text{a) Beneficio anual} = 10.000 \cdot \frac{3,5}{100} = 350 \text{ €}$$

$$\text{Beneficio} = 350 \cdot 6 = 2.100 \text{ €}$$

$$\text{Capital final} = 10.000 + 2.100 = 12.100 \text{ €}$$

$$\text{b) Beneficio anual} = 5.000 \cdot \frac{4}{100} = 200 \text{ €}$$

$$\text{Beneficio} = 200 \cdot 6 = 1.200 \text{ €}$$

$$\text{Capital final} = 5.000 + 1.200 = 6.200 \text{ €}$$

**103 ¿A qué tanto por ciento se han invertido 12.000 € durante 3 años si se han obtenido 900 € de beneficio?**

El beneficio en 3 años es de 900 €.

Por otra parte, también lo podemos calcular como:

$$12.000 \cdot \frac{x}{100} \cdot 3 = 360x$$

$$360x = 900 \rightarrow x = 2,5$$

El dinero se invirtió al 2,5%.

# Proporcionalidad numérica

104

¿Durante cuántos años hemos invertido 15.000 € al 2,8% si después tenemos 17.100 €?

$$\text{Beneficio anual} = 15.000 \cdot \frac{2,8}{100} = 420 \text{ €}$$

$$\text{Beneficio} = 350x$$

$$\text{Capital final} = 15.000 + 350x = 17.100 \text{ €}$$

$$x = \frac{17.100 - 15.000}{350} = 6 \text{ años}$$

Hemos tenido invertido el dinero durante 6 años.

105

Esta situación es la que se planteó cuando Alfredo fue a comprar un televisor.

¿Crees que Alfredo y la dependienta hablan del mismo precio?



$$\text{Precio de Alfredo: } 1.600 \cdot \frac{122}{100} = 1.952 \text{ €}$$

$$\text{Precio de la dependienta: } 1.600 \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{112}{100} = 1.971,20 \text{ €}$$

Por tanto, los precios no son iguales.

106

Una fotocopidora tarda una hora en sacar  $m$  fotocopias. Y otra, para hacer el mismo número de fotocopias, tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos fotocopadoras en hacer a la vez ese número  $m$  de fotocopias?

La fotocopidora A, en 1 hora, hace  $\frac{1}{1}$  de las fotocopias.

La fotocopidora B, en 1 hora, hace:  $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$  de las fotocopias.

Las dos fotocopadoras, en 1 hora, hacen:  $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$  de las fotocopias.

Las dos fotocopadoras juntas tardarán:  $\frac{3}{5}$  de hora = 36 minutos en realizar las fotocopias.

107

En el siglo VIII, un monje benedictino inglés conocido con el nombre de Beda el Venerable planteó este curioso problema.

*Un testador a punto de morir deja dicho en su herencia: «Como mi mujer está próxima a dar a luz, otorgaré mi herencia en función del sexo de mi prole: si es niño le dejaré  $\frac{2}{3}$  de mi herencia, y a su madre  $\frac{1}{3}$ ; y si es niña, le dejaré  $\frac{1}{3}$  de mi herencia y a mi mujer  $\frac{2}{3}$ ». El testador muere, y días más tarde su viuda da a luz a un par de mellizos de distinto sexo.*

¿Cómo han de repartirse la herencia?

La razón entre las cantidades de varón y madre es:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

La razón entre las cantidades de mujer y madre es:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Si la cantidad que recibe la madre es  $x$ , la del hijo es  $2x$  y la de la hija es  $\frac{x}{2}$ , siendo un total de  $3,5x$ .

Por tanto, el reparto se hará del siguiente modo:

A la madre le corresponde:

$$\frac{x}{3,5x} = \frac{2}{7} \text{ del total}$$

Al hijo le corresponde:

$$\frac{2x}{3,5x} = \frac{4}{7} \text{ del total}$$

A la hija le corresponde:

$$\frac{0,5x}{3,5x} = \frac{1}{7} \text{ del total}$$



# Proporcionalidad numérica

## EN LA VIDA COTIDIANA

108

Felisa García es una bióloga especializada en anfibios.

Está investigando sobre la propagación de enfermedades en las comunidades de ranas. Para ello ha buscado un estanque en el que, a simple vista, hay un gran número de ellas.

La primera tarea es determinar el número de ranas que hay en el estanque.

Vamos a hacer lo siguiente...  
 Metemos una red en el estanque y contamos las ranas que atrapamos. Las hacemos una pequeña marca con tinte y las devolvemos al estanque.  
 Volvemos a meter la red, contamos las ranas que sacamos y anotamos las que tienen marca de tinte.



Ha realizado este proceso tres veces y estos son los resultados que ha obtenido.

EXPERIMENTO 1		EXPERIMENTO 2		EXPERIMENTO 3	
1.ª extracción	2.ª extracción	1.ª extracción	2.ª extracción	1.ª extracción	2.ª extracción
182 ranas	195 ranas	96 ranas	80 ranas	236 ranas	204 ranas
	38 marcadas		9 marcadas		51 marcadas

¿Cuántas ranas, aproximadamente, tiene el estanque?

	Total	Coloreadas		
EXPERIMENTO 1	$\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow 182 \\ 195 \longrightarrow 38 \end{array} \right\}$		$\rightarrow \frac{x}{195} = \frac{182}{38}$	$\rightarrow x \approx 933$ ranas
EXPERIMENTO 2	$\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow 96 \\ 80 \longrightarrow 9 \end{array} \right\}$		$\rightarrow \frac{x}{80} = \frac{96}{9}$	$\rightarrow x \approx 853$ ranas
EXPERIMENTO 3	$\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow 236 \\ 204 \longrightarrow 51 \end{array} \right\}$		$\rightarrow \frac{x}{204} = \frac{236}{51}$	$\rightarrow x = 944$ ranas

La media de los tres experimentos es:  $\frac{933 + 853 + 944}{3} = 910$  ranas.

109

El parque que hay al lado del colegio tiene una explanada donde jugamos al fútbol. Junto a esa explanada hay un terreno en el que han sembrado flores. Para protegerlas se va a construir una valla en la que se colocarán 800 listones de madera que tendrán una separación de 15 cm entre sí.



El problema es que solo tenemos 600 listones...  
¿A qué distancia tendremos que colocar unos de otros para cubrir las flores?



Listones	Separación	
800	→ 15	}
600	→ x	
$\rightarrow x = \frac{800 \cdot 15}{600} = \frac{12.000}{600} = 20 \text{ cm}$		

110

Armando practica el atletismo, y ha participado en varias carreras de competición, pero hasta el año pasado no corrió el primer maratón.

A Armando le gustó tanto la experiencia que ha decidido entrenarse profesionalmente y ha buscado un entrenador.

¿En qué porcentaje disminuirá el tiempo empleado en correr el maratón respecto al tiempo del año pasado?

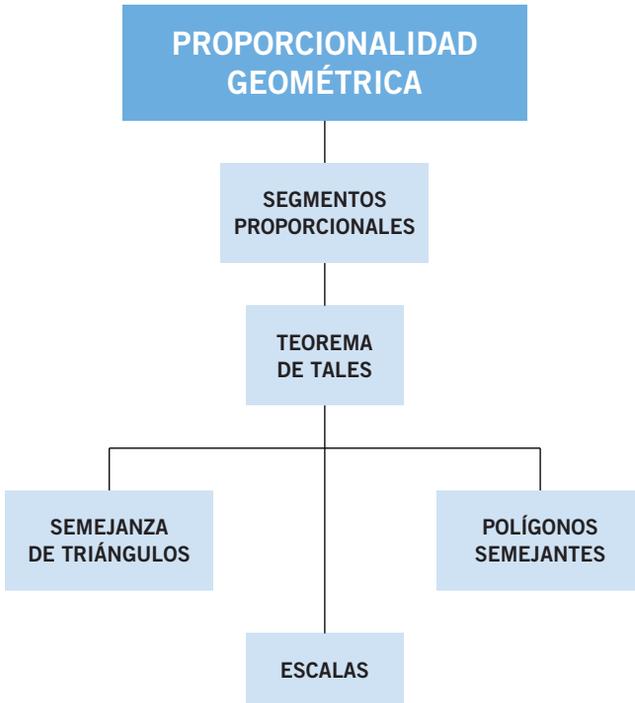
Si sigues de forma estricta este plan de entrenamiento, al finalizar el año habrás aumentado tu velocidad en un 25 %.



- Tiempo antes de entrenar:  $t$
- Tiempo después de entrenar:  $r$
- Velocidad antes de entrenar:  $v$
- Velocidad después de entrenar:  $1,25v$

Antes	Después	
$t$	→ $r$	}
$v$	→ $1,25v$	
$\rightarrow t \cdot v = r \cdot 1,25v \rightarrow r = \frac{tv}{1,25v} = \frac{t}{1,25} = 0,8t$		

Por tanto, el porcentaje en que disminuye el tiempo es del 20 %.



## La llave de la Ciudad Prohibida

El misionero jesuita Matteo Ricci atravesó la puerta de la Ciudad Prohibida al encuentro del emperador chino Wan-Li. Los presentes enviados habían surtido efecto y el emperador quería conocerlo.

El emperador, que esperaba curioso el mapa del mundo incluido en los regalos, levantó la vista y le ordenó realizar una copia para él.

Tras la entrevista el padre Ricci regresó a su casa, y allí otro misionero, un tanto sorprendido, dijo:

–Todavía no entiendo por qué les llama tanto la atención el mapa.

–Es lógico –argumentó Ricci–. Llevan miles de años creyendo que el mundo es solo China, que fuera viven bárbaros incapaces de aportar nada a su cultura y, de repente, les demostramos que no somos bárbaros, sino que estamos más avanzados que ellos en ciencias como matemáticas, astronomía, geografía...

–Esa es la llave que me condujo al emperador de China –continuó el padre Ricci–. El mapa llamó su atención y cuando les expliqué la forma de tomar las medidas y la utilización de escalas para representarlas sobre el papel, entonces vieron que podíamos enseñarles muchas cosas.

*Dos montañas que están situadas a una distancia de 20 km, aparecen dibujadas en un mapa con una separación de 2 cm. ¿Qué longitud habrá, en el mapa, entre dos puntos que distan en la realidad 40 km?*

$$\frac{20}{2} = \frac{40}{x}$$

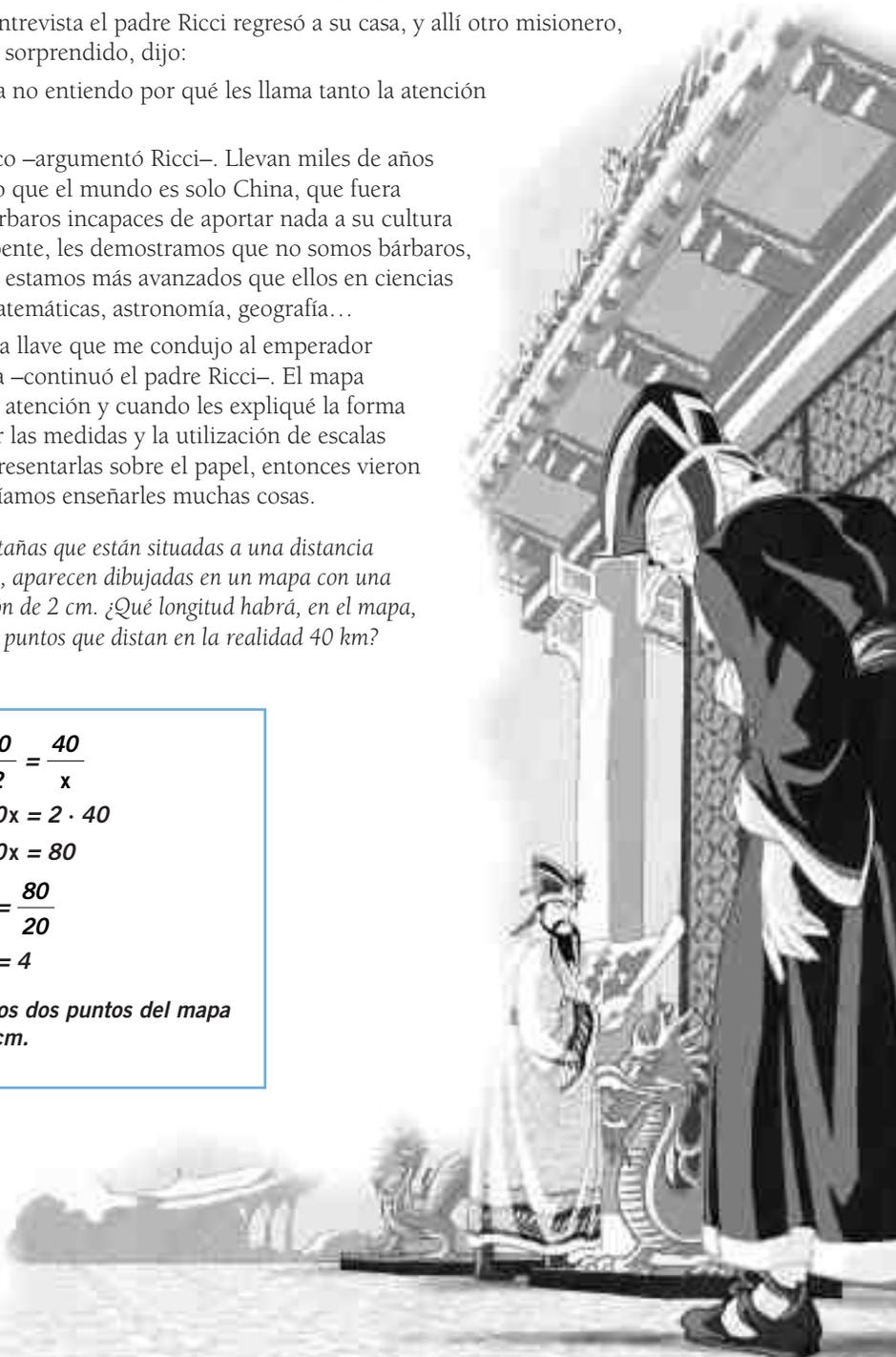
$$20x = 2 \cdot 40$$

$$20x = 80$$

$$x = \frac{80}{20}$$

$$x = 4$$

***Entre los dos puntos del mapa hay 4 cm.***



# Proporcionalidad geométrica

## EJERCICIOS

001 Determina la longitud de estos segmentos.

a) 

b) 

a) 4 cm

b) 5,5 cm

002 Dibuja los segmentos  $AB$  y  $CD$ , de longitudes 18 y 24 mm, respectivamente. Halla su razón.



La razón entre los dos segmentos es el cociente de sus longitudes:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{24}{18} = 1,\overline{3}$$

003 Dibuja los segmentos  $\overline{FG} = 3$  cm y  $\overline{MN} = 9$  cm. ¿Cuál es su razón? Explica el significado del resultado.

La razón entre los dos segmentos es el cociente de sus longitudes:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{FG}} = \frac{9}{3} = 3$$

El segmento  $MN$  es 3 veces más largo que el segmento  $FG$ .

004 La razón de dos segmentos  $AB$  y  $CD$  es 0,5. Si  $AB$  mide 2 cm, calcula  $\overline{CD}$ . Dibuja los segmentos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{\overline{CD}} = 0,5 \rightarrow \overline{CD} = 4 \text{ cm}$$

El segmento  $CD$  es el doble de  $AB$ .

005 La razón de dos segmentos  $FG$  y  $MN$  es 0,3. Si  $MN$  mide 50 mm, calcula la medida (en cm) de  $FG$ . Dibuja los segmentos.

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{FG}}{50} = 0,3 \rightarrow \overline{FG} = 15 \text{ mm} = 1,5 \text{ cm}$$

El segmento  $FG$  es el triple de  $MN$ .

006 Si la razón entre  $AB$  y  $CD$  es 2, ¿cuál es la razón entre  $CD$  y  $AB$ ?

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2 \rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 0,5$$

La razón entre  $CD$  y  $AB$  es 0,5.

007 Indica si son proporcionales estos segmentos.

a)  $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 30 \text{ mm}$ ,  $\overline{EF} = 30 \text{ mm}$  y  $\overline{GH} = 5 \text{ mm}$

b)  $\overline{AB} = 2,5 \text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{EF} = 4,5 \text{ cm}$  y  $\overline{GH} = 8 \text{ cm}$

a) Comparando las razones:  $\frac{180}{30} = \frac{30}{5}$ , por lo que son proporcionales.

b) Comparando las razones:  $\frac{2,5}{5} \neq \frac{4,5}{8}$ , por lo que no son proporcionales.

008 Halla la longitud del segmento desconocido en estas proporciones.

a)  $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12}$

b)  $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60}$

c)  $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}}$

a)  $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \overline{AB} = 2$

c)  $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 45$

b)  $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60} \rightarrow \overline{AB} = 25$

009 Dados dos segmentos  $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$  y  $\overline{CD} = 9 \text{ cm}$ :

a) Calcula la razón de los segmentos  $AB$  y  $CD$ .

b) Escribe dos segmentos que sean proporcionales a ellos.

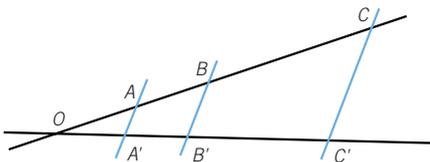
a)  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

b)  $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$ ,  $\overline{GH} = 18 \text{ cm}$

010 Si la razón entre los segmentos  $AB$  y  $CD$  es  $a$ , y la razón entre  $EF$  y  $GH$  es  $b$ , ¿qué condición se tiene que dar para que  $AB$  y  $CD$  sean proporcionales a  $EF$  y  $GH$ ?

Las razones deben ser iguales, por lo que  $a = b$ .

011 Calcula la longitud de  $OA'$  y  $BC$ .



$\overline{OA} = 3 \text{ cm}$

$\overline{AB} = 2,25 \text{ cm}$

$\overline{A'B'} = 1,5 \text{ cm}$

$\overline{B'C'} = 5 \text{ cm}$

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{3}{\overline{OA'}} = \frac{2,25}{1,5} \rightarrow \overline{OA'} = 2 \text{ cm}$

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{BC}}{5} \rightarrow \overline{BC} = 7,5 \text{ cm}$

# Proporcionalidad geométrica

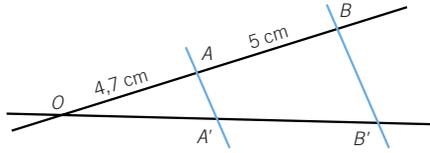
**012** Calcula la longitud del segmento  $\overline{OC}$  en la figura del ejercicio anterior.

$$\overline{OC'} = 2 + 1,5 + 5 = 8,5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{OC}}{8,5} \rightarrow \overline{OC} = 12,75 \text{ cm}$$

Se puede hallar también sumando los tres segmentos que lo forman.

**013** En esta figura sabemos que  $\overline{OA} = 4,7 \text{ cm}$ ,  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$  y la razón  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1,6$ .



Calcula  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{OB}$  y  $\overline{OB'}$ .

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 1,6 = \frac{5}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3,125 \text{ cm}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = 9,7 \text{ cm}$$

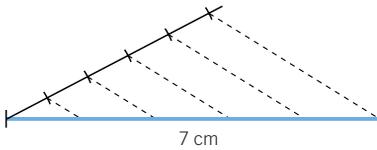
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow 1,6 = \frac{9,7}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6,0625 \text{ cm}$$

**014** Divide gráficamente un segmento de 7 cm en:

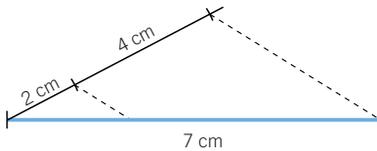
a) 5 partes iguales.

b) 2 partes, siendo una la mitad de la otra.

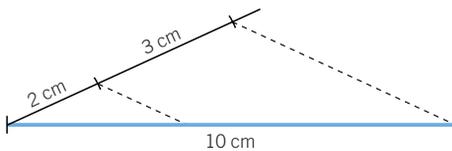
a)



b)

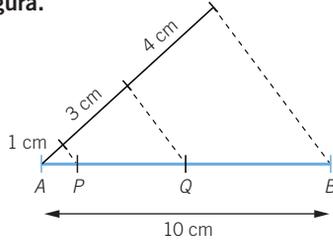


**015** Divide un segmento de 10 cm en partes proporcionales a dos segmentos de 2 cm y 3 cm. ¿Cuánto miden los segmentos resultantes?



Los segmentos miden 4 cm y 6 cm.

016 Observa la siguiente figura.



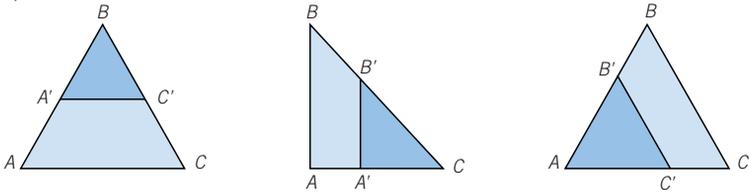
¿Cuánto miden los segmentos  $AP$ ,  $PQ$  y  $QB$ ?

Aplicando el teorema de Tales:  $\frac{10}{8} = \frac{\overline{AP}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{3} = \frac{\overline{QB}}{4}$ .

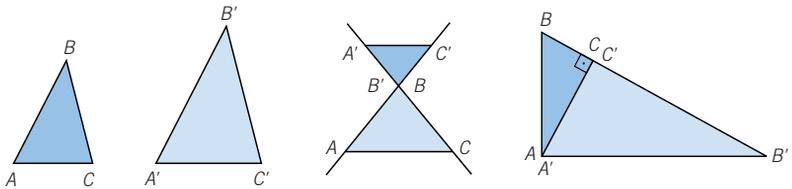
$\overline{AP} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ cm}$        $\overline{PQ} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$        $\overline{QB} = 5 \text{ cm}$

017 Dibuja tres pares de triángulos en posición de Tales. Indica cómo lo haces.

Dibujamos un triángulo y luego trazamos la paralela a uno de sus lados, que corte a los otros dos.



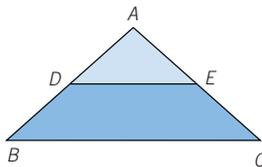
018 Dibuja tres pares de triángulos semejantes que no estén en posición de Tales. Indica cómo lo haces.



019 ¿Están los dos triángulos en posición de Tales?

Calcula  $\overline{EC}$  y  $\overline{CB}$  si:

- $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$
- $\overline{ED} = 5 \text{ cm}$
- $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$
- $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$



Los triángulos están en posición de Tales, ya que tienen en común el ángulo  $\hat{A}$  y los lados  $DE$  y  $BC$  son paralelos.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{\overline{EC}} \rightarrow \overline{EC} = \frac{24}{8} = 3 \text{ cm}$

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$

# Proporcionalidad geométrica

**020** Los lados de un triángulo miden 5, 4 y 8 cm, y los lados de otro, 5, 6 y 8 cm. Comprueba si son semejantes.

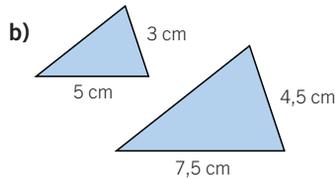
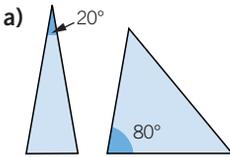
Sus lados no son proporcionales:  $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6} \neq \frac{8}{8}$ , y los triángulos no son semejantes.

**021** Comprueba que un triángulo rectángulo de catetos de 8 y 6 cm es semejante a otro de catetos de 4 y 3 cm.

La hipotenusa del primer triángulo es 10 cm y la del segundo es 5 cm.

Sus lados son proporcionales:  $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ , y los triángulos son semejantes.

**022** Comprueba si estos triángulos isósceles son semejantes, e indica el criterio aplicado.

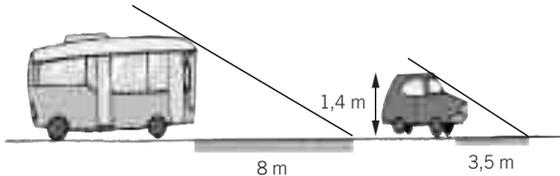


a) Los ángulos del primer triángulo miden  $20^\circ$ ,  $80^\circ$  y  $80^\circ$ , y los ángulos del segundo triángulo miden  $80^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $50^\circ$ , por lo que no son semejantes, al no ser sus lados iguales.

b) Los lados del primer triángulo miden 5 cm, 5 cm y 3 cm, y los lados del segundo miden 7,5 cm, 7,5 cm y 4,5 cm.

Como  $\frac{5}{7,5} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5}$ , los triángulos son semejantes por tener sus lados proporcionales.

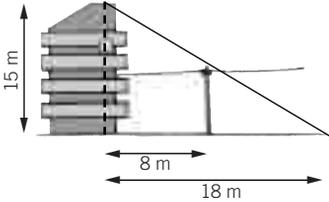
**023** La sombra de un autobús a cierta hora del día mide 8 m. A la misma hora, la sombra de un coche, que mide 1,4 m de altura, es de 3,5 m. ¿Qué altura tiene el autobús?



Se forman dos triángulos semejantes, ya que sus ángulos son iguales:

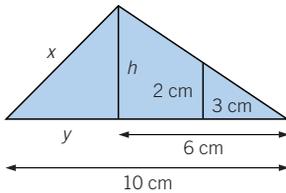
$$\frac{x}{8} = \frac{1,4}{3,5} \rightarrow x = 3,2 \text{ m}$$

024 ¿Qué altura tiene el poste?



$$\frac{15}{18} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 8,33 \text{ m}$$

025 Calcula el valor de  $x$ .



$$\frac{h}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$y = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,66 \text{ cm}$$

026 Dados estos rectángulos, resuelve.



a) ¿Son semejantes?

b) ¿Cuál es su razón de semejanza?

c) Determina las medidas de otro rectángulo que sea semejante a ellos.

a)  $\frac{30}{24} = \frac{20}{16} \rightarrow$  Son semejantes.

b) La razón de semejanza es 1,25.

c) Por ejemplo, 10 cm y 8 cm.

027 Calcula el perímetro de los rectángulos del ejercicio anterior. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?

$$P_{R. Grande} = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 60 + 40 = 100 \text{ cm}$$

$$P_{R. Pequeño} = 24 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 48 + 32 = 80 \text{ cm}$$

La razón es:  $\frac{100}{80} = 1,25$ .

La razón entre sus perímetros coincide con la razón de semejanza.

028 ¿Cuál es la razón entre las áreas del ejercicio anterior? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?

$$A_{R. Grande} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$$

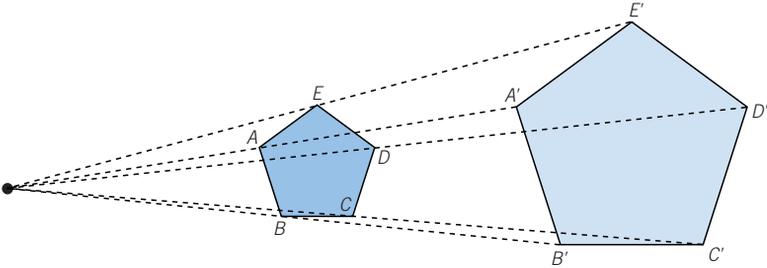
$$A_{R. Pequeño} = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2$$

La razón es:  $\frac{600}{384} = 1,5625 = 1,25^2$ .

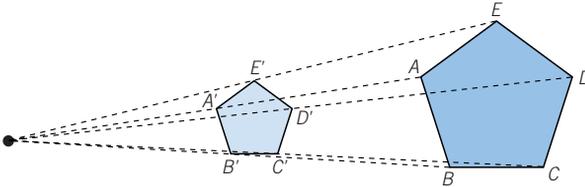
La razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

# Proporcionalidad geométrica

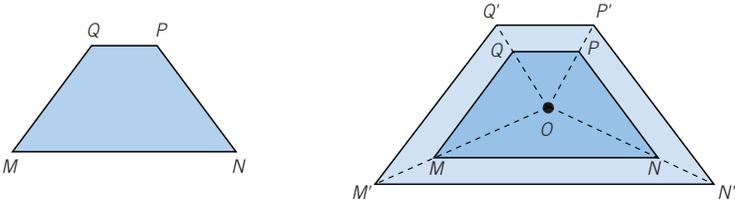
- 029** Observa el pentágono  $ABCDE$  de la figura.  
 Construye un pentágono semejante, sabiendo que la razón de semejanza es 2.



- 030** Dibuja un pentágono semejante al anterior cuya razón de semejanza es 0,5.



- 031** Construye un polígono semejante, con razón de semejanza 1,5, tomando como punto  $O$  un punto interior del polígono.



- 032** ¿Qué figura obtienes como resultado al construir un polígono semejante a otro con razón de semejanza 1?

Se obtiene un polígono idéntico al original.

- 033** Explica qué significa cada escala.

a) 1 : 300

b) 1 : 60.000

c) 1 : 12

- a) Una escala de 1 : 300 significa que la distancia original es 300 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 3 m en el original.
- b) Una escala de 1 : 60.000 significa que la distancia original es 60.000 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 600 m en el original.
- c) Una escala de 1 : 12 significa que la distancia original es 12 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 12 cm en el original.

- 034 ¿Qué escala se ha utilizado al dibujar un objeto si 3 cm del dibujo equivalen a 3 dm reales?

$$\frac{3 \text{ cm}}{3 \text{ dm}} = \frac{3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{1}{10}. \text{ La escala es } 1 : 10.$$

- 035 Realizamos el plano de una casa a escala 1 : 75.

- a) ¿Qué razón de semejanza se aplica?  
 b) ¿Qué medida real tiene una línea del plano de 5 cm de longitud?  
 c) ¿Cuánto mide en el plano una longitud de 4,5 cm?

a) La razón de semejanza es  $\frac{1}{75}$ .      c) En el plano mide:  $\frac{4,5}{75} = 0,06 \text{ cm}$ .

b)  $5 \cdot 75 = 375 \text{ cm}$

## ACTIVIDADES

- 036 Calcula la razón de estos segmentos.

- a)  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$        $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$       c)  $\overline{AB} = 15 \text{ dm}$        $\overline{CD} = 9 \text{ m}$   
 b)  $\overline{AB} = 64 \text{ cm}$        $\overline{CD} = 1 \text{ m}$       d)  $\overline{AB} = 20 \text{ m}$        $\overline{CD} = 4 \text{ m}$   
 a) 0,75      b) 0,64      c) 0,167      d) 5

- 037 Si la razón  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{4}$ , calcula:

- a)  $\overline{AB}$ , siendo  $\overline{CD} = 76 \text{ cm}$       b)  $\overline{CD}$ , siendo  $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$   
 a)  $\overline{AB} = 19 \text{ cm}$       b)  $\overline{CD} = 12 \text{ cm}$

- 038 Si la razón  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 1,6$ , calcula:

- a)  $\overline{AB}$ , siendo  $\overline{CD} = 9 \text{ dm}$       b)  $\overline{CD}$ , siendo  $\overline{AB} = 13,6 \text{ cm}$   
 a)  $\overline{AB} = 14,4 \text{ dm}$       b)  $\overline{CD} = 8,5 \text{ cm}$

- 039 ¿Son proporcionales los segmentos  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  y  $GH$  en las siguientes series?

- a)  $\overline{AB} = 2 \text{ cm}$        $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$        $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$        $\overline{GH} = 16 \text{ cm}$   
 b)  $\overline{AB} = 2 \text{ dm}$        $\overline{CD} = 1 \text{ m}$        $\overline{EF} = 5 \text{ cm}$        $\overline{GH} = 25 \text{ cm}$   
 c)  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$        $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$        $\overline{EF} = 4 \text{ m}$        $\overline{GH} = 3 \text{ m}$   
 d)  $\overline{AB} = 3 \text{ m}$        $\overline{CD} = 4 \text{ m}$        $\overline{EF} = 12 \text{ dm}$        $\overline{GH} = 16 \text{ dm}$

a)  $\frac{2}{5} \neq \frac{6}{16} \rightarrow$  No son proporcionales.      c)  $\frac{6}{8} \neq \frac{4}{3} \rightarrow$  No son proporcionales.

b)  $\frac{20}{100} = \frac{5}{25} \rightarrow$  Son proporcionales.      d)  $\frac{3}{4} = \frac{12}{16} \rightarrow$  Son proporcionales.

# Proporcionalidad geométrica

## 040 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN SEGMENTO PROPORCIONAL A OTROS TRES SEGMENTOS?

Dados tres segmentos:  $\overline{AB} = 4$  cm,  $\overline{CD} = 3$  cm y  $\overline{EF} = 2$  cm, calcula la longitud de un cuarto segmento,  $\overline{GH}$ , que sea proporcional a ellos.

El segmento que queremos hallar se llama **segmento cuarto proporcional**.

**PRIMERO.** Se aplica la definición de segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}}$$

**SEGUNDO.** Se resuelve la ecuación.

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}} \rightarrow 4 \cdot \overline{GH} = 3 \cdot 2 \rightarrow \overline{GH} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ cm}$$

**TERCERO.** Se comprueba la solución.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{1,5} \rightarrow 4 \cdot 1,5 = 3 \cdot 2 \rightarrow 6 = 6$$

## 041 ● Calcula la longitud que debe tener el cuarto segmento proporcional a los segmentos $\overline{AB}$ , $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ .

a)  $\overline{AB} = 3$  cm     $\overline{CD} = 6$  cm     $\overline{EF} = 9$  cm

b)  $\overline{AB} = 2$  m     $\overline{CD} = 7$  m     $\overline{EF} = 8,2$  m

c)  $\overline{AB} = 3$  dm     $\overline{CD} = 5$  dm     $\overline{EF} = 21$  dm

d)  $\overline{AB} = 10$  cm     $\overline{CD} = 15$  cm     $\overline{EF} = 25$  cm

a)  $\frac{3}{6} = \frac{9}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 18$  cm

c)  $\frac{3}{5} = \frac{21}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 35$  dm

b)  $\frac{2}{7} = \frac{8,2}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 28,7$  m

d)  $\frac{10}{15} = \frac{25}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 37,5$  cm

## 042 ●● La razón de dos segmentos es $\frac{3}{5}$ y la suma de sus longitudes es 8 cm.

Halla la longitud de cada segmento.

$$a + b = 8 \quad r = \frac{3}{5}$$

Despejando  $a$  en la primera ecuación:  $a = 8 - b$ .

La razón de proporcionalidad es:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{8-b}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow 5 \cdot (8-b) = 3 \cdot b \rightarrow$$

$$\rightarrow 40 - 5 \cdot b = 3 \cdot b \rightarrow 40 = 8b \rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm} \rightarrow a = 8 - 5 = 3 \text{ cm}$$

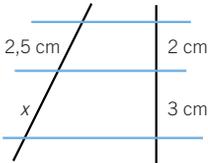
- 043** La razón de dos segmentos es 4 y la diferencia de sus longitudes es 7 cm.  
 ●● Calcula la longitud de cada segmento.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 4 \\ a - b = 7 \end{array} \right\} \rightarrow a = 4b$$

$$4b - b = 7 \rightarrow b = \frac{7}{3} = 2,33 \text{ cm} \rightarrow a = \frac{28}{3} = 9,33 \text{ cm}$$

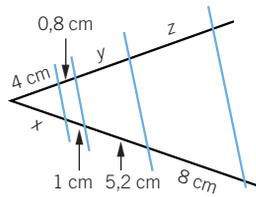
- 044** Calcula las longitudes desconocidas.

a)



$$\frac{x}{3} = \frac{2,5}{2} \rightarrow x = 3,75 \text{ cm}$$

d)

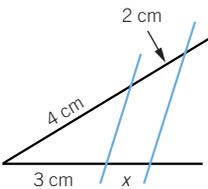


$$\frac{4}{x} = \frac{0,8}{1} \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{5,2} = \frac{0,8}{1} \rightarrow y = 4,16 \text{ cm}$$

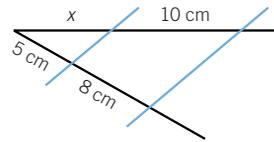
$$\frac{z}{8} = \frac{0,8}{1} \rightarrow z = 6,4 \text{ cm}$$

b)



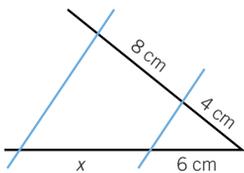
$$\frac{x}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow x = 1,5 \text{ cm}$$

e)



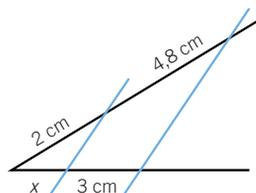
$$\frac{x}{5} = \frac{10}{8} \rightarrow x = 6,25 \text{ cm}$$

c)



$$\frac{x}{6} = \frac{8}{4} \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

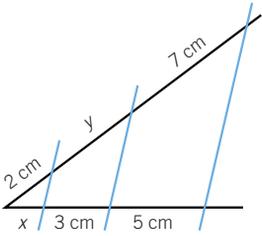
f)



$$\frac{x}{3} = \frac{2}{4,8} \rightarrow x = 1,25 \text{ cm}$$

# Proporcionalidad geométrica

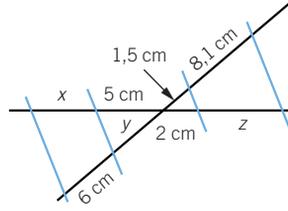
g)



$$\frac{x}{2} = \frac{5}{7} \rightarrow x = 1,43 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{5}{7} \rightarrow y = 4,2 \text{ cm}$$

h)

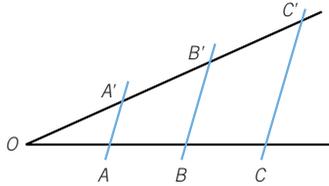


$$\frac{x}{6} = \frac{2}{1,5} \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{y} = \frac{2}{1,5} \rightarrow y = 3,75 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{8,1} = \frac{2}{1,5} \rightarrow z = 10,8 \text{ cm}$$

045 Considera esta figura.



- a) Si  $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$        $\overline{OB} = 5 \text{ cm}$   
 $\overline{OA'} = 2,6 \text{ cm}$        $\overline{OC'} = 11,7 \text{ cm}$

calcula:  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{OB'}$  y  $\overline{BC}$ .

- b) Si  $\overline{OA'} = 4 \text{ cm}$        $\overline{OB} = 9 \text{ cm}$   
 $\overline{OB'} = 12 \text{ cm}$        $\overline{OC'} = 18 \text{ cm}$

calcula:  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{OC}$  y  $\overline{BC}$ .

- c) Si  $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$        $\overline{OC} = 22,5 \text{ cm}$   
 $\overline{OC'} = 36 \text{ cm}$        $\overline{OB'} = 24 \text{ cm}$

calcula:  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{B'C'}$ .

- a)  $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{3}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3,9 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{5}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6,5 \text{ cm}$$

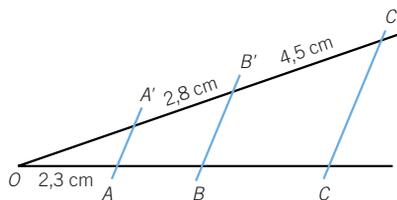
$$\overline{B'C'} = \overline{OC'} - \overline{OB'} = 11,7 - 6,5 = 5,2 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{\overline{BC}}{5,2} \rightarrow \overline{BC} = 4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \overline{A'B'} &= \overline{OB'} - \overline{OA'} = 12 - 4 = 8 \text{ cm} \\
 \overline{B'C'} &= \overline{OC'} - \overline{OB'} = 18 - 12 = 6 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OA} = 3 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{8} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{AB} = 6 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{18} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OC} = 13,5 \text{ cm} \\
 \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = 13,5 - 9 = 4,5 \text{ cm} \\
 \\
 \text{c) } \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{5}{\overline{OA'}} = \frac{22,5}{36} \rightarrow \overline{OA'} = 8 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{\overline{OB}}{24} \rightarrow \overline{OB} = 15 \text{ cm} \\
 \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = 15 - 5 = 10 \text{ cm} \\
 \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = 22,5 - 10 = 12,5 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{10}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 16 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{12,5}{\overline{B'C'}} \rightarrow \overline{B'C'} = 20 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

046

En la siguiente figura, la razón  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0,8$ .

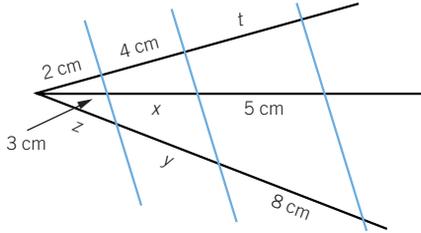


Calcula  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \rightarrow 0,8 = \frac{2,3}{\overline{OA'}} \rightarrow \overline{OA'} = 2,875 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 0,8 = \frac{\overline{AB}}{2,8} \rightarrow \overline{AB} = 2,24 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow 0,8 = \frac{\overline{BC}}{4,5} \rightarrow \overline{BC} = 3,6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

# Proporcionalidad geométrica

047 Determina las longitudes desconocidas.



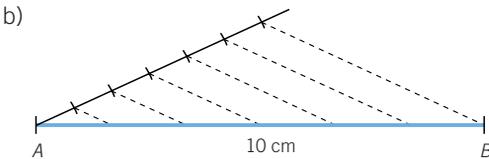
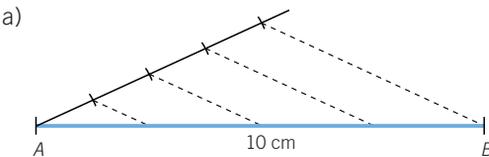
$$\frac{5}{8} = \frac{3}{z} \rightarrow z = 4,8 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{6}{y} \rightarrow y = 9,6 \text{ cm}$$

048 Divide gráficamente un segmento  $\overline{AB}$ , con  $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ , en:

- a) 4 partes iguales.
- b) 6 partes iguales.

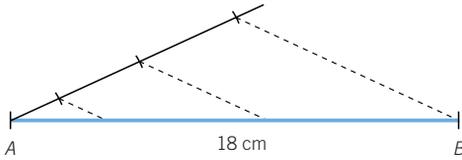


049 Divide gráficamente un segmento  $\overline{AB}$ , con  $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$ , en partes proporcionales a tres segmentos de medida:

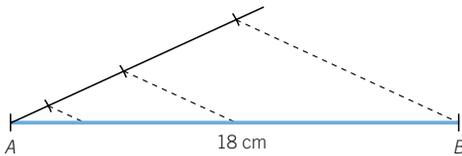
- a) 3 cm, 5 cm y 6 cm
- b) 2 cm, 4 cm y 6 cm
- c) 3 cm, 4 cm y 5 cm
- d) 2 cm, 6 cm y 9 cm

Calcula las longitudes de los segmentos y compara el resultado con la solución gráfica.

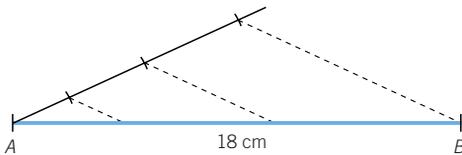
$$a) \frac{18}{3+5+6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 3,86 \text{ cm} \\ y = 6,43 \text{ cm} \\ z = 7,71 \text{ cm} \end{cases}$$



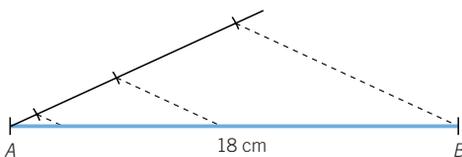
$$b) \frac{18}{2+4+6} = \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ cm} \\ y = 6 \text{ cm} \\ z = 9 \text{ cm} \end{cases}$$



$$c) \frac{18}{3+4+5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \rightarrow \begin{cases} x = 4,5 \text{ cm} \\ y = 6 \text{ cm} \\ z = 7,5 \text{ cm} \end{cases}$$



$$d) \frac{18}{2+6+9} = \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} \rightarrow \begin{cases} x = 2,11 \text{ cm} \\ y = 6,35 \text{ cm} \\ z = 9,53 \text{ cm} \end{cases}$$

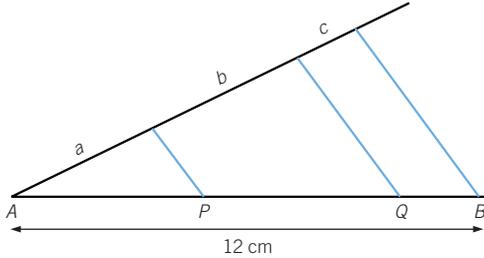


# Proporcionalidad geométrica

050



Observa la siguiente figura en la que se divide el segmento  $AB$ , de 12 cm de longitud, en partes proporcionales a los segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Calcula  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PQ}$  y  $\overline{QB}$ , teniendo en cuenta que:



a)  $a = 6$  cm,  $b = 8$  cm y  $c = 4$  cm

c)  $a = 8$  cm,  $b = 10$  cm y  $c = 4$  cm

b)  $a = 5$  cm,  $b = 10$  cm y  $c = 3$  cm

d)  $a = 2$  cm,  $b = 5$  cm y  $c = 1$  cm

$$\text{a) } \frac{12}{6 + 8 + 4} = \frac{\overline{AP}}{6} = \frac{\overline{PQ}}{8} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

$$\overline{AP} = 3,6 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 4,8 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2,4 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \frac{12}{5 + 10 + 3} = \frac{\overline{AP}}{5} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{3}$$

$$\overline{AP} = 3,33 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 6,67 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2 \text{ cm}$$

$$\text{c) } \frac{12}{8 + 10 + 4} = \frac{\overline{AP}}{8} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

$$\overline{AP} = 4,36 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 5,45 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2,18 \text{ cm}$$

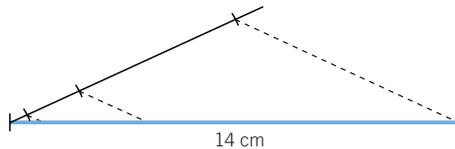
$$\text{d) } \frac{12}{2 + 5 + 1} = \frac{\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{PQ}}{5} = \frac{\overline{QB}}{1}$$

$$\overline{AP} = 3 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 7,5 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 1,5 \text{ cm}$$

051



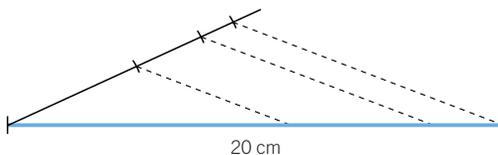
Divide un segmento de 14 cm en tres partes, cada una el triple de la anterior.



052

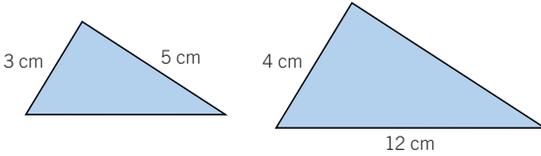


Divide un segmento de 20 cm en tres partes, cada una la mitad de la anterior.

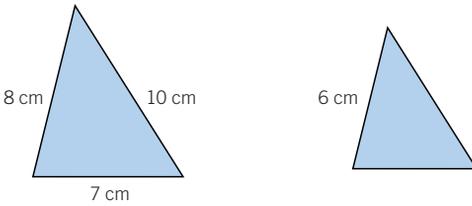


**053** Calcula la longitud de los lados desconocidos en los siguientes pares de triángulos semejantes.

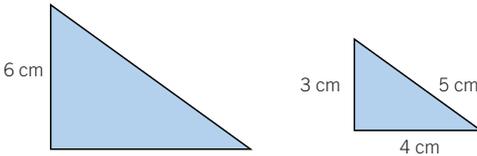
a)



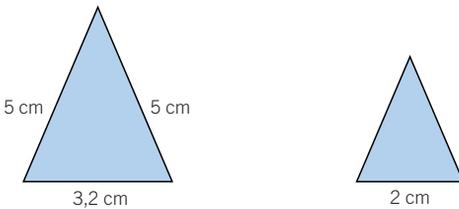
b)



c)



d)



$$a) \frac{3}{4} = \frac{5}{x} = \frac{y}{12}$$

$$x = 6,66 \text{ cm} \quad y = 9 \text{ cm}$$

Los lados miden 9 cm y 6,66 cm.

$$b) \frac{8}{6} = \frac{10}{x} = \frac{7}{y}$$

$$x = 7,5 \text{ cm} \quad y = 5,25 \text{ cm}$$

Los lados miden 5,25 cm y 7,5 cm.

$$c) \frac{6}{3} = \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$$

$$x = 10 \text{ cm} \quad y = 8 \text{ cm}$$

Los lados miden 8 cm y 10 cm.

$$d) \frac{5}{x} = \frac{5}{y} = \frac{3,2}{2}$$

$$x = 3,125 \text{ cm} \quad y = 3,125 \text{ cm}$$

Los dos lados miden 3,125 cm.

# Proporcionalidad geométrica

054

Dos triángulos,  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ , son semejantes. Los lados de  $\widehat{ABC}$  son:

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 5 \text{ cm} \quad \overline{CA} = 6 \text{ cm}$$

Calcula los lados de  $\widehat{A'B'C'}$  y la razón de semejanza, si  $\overline{A'B'} = 7,2 \text{ cm}$ .

La razón de semejanza es:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{4}{7,2} = 0,5$ .

$$\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{0,5} = 9 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{\overline{CA}}{0,5} = 10,8 \text{ cm}$$

055

La razón de semejanza de dos triángulos,  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ , es  $r = \frac{1}{4}$ .

Calcula los lados desconocidos de los dos triángulos, sabiendo que:

a)  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$  y  $\overline{CA} = 10 \text{ cm}$

b)  $\overline{A'B'} = 20 \text{ cm}$ ,  $\overline{B'C'} = 24 \text{ cm}$  y  $\overline{C'A'} = 26 \text{ cm}$

c)  $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$  y  $\overline{C'A'} = 16 \text{ cm}$

a)  $\overline{A'B'} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$      $\overline{B'C'} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}$      $\overline{C'A'} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$

b)  $\overline{AB} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ cm}$      $\overline{BC} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \text{ cm}$      $\overline{CA} = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6,5 \text{ cm}$

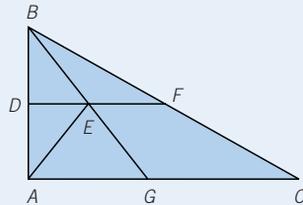
c)  $\overline{A'B'} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$      $\overline{B'C'} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$      $\overline{CA} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4 \text{ cm}$

056

## HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RECONOCEN LOS TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES?

Indica qué triángulos de la siguiente figura están en posición de Tales.



**PRIMERO.** Se identifican todos los triángulos posibles.

$$\widehat{ABC} \quad \widehat{ABE} \quad \widehat{ABG} \quad \widehat{ADE} \quad \widehat{AEG} \quad \widehat{EBF} \quad \widehat{GBC} \quad \widehat{DBE} \quad \widehat{DBF}$$

**SEGUNDO.** Se toman los que tienen un ángulo común.

$\widehat{ABC}$  y  $\widehat{DBF}$  tienen el ángulo  $\widehat{B}$  en común.

$\widehat{ABE}$ ,  $\widehat{ABG}$  y  $\widehat{DBE}$  tienen el ángulo  $\widehat{B}$  en común.

$\widehat{EBF}$  y  $\widehat{GBC}$  tienen el ángulo  $\widehat{B}$  en común.

**TERCERO.** De cada grupo de triángulos con un ángulo en común se consideran los que tienen paralelos los lados opuestos a ese ángulo.

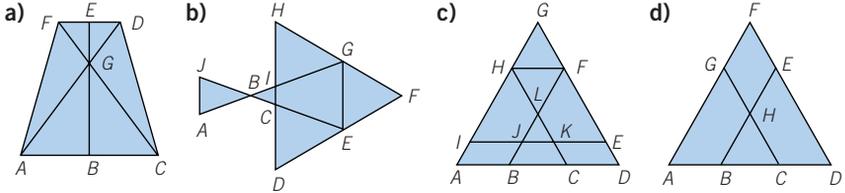
$\widehat{ABC}$  y  $\widehat{DBF}$  tienen  $AC$  y  $DF$  paralelos.

$\widehat{ABG}$  y  $\widehat{DBE}$  tienen  $AG$  y  $DE$  paralelos.

$\widehat{EBF}$  y  $\widehat{GBC}$  tienen  $EF$  y  $GC$  paralelos.

Luego estos pares de triángulos están en posición de Tales.

**057** Identifica en las siguientes figuras todos los triángulos que estén en posición de Tales.

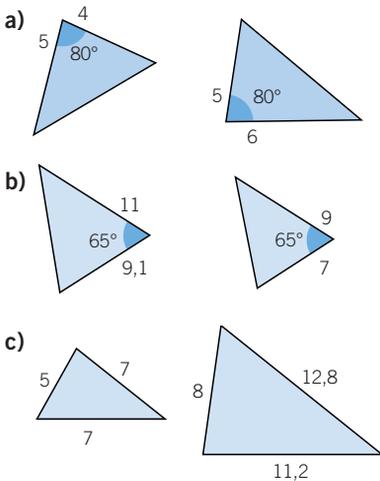


- a) Los triángulos que están en posición de Tales son:  
 $\widehat{AGC}$  y  $\widehat{DFG}$ ,  $\widehat{ABG}$  y  $\widehat{DEG}$ ,  $\widehat{BCG}$  y  $\widehat{EFG}$ ,  $\widehat{AFG}$  y  $\widehat{CDG}$ .
- b) Los triángulos que están en posición de Tales son:  
 $\widehat{ABJ}$  con  $\widehat{BCI}$  y  $\widehat{BEG}$ ,  $\widehat{HDF}$  y  $\widehat{GEF}$ ,  $\widehat{HDF}$  y  $\widehat{HGI}$ ,  $\widehat{HDF}$  y  $\widehat{CED}$ .
- c) Los triángulos que están en posición de Tales son:  
 $\widehat{ADG}$  y  $\widehat{ACH}$ ,  $\widehat{ADG}$  y  $\widehat{HFG}$ ,  $\widehat{ADG}$  e  $\widehat{IEG}$ ,  $\widehat{ADG}$  y  $\widehat{BDF}$ ,  $\widehat{HFL}$  y  $\widehat{BCL}$ ,  
 $\widehat{HFL}$  y  $\widehat{LJK}$ ,  $\widehat{LJK}$  y  $\widehat{LBC}$ .
- d) Los triángulos que están en posición de Tales son:  
 $\widehat{ADF}$  y  $\widehat{AGC}$ ,  $\widehat{ADF}$  y  $\widehat{BED}$ ,  $\widehat{ADF}$  y  $\widehat{GEF}$ ,  $\widehat{BCH}$  y  $\widehat{GEH}$ .

**058** Los lados de un triángulo  $\widehat{ABC}$  miden  $\overline{AB} = 12$  mm,  $\overline{BC} = 15$  mm y  $\overline{CA} = 21$  mm, y los del triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  miden  $\overline{A'B'} = 35$  mm,  $\overline{B'C'} = 25$  mm y  $\overline{C'A'} = 20$  mm. ¿Son semejantes los dos triángulos?

Los lados son proporcionales:  $\frac{21}{35} = \frac{15}{25} = \frac{12}{20}$ , y son semejantes.

**059** Determina si estos pares de triángulos son semejantes y explica qué criterio aplicas en cada caso.

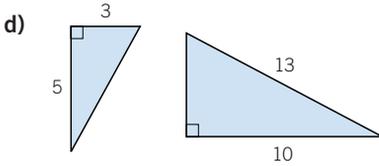


a) Como  $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6}$ , no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.

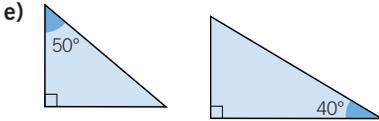
b) Como  $\frac{9}{11} \neq \frac{7}{9,1}$ , no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.

c) Como  $\frac{5}{8} = \frac{7}{11,2} \neq \frac{7}{12,8}$ , no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.

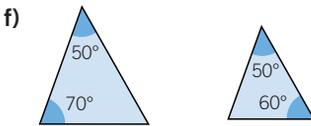
# Proporcionalidad geométrica



d) La hipotenusa del triángulo menor es  $\sqrt{34}$  y el cateto del triángulo mayor es  $\sqrt{69}$ .  
Como  $\frac{5}{10} \neq \frac{3}{\sqrt{69}}$ , no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.



e) Son semejantes, ya que sus ángulos son iguales ( $90^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $40^\circ$ ).



f) Son semejantes, pues sus ángulos son iguales ( $70^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $60^\circ$ ).

**060** Los lados de un triángulo  $\widehat{ABC}$  miden  $\overline{AB} = 4$  cm,  $\overline{BC} = 5$  cm y  $\overline{CA} = 6$  cm.



Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante  $\widehat{A'B'C'}$ , sabiendo que:

a) La razón de semejanza es  $r = 2,5$ .

b) El perímetro de  $\widehat{A'B'C'}$  es 30 cm.

$$a) \overline{A'B'} = \frac{1}{2,5} \cdot 4 = 1,6 \text{ cm} \qquad \overline{C'A'} = \frac{1}{2,5} \cdot 6 = 2,4 \text{ cm}$$

$$\overline{B'C'} = \frac{1}{2,5} \cdot 5 = 2 \text{ cm}$$

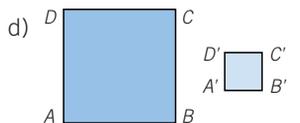
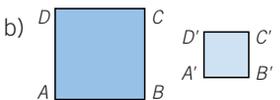
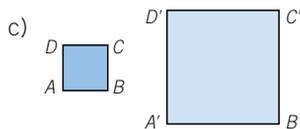
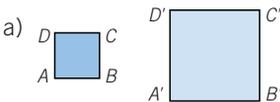
$$b) \frac{4 + 5 + 6}{20} = \frac{4}{\overline{A'B'}} = \frac{5}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{\overline{C'A'}}$$

$$\overline{A'B'} = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = \frac{3}{4} \cdot 5 = 3,75 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{3}{4} \cdot 6 = 4,5 \text{ cm}$$

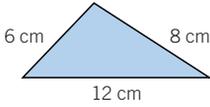
**061** Dibuja dos cuadrados semejantes que tengan las siguientes razones de semejanza.



a)  $r = 2$       b)  $r = \frac{1}{2}$       c)  $r = 2,5$       d)  $r = \frac{1}{3}$



**062** Dibuja triángulos semejantes que tengan estas razones de semejanza respecto del dibujado.

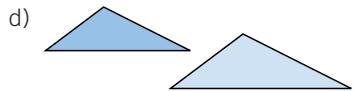
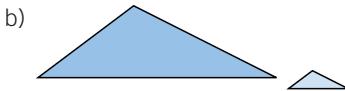
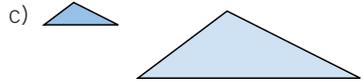
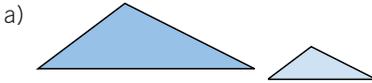


a)  $r = \frac{1}{2}$

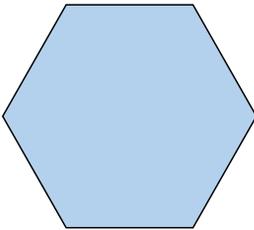
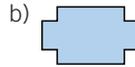
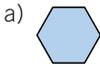
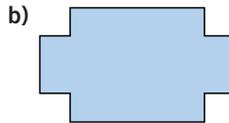
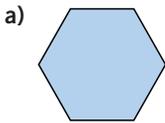
c)  $r = 3$

b)  $r = \frac{1}{4}$

d)  $r = \frac{5}{4}$



**063** Dibuja figuras semejantes a la siguiente que tengan como razón de semejanza  $r = 2$  y  $r = 0,5$ .



**064** Dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son semejantes y su razón de semejanza es  $\frac{1}{4}$ . Las medidas de los lados del triángulo  $\widehat{ABC}$  son  $\overline{AB} = 8$  cm,  $\overline{BC} = 10$  cm y  $\overline{AC} = 14$  cm. Halla las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{1}{4} \cdot 14 = 3,5 \text{ cm}$$

**065** Dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son semejantes y su razón de semejanza es 3. Las medidas de los lados del triángulo  $\widehat{ABC}$  son  $\overline{AB} = 6$  cm,  $\overline{BC} = 7$  cm y  $\overline{AC} = 3,5$  cm. Halla las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = 3 \cdot 3,5 = 10,5 \text{ cm}$$

# Proporcionalidad geométrica

066

Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones.



- a) Todos los cuadrados son semejantes.
- b) Todos los rectángulos son semejantes.
- c) Todos los pentágonos son semejantes.
- d) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
- e) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

a) Verdadera    b) Falsa    c) Falsa    e) Falsa    d) Verdadera

067

Halla el perímetro de un rectángulo que es semejante a otro rectángulo de lados 8 cm y 5 cm, con estas razones de semejanza.



- a)  $r = 2$     b)  $r = 0,5$     c)  $r = \frac{3}{4}$     d)  $r = \frac{5}{2}$

¿Qué relación existe entre los perímetros del rectángulo original y el de los triángulos semejantes?

- a) Los lados serán 16 cm y 10 cm, por lo que su perímetro es 52 cm.
- b) Los lados serán 4 cm y 2,5 cm, por lo que su perímetro es 18 cm.
- c) Los lados serán 6 cm y 3,75 cm, por lo que su perímetro es 19,5 cm.
- d) Los lados serán 20 cm y 12,5 cm, por lo que su perímetro es 65 cm.

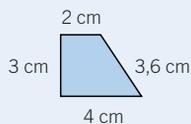
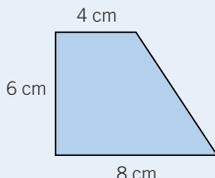
La razón de los perímetros es la misma que la de los rectángulos.

068

**HAZLO ASÍ**

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE ENTRE EL PERÍMETRO Y EL ÁREA DE DOS FIGURAS SEMEJANTES?

Calcula el perímetro y el área de estos dos trapecios semejantes.



Si dos polígonos son semejantes, se cumple que:

- Sus perímetros son proporcionales con razón  $r$ .
- Sus áreas son proporcionales con razón  $r^2$ .

**PRIMERO.** Se calcula la razón de semejanza del primer polígono respecto del segundo.

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2 \leftarrow \text{Razón de semejanza}$$

**SEGUNDO.** Se obtiene el perímetro y el área del segundo polígono.

$$P = 3 + 4 + 2 + 3,6 = 12,6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

**TERCERO.** Multiplicando estos resultados por la razón y el cuadrado de la razón, se obtienen el perímetro y el área del primer polígono, respectivamente.

$$P = 12,6 \cdot r = 12,6 \cdot 2 = 25,2 \text{ cm}$$

$$A = 9 \cdot r^2 = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ cm}^2$$

**069** Halla el perímetro y el área de estos polígonos semejantes.

- ●
- a) Triángulo semejante a un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm y razón 3.  
 b) Cuadrado semejante a un cuadrado de lado 3 cm y razón 4.  
 c) Rectángulo semejante a un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm y razón 2.

$$a) P = 12 \cdot 3 = 36 \text{ cm} \quad A = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

$$b) P = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm} \quad A = 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$c) P = 20 \cdot 2 = 40 \text{ cm} \quad A = 4 \cdot 6 \cdot 2^2 = 96 \text{ cm}^2$$

**070** Expresa, mediante una escala numérica.

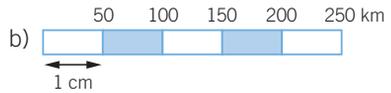
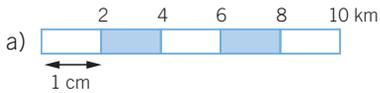
- 
- a) 25 cm de un plano representan 25 km reales.  
 b) 0,8 dm de un plano representan 160 km reales.

$$a) 1 : 100.000$$

$$b) 1 : 2.000.000$$

**071** Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.

- 
- a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.  
 b) 1 cm en el plano equivale a 50 km en la realidad.



**072** Calcula la altura real de los objetos.

Objeto	Escala
	1 : 20
	1 : 10
	1 : 25

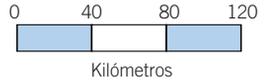
El armario en el gráfico mide 2 cm, y en la realidad mide:  
 $2 \cdot 20 = 40 \text{ cm}$ .

La furgoneta en el gráfico mide 1,5 cm, y en la realidad mide:  
 $1,5 \cdot 10 = 15 \text{ cm}$ .

La casa en el gráfico mide 2,3 cm, y en la realidad mide:  
 $2,3 \cdot 25 = 57,5 \text{ cm}$ .

# Proporcionalidad geométrica

- 073** ● **Halla la distancia real entre dos pueblos separados 4 cm en un mapa con esta escala.**



$$40 \text{ km} = 4.000.000 \text{ cm}$$

La escala gráfica es 1 : 4.000.000, de manera que 4 cm en el plano equivalen a:  $4 \cdot 4.000.000 = 16.000.000 \text{ cm} = 160 \text{ km}$  reales.

- 074** ● **La distancia real entre dos ciudades es de 450 km. Halla la distancia que las separa en un mapa realizado a escala 1 : 1.500.000.**

La escala 1 : 1.500.000 significa que 1.500.000 cm de la realidad se representan en el plano con 1 cm. Como  $1.500.000 \text{ cm} = 15 \text{ km}$ :

$$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ km} \longrightarrow 1 \text{ cm} \\ 450 \text{ km} \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{450}{15} = 30 \text{ cm}$$

- 075** ●● **Al representar la carretera que une dos pueblos en un mapa de escala 1 : 500.000, su longitud mide 6 cm. ¿Cuál sería la longitud de la carretera si la representamos en un plano de escala 1 : 60.000?**

En la escala 1 : 500.000, la longitud de 6 cm en el mapa es:

$$6 \cdot 500.000 = 3.000.000 \text{ cm} = 30 \text{ km reales}$$

En la escala 1 : 60.000, la longitud real de 30 km es:

$$3.000.000 : 60.000 = 50 \text{ cm en el plano}$$

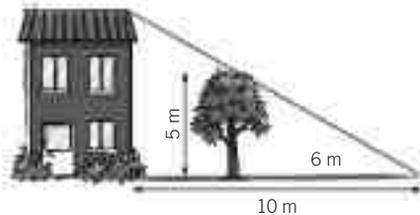
- 076** ●● **El plano de una vivienda está realizado a escala 1 : 60.**

- a) **¿Qué dimensiones reales tiene la cocina si en el plano mide 4 cm de ancho y 7 cm de largo?**  
b) **El pasillo mide 7,5 m en la realidad. ¿Cuánto mide de largo en el plano?**

a) Ancho:  $4 \cdot 60 = 240 \text{ cm} = 2,4 \text{ m}$ . Largo:  $7 \cdot 60 = 420 \text{ cm} = 4,2 \text{ m}$ .

b) Largo:  $\frac{750}{60} = 12,5 \text{ cm}$ .

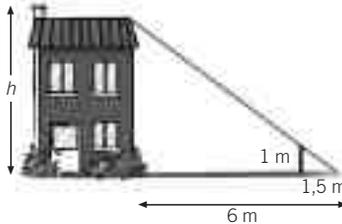
- 077** ●● **Un árbol mide 5 m de altura y, a una determinada hora del día, proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio de la figura si a la misma hora proyecta una sombra de 10 m?**



$$\frac{6}{10} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 8,33 \text{ m}$$

El edificio tiene 8,33 m de altura.

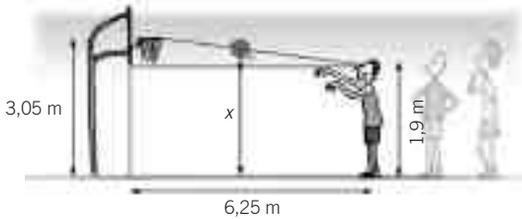
- 078** Si un palo mide 1 m, y la sombra que proyecta a una determinada hora del día es de 1,5 m, ¿cuánto mide un edificio que proyecta una sombra de 6 m a la misma hora?



Como son dos triángulos rectángulos semejantes:

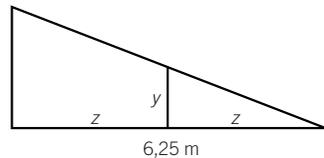
$$\frac{h}{1} = \frac{6}{1,5} \rightarrow h = 4 \text{ m}$$

- 079** Un jugador de baloncesto de 1,9 m, que está situado a 6,25 m de la canasta, lanza el balón hacia la misma. Calcula la altura a la que está el balón cuando va por la mitad del recorrido.



Ambos triángulos son semejantes, y como  $z$  es la mitad de 6,25 m, y será la mitad de 1,15 m:  $y = 0,575$  m.

La altura a la que está el balón será:  
 $x = 1,9 + 0,575 = 2,475$  m.



- 080** La sombra que proyecta un padre que mide 1,8 m de altura, a las 3 de la tarde, es de 2,1 m. ¿Qué altura tendrá su hijo si la sombra que proyecta es de 1,5 m?

$$\frac{1,8}{2,1} = \frac{x}{1,5} \rightarrow x = 1,29 \text{ m}$$

- 081** La sombra que proyecta Julia, que mide 1,34 m, a la 1 de la tarde, es de 1,2 m. ¿Cuánto mide su madre si en ese momento proyecta una sombra de 1,4 m?

$$\frac{1,34}{1,2} = \frac{x}{1,4} \rightarrow x = 1,56 \text{ m}$$

# Proporcionalidad geométrica

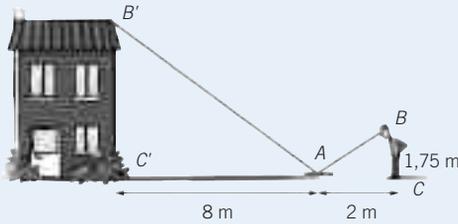
- 082** ●● Al lado de un semáforo, la sombra de Juan mide 1,5 m y la sombra del semáforo mide 60 cm más que la de Juan. ¿Cuál es la longitud del semáforo si Juan mide 1,75 m?

$$\frac{1,75}{1,5} = \frac{x}{2,1} \rightarrow x = 2,45 \text{ m}$$

**083** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA MEDIANTE EL REFLEJO EN UN CRISTAL?

Para determinar la altura de un objeto inaccesible, colocamos un espejo en el suelo y nos alejamos la distancia necesaria para observar el punto más alto del objeto. ¿Qué altura tiene el edificio?



**PRIMERO.** Se comprueba que los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{AB'C'}$  son semejantes. En este caso son semejantes por ser triángulos rectángulos y por ser iguales los ángulos de refracción.

**SEGUNDO.** Se aplica la proporcionalidad entre sus lados.

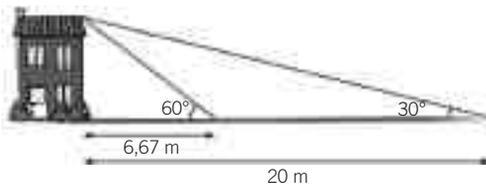
$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{B'C'}}{1,75} = \frac{8}{2} \rightarrow \overline{B'C'} = 1,75 \cdot 4 = 7 \text{ m}$$

La altura del edificio es 7 m.

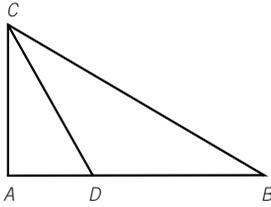
- 084** ●●● Ana está situada a 5 m de la orilla de un río y ve reflejada una montaña en el agua. Si Ana mide 1,7 m y el río está a 3 km de la montaña, ¿qué altura tiene la montaña?

$$\frac{x}{3.000} = \frac{1,7}{5} \rightarrow x = 1.020 \text{ m}$$

- 085** ●●● Se mide la sombra de un edificio en dos momentos del día.



Calcula la altura del edificio.

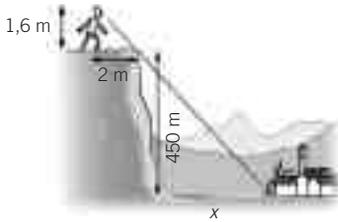


Como los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{ACD}$  son semejantes:

$$\frac{6,67}{AC} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = \sqrt{133,4} = 11,65 \text{ m}$$

La altura del edificio es 11,65 m.

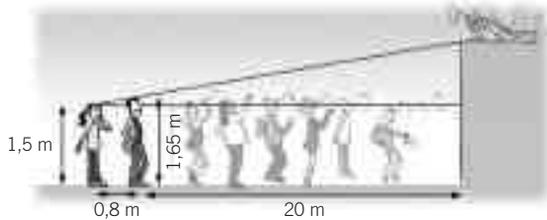
- 086** Pedro está a 2 m de un precipicio y ve alineado un pueblo con el borde del precipicio. ¿A qué distancia está el pueblo del precipicio?



$$\frac{1,6}{450} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 562,5 \text{ m}$$

La distancia del pueblo al precipicio es 562,5 m.

- 087** María, que mide 1,5 m, acude a un concierto de rock, y 80 cm por delante de ella, se sitúa Luis, que mide 1,65 m. Calcula la altura del escenario si María ve el borde del mismo justo por encima de Luis y Luis se encuentra a 20 m del escenario.



$$\frac{0,8}{0,8 + 20} = \frac{1,65 - 1,5}{x} \rightarrow x = 3,9 \text{ m es la altura sobre María.}$$

La altura del escenario es:  $1,5 + 3,9 = 5,4 \text{ m}$ .

- 088** Razona las siguientes cuestiones.

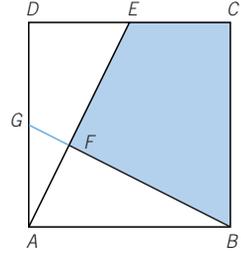
- a) Dos polígonos con todos sus ángulos iguales, ¿son semejantes?  
¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?
- b) Dos polígonos con todos sus lados proporcionales, ¿son semejantes?  
¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?
- a) No es cierto en general, ya que la igualdad de los ángulos no supone que los lados sean proporcionales, por ejemplo en los rectángulos. Solo es cierto en el caso de los triángulos.
- b) No es cierto en general, ya que la proporcionalidad de los lados no implica la igualdad de los ángulos, por ejemplo un cuadrado y un rombo. Solo es cierto en el caso de los triángulos.

# Proporcionalidad geométrica

089

Halla el área de la zona sombreada, sabiendo que:

- El cuadrado mide 2 cm de lado.
- El punto  $E$  es el punto medio del lado  $DC$ .
- El ángulo  $\hat{F}$  es recto.



Como  $\widehat{ABG}$  es igual a  $\widehat{AED}$ , el área buscada es igual al área del cuadrado menos el área de los dos triángulos más el área de la intersección (el triángulo  $\widehat{AFG}$ , que es semejante a  $\widehat{ADF}$ ).

$$\overline{AE} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{FG}}{1} = \frac{\overline{AF}}{2} \rightarrow \begin{cases} \overline{FG} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45 \text{ cm} \\ \overline{AF} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89 \text{ cm} \end{cases}$$

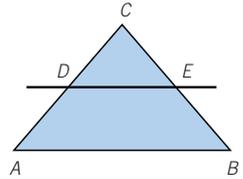
$$\text{Área de } \widehat{AFG} = \frac{0,45 \cdot 0,89}{2} = 0,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 4 - 1 - 1 + 0,2 = 2,2 \text{ cm}^2$$

090

El triángulo  $\widehat{ABC}$  es isósceles, de área  $8 \text{ cm}^2$ .

Si  $D$  y  $E$  son los puntos medios de los lados iguales, calcula el área del trapecio  $ABDE$ .



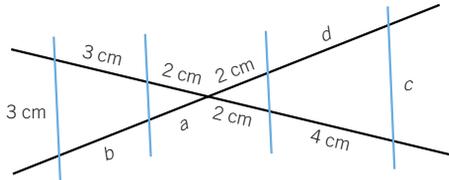
El área del trapecio es el área de  $\widehat{ABC}$  menos el área de  $\widehat{DEC}$ .

Los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{DEC}$  son semejantes, de razón  $\frac{1}{2}$ , y su área tiene como razón  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , por lo que el área de  $\widehat{DEC}$  es:  $8 : 4 = 2 \text{ cm}^2$ .

El área del trapecio es:  $8 - 2 = 6 \text{ cm}^2$ .

091

Halla los datos que faltan.



Por estar los triángulos en posición de Tales:

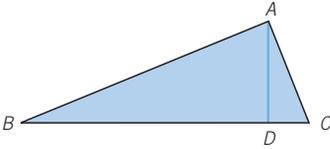
$$\frac{2}{2} = \frac{d}{4} \rightarrow d = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{b} \rightarrow b = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{a} \rightarrow a = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{c} = \frac{2+3}{3} \rightarrow c = \frac{6}{5} = 1,2 \text{ cm}$$

- 092 Demuestra que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo genera otros dos semejantes.



Por ser  $\widehat{ABC}$  un triángulo rectángulo:  
 $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C}$ .

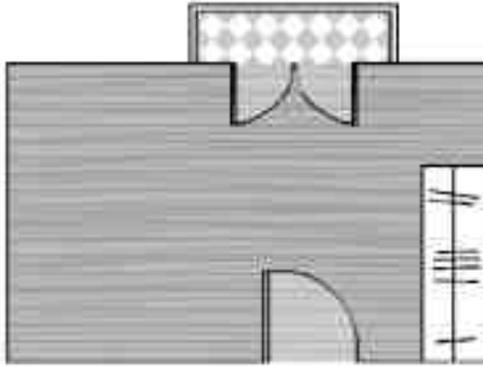
Por ser  $\widehat{DCA}$  un triángulo rectángulo:  
 $\widehat{A} = 90^\circ - \widehat{C}$ .

Por tanto,  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{DCA}$  tienen los tres ángulos iguales, luego son semejantes.

El razonamiento para  $\widehat{DAB}$  es semejante.

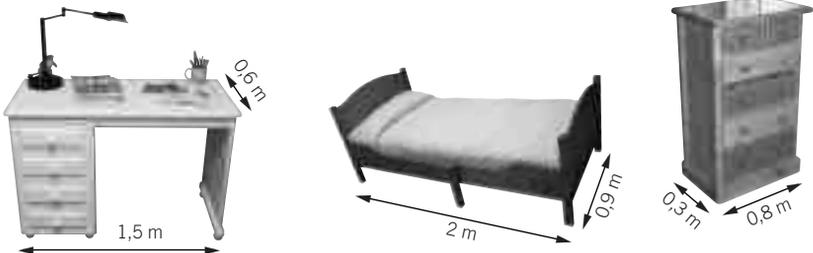
## EN LA VIDA COTIDIANA

- 093 Arturo se va a mudar a un piso nuevo. Según el plano esta será su habitación.



El plano está dibujado a escala y lo único que Arturo sabe de su nueva habitación es que en realidad mide 4,56 m de largo.

En esta habitación tendrá que distribuir los muebles que tiene. Para hacerse una idea de cómo los colocará, ha medido las dimensiones de todos.



Después, los va a dibujar a escala y los recortará. Estos recortes los colocará sobre el plano de la habitación y, haciendo pruebas, decidirá cuál será la colocación de los muebles.

Copia el plano en tu cuaderno y determina cómo se pueden distribuir los muebles. ¿Podrá montar en su nueva habitación la maqueta completa de su tren eléctrico que mide  $2,5 \times 1,5$  m?

# Proporcionalidad geométrica

El largo de la habitación mide 4,56 m y está representado por 7,6 cm.

Como  $\frac{456}{7,6} = 60$ , la escala del plano es 1 : 60.

El ancho de la habitación medirá:  $4,6 \cdot 60 = 276 \text{ cm} = 2,76 \text{ m}$ .

Las dimensiones de los muebles en el plano son:

Cama:      Largo =  $\frac{200}{60} = 3,33 \text{ cm}$                       Ancho =  $\frac{90}{60} = 1,5 \text{ cm}$

Escritorio: Largo =  $\frac{150}{60} = 2,5 \text{ cm}$                       Ancho =  $\frac{60}{60} = 1 \text{ cm}$

Cajonero: Largo =  $\frac{80}{60} = 1,33 \text{ cm}$                       Ancho =  $\frac{30}{60} = 0,5 \text{ cm}$

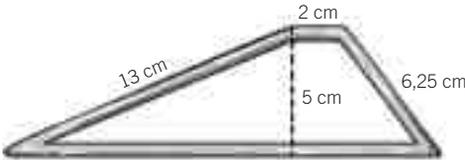
Las dimensiones de la maqueta del tren a escala son:

Largo =  $\frac{250}{60} = 4,17 \text{ cm}$                       Ancho =  $\frac{150}{60} = 2,5 \text{ cm}$

La maqueta no cabe en la habitación, teniendo en cuenta el espacio para poder abrir la puerta.

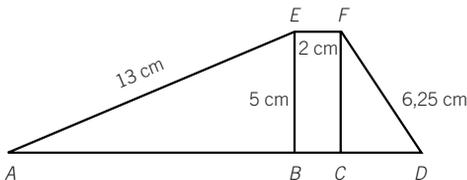
094

Esta es la pieza que se va a fabricar para el enganche de vagones de tren.



Para programar la máquina que la fabricará hay que construir la misma pieza a una escala menor. Colocando esa pieza sobre un escáner, e indicando la escala, la máquina fabricará todas las piezas que se encarguen.

Si disponemos de una varilla de 6,5 cm de largo, y queremos hacer la pieza lo más grande posible, ¿qué escala utilizaremos?



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm}$$

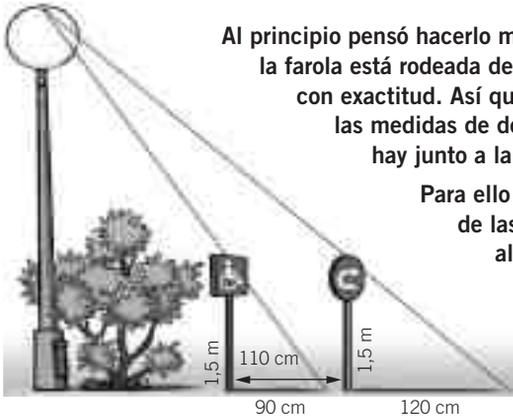
$$\overline{CD} = \sqrt{39,0625 - 25} = 3,75 \text{ cm}$$

La longitud de la pieza es:  $13 + 2 + 6,25 + 3,75 + 2 + 12 = 39 \text{ cm}$ .

Por tanto, la escala será  $1 : 6 \left( \frac{39}{6,5} = 6 \right)$ .

095

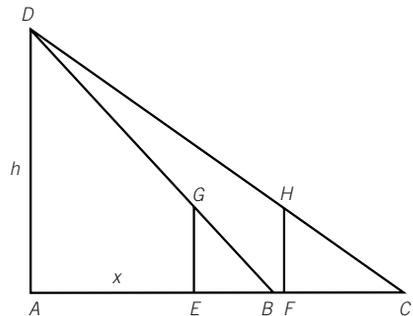
En la esquina de la casa de Ricardo han puesto una farola muy alta. Ricardo cree que la altura de la farola incumple la normativa sobre contaminación lumínica y quiere averiguar cuánto mide exactamente.



Al principio pensó hacerlo midiendo su sombra, pero como la farola está rodeada de plantas no la puede medir con exactitud. Así que ha decidido utilizar las medidas de dos señales de tráfico que hay junto a la farola.

Para ello ha medido las sombras de las dos señales, que están alineadas con la farola, su altura y la separación entre ellas. ¿Cuál es la altura de la farola?

Si llamamos  $h$  a la altura de la farola y  $x$  a la distancia de la farola a la primera señal, tenemos que:



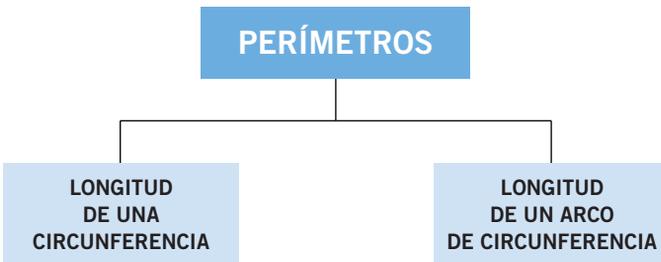
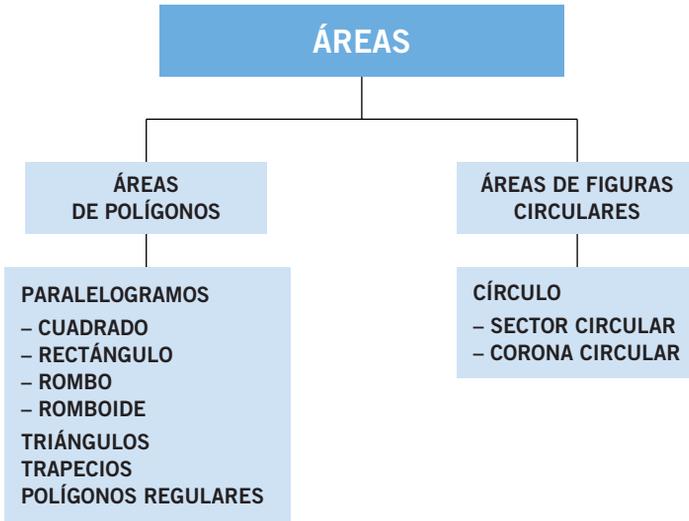
Hay dos pares de triángulos semejantes:  $\widehat{ABD}$  con  $\widehat{EBG}$  y  $\widehat{ACD}$  con  $\widehat{FCH}$ , por lo que obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x + 90}{90} &= \frac{h}{150} \\ \frac{x + 110 + 120}{120} &= \frac{h}{150} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x + 90}{90} = \frac{x + 110 + 120}{120} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \cdot (x + 90) = 3 \cdot (x + 230) \rightarrow x = 330 \text{ cm}$$

$$\frac{x + 90}{90} = \frac{h}{150} \xrightarrow{x = 330} \frac{420}{90} = \frac{h}{150} \rightarrow h = 700 \text{ cm} = 7 \text{ m}$$

La altura de la farola es 7 m.



## El regalo

Mientras se sacudía el polvo que el empinado camino había depositado en sus ropas y sus sandalias, Apolonio de Perga miraba con admiración el templo de Artemisa, una de las Siete Maravillas construidas en el mundo.

Tras el parco aseo, volvió su vista hacia los árboles y bajo una higuera encontró descansando a Eudemo, el amigo con quien había quedado.

–La subida es cansada pero merece la pena, el templo es lo más parecido al Olimpo de los dioses que se puede ver en la Tierra –dijo Apolonio sentándose a su lado.

–No lo discuto, Apolonio –contestó Eudemo–. Sin embargo, deberías hacer ofrendas en honor a Atenea, que es la diosa de la sabiduría, y no a Artemisa, diosa de la caza.

–Cuando visito a un amigo siempre llevo algún regalo, y si voy a la casa de una diosa por qué no he de hacerlo –razonó Apolonio.

Eudemo le preguntó:

–Entonces a mí, ¿qué regalo me has traído?

Apolonio, encogiéndose de hombros, respondió:

–¡No te basta con el abrazo de un amigo! Además, como sé que te gustan, te traigo un acertijo geométrico: ¿Cómo se puede encontrar una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas?

*Si dos circunferencias tangentes se cortan en un punto, ¿en cuántos puntos pueden cortarse dos circunferencias?*

**Las circunferencias se pueden cortar en:**

- **Ningún punto.**
- **Un punto, si son tangentes.**
- **Dos puntos, si son secantes.**



# Figuras planas. Áreas

## EJERCICIOS

**001** Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son:

a) 15 cm y 8 cm

b) 12 cm y 35 cm

a)  $h = 17$  cm

b)  $h = 37$  cm

**002** En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 cm y 12 cm.  
¿Cuánto mide la hipotenusa?

$h = 13$  cm

**003** Calcula la diagonal de un rectángulo de 16 m de longitud y 12 m de ancho.

$$d = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ m}$$

**004** ¿Se cumple el teorema de Pitágoras en un triángulo que no sea rectángulo?

No, solo se cumple en triángulos rectángulos.

**005** Indica si los triángulos con estas medidas son rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

a) 10 cm, 11 cm y 20 cm

b) 4 cm, 5 cm y 6 cm

c) 48 cm, 55 cm y 73 cm

a)  $20^2 > 10^2 + 11^2 \rightarrow$  Obtusángulo

b)  $6^2 < 4^2 + 5^2 \rightarrow$  Acutángulo

c)  $73^2 = 55^2 + 48^2 \rightarrow$  Rectángulo

**006** Sobre un campo rectangular, de 16 m de longitud y 12 m de ancho, se traza una diagonal. Calcula su longitud.

$$d = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ m}$$

**007** Determina el largo de un rectángulo de 3 cm de ancho y 22 cm de diagonal.

$$l = \sqrt{488 - 9} = 21,79 \text{ cm}$$

**008** Halla cuánto mide el lado de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 18 cm, respectivamente.

$$l = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10,82 \text{ cm}$$

**009** Calcula el lado de un cuadrado si su diagonal mide 18 cm.

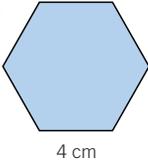
$$18^2 = a^2 + a^2 \rightarrow a = 12,73 \text{ cm}$$

**010** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 7 cm.

$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6,06 \text{ cm}$$

**011** Halla la apotema.

a)



4 cm

b)



12 cm

$$a) a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$$

$$b) a = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10,41 \text{ cm}$$

**012** Determina la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y su base 6 cm.

$$h = \sqrt{8^2 - 3^2} = 7,42 \text{ cm}$$

**013** Halla la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 12 cm.

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 144 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 13,86 \text{ cm}$$

**014** Calcula el lado de un hexágono regular de apotema 10 cm.

$$a^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 11,55 \text{ cm}$$

**015** Halla el área de los siguientes polígonos.

a) Rectángulo de altura 5,4 cm y ancho 9 cm.

b) Cuadrado de lado 6 dm.

c) Rombo con diagonal mayor de 5 dm y diagonal menor de 3 cm.

d) Romboide de base 150 mm y altura 65 mm.

$$a) A = 5,4 \cdot 9 = 48,6 \text{ cm}^2$$

$$b) A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ dm}^2$$

$$c) A = \frac{50 \cdot 3}{2} = 75 \text{ cm}^2$$

$$d) A = 150 \cdot 65 = 9.750 \text{ mm}^2$$

**016** Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal mide 0,06 m.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow l^2 = 18 \text{ cm}^2$$

$$A = l^2 = 18 \text{ cm}^2$$

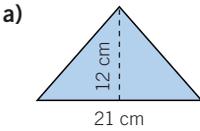
# Figuras planas. Áreas

**017** Determina el área de un rombo cuyo lado mide 9 cm y su diagonal menor 5 cm.

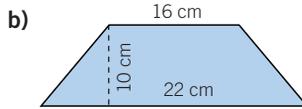
$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{D^2}{4} = 9^2 - 2,5^2 \rightarrow D = 17,29 \text{ cm}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{17,29 \cdot 5}{2} = 43,23 \text{ cm}^2$$

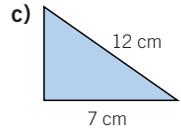
**018** Calcula el área de los polígonos.



$$a) A = \frac{21 \cdot 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$$



$$b) A = \frac{16 + 22}{2} \cdot 10 = 190 \text{ cm}^2$$

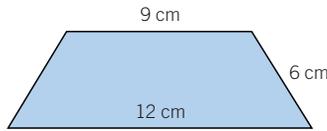


$$c) c = \sqrt{144 - 49} = 9,75 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{7 \cdot 9,75}{2} = 34,11 \text{ cm}^2$$

**019** Determina el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 14 cm y su base 22 cm.

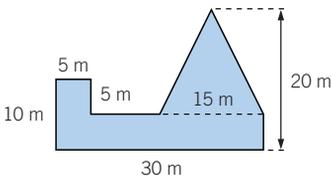
$$h = \sqrt{14^2 - 11^2} = 8,66 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{22 \cdot 8,66}{2} = 95,26 \text{ cm}^2$$

**020** Halla el área de este trapezoido.



$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{12 - 9}{2}\right)^2} = 5,81 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{9 + 12}{2} \cdot 5,81 = 61 \text{ cm}^2$$

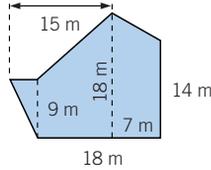
**021** Halla el área de esta figura.



El área es la suma de las áreas de un cuadrado de lado 5 m, un rectángulo de base 30 m y altura 5 m, y un triángulo de base 15 m y altura 15 m.

$$A = 5^2 + 5 \cdot 30 + \frac{15 \cdot 15}{2} = 25 + 150 + 112,5 = 287,5 \text{ m}^2$$

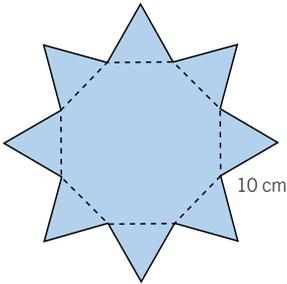
022 Calcula el área de la figura.



El área es la suma de las áreas de un triángulo, de base 4 m y altura 9 m, y dos trapecios, uno de bases 9 m y 18 m y altura 11 m, y el otro de bases 18 m y 14 m y altura 7 m.

$$A = \frac{9 \cdot 4}{2} + \frac{9 + 18}{2} \cdot 11 + \frac{18 + 14}{2} \cdot 7 = 18 + 148,5 + 112 = 278,5 \text{ m}^2$$

023 Esta estrella de 8 puntas ha sido construida añadiendo a un octógono regular, de lado 10 cm, 8 triángulos equiláteros cuyos lados son iguales que los del octógono. Sabiendo que la apotema del octógono es 12,07 cm, halla el área de la estrella.



El área es la suma del área del octógono más el área de los 8 triángulos:

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8,66 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8 \cdot 12,07}{2} + 8 \cdot \frac{8,66 \cdot 10}{2} = 482,8 + 346,4 = 829,2 \text{ cm}^2$$

024 Halla la longitud de una circunferencia con:

a) Radio de 2,3 cm.

b) Diámetro de 16 cm.

$$\text{a) } L = 2\pi \cdot 2,3 = 14,44 \text{ cm}$$

$$\text{b) } L = \pi \cdot 16 = 50,24 \text{ cm}$$

025 La longitud de una circunferencia es 49 cm. Calcula su radio.

$$r = \frac{49}{2\pi} = 7,8 \text{ cm}$$

026 ¿Qué longitud de arco tiene un ángulo de  $50^\circ$  en una circunferencia de 7,8 cm de radio?

$$L = 2\pi \cdot 7,8 = 49 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{360} = \frac{x}{49} \rightarrow x = 6,8 \text{ cm}$$

La longitud del arco es 6,8 cm.

# Figuras planas. Áreas

- 027** En una circunferencia, a un ángulo de  $30^\circ$  le corresponde un arco de 2 cm. Determina el radio y la longitud de la circunferencia.

$$\frac{30}{360} = \frac{2}{L} \rightarrow L = 24 \text{ cm}$$

$$r = \frac{24}{2\pi} = 3,82 \text{ cm}$$

- 028** Determina el área de un círculo de radio 18 cm.

$$A = \pi \cdot 18^2 = 1.017,36 \text{ cm}^2$$

- 029** Halla el área de un círculo de diámetro 25 cm.

$$A = \pi \cdot 12,5^2 = 490,625 \text{ cm}^2$$

- 030** Obtén el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias de radio 100 mm y 7 cm.

$$A = \pi \cdot (10^2 - 7^2) = 160,14 \text{ cm}^2$$

- 031** Se ha dividido una tarta de 14 cm de radio en 4 partes iguales. Calcula el área de cada parte.

$$A = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153,86 \text{ cm}^2$$

- 032** Halla el área de un círculo inscrito en un cuadrado con diagonal de  $\sqrt{50}$  cm.

El diámetro del círculo coincide con el lado del cuadrado, que aplicando el teorema de Pitágoras es:  $l = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \text{ cm}$ .

Por tanto, el área es:  $A = \pi \cdot 2,5^2 = 19,63 \text{ cm}^2$ .

- 033** Calcula la suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono regular.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero es  $180^\circ$ .

La suma de los ángulos interiores de un cuadrado es  $360^\circ$ .

La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es  $540^\circ$ .

- 034** Halla, en un eneágono regular: la suma de sus ángulos interiores, un ángulo interior y la medida del ángulo central.

La suma de los ángulos interiores es  $1.260^\circ$ .

La medida de un ángulo interior es  $140^\circ$ .

La medida del ángulo central es  $40^\circ$ .

**035** Calcula el valor del ángulo central y del ángulo interior de un dodecágono regular.

La medida del ángulo central es  $30^\circ$ .  
 La medida de un ángulo interior es  $150^\circ$ .

**036** ¿Por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para hallar el ángulo central?

En un polígono irregular lo normal es que no tenga un centro.

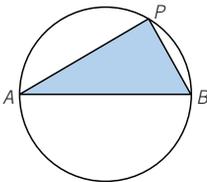
**037** Halla el ángulo inscrito en una circunferencia que abarca un arco de:

- a)  $40^\circ$                       b)  $104^\circ$                       c)  $82^\circ$                       d)  $148^\circ$   
 a)  $20^\circ$                       b)  $54^\circ$                       c)  $41^\circ$                       d)  $148^\circ$

**038** Calcula el ángulo interior de una circunferencia que abarca dos arcos de:

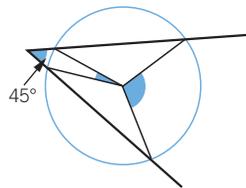
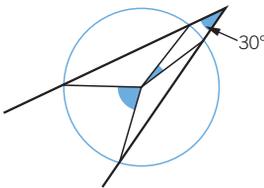
- a)  $90^\circ$  y  $30^\circ$                       b)  $48^\circ$  y  $72^\circ$                       c)  $60^\circ$  y  $120^\circ$                       d)  $110^\circ$  y  $30^\circ$   
 a)  $60^\circ$                       b)  $60^\circ$                       c)  $90^\circ$                       d)  $70^\circ$

**039** Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y marca un diámetro  $AB$ . Señala un punto  $P$  de la circunferencia y calcula  $\widehat{APB}$ .

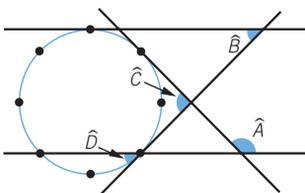


Se forma un ángulo inscrito que abarca un arco de  $180^\circ$ , por lo que el ángulo formado es de  $90^\circ$ .

**040** Traza una circunferencia de radio 3 cm y dibuja dos ángulos exteriores. Determina su medida con la ayuda del transportador.



**041** Calcula los ángulos señalados.



$$\widehat{A} = 180 - \frac{180 - 90}{2} = 135^\circ \quad \widehat{C} = \frac{270 - 90}{2} = 90^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{225 - 135}{2} = 45^\circ \quad \widehat{D} = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

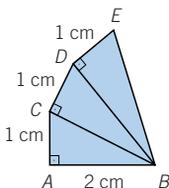
# Figuras planas. Áreas

## ACTIVIDADES

**042** Calcula la hipotenusa de los triángulos rectángulos con estos catetos.

- a) 10 cm y 8 cm
  - b) 7,2 cm y 11,6 cm
  - c) 4 cm y 9 cm
  - d)  $\sqrt{5}$  cm y  $\sqrt{8}$  cm
- a)  $h = 12,81$  cm                      c)  $h = 9,85$  cm  
b)  $h = 13,65$  cm                      d)  $h = \sqrt{13} = 3,61$  cm

**043** Halla la longitud de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{BE}$ .



$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{5} \text{ cm} \\ \overline{BD} &= \sqrt{6} \text{ cm} \\ \overline{BE} &= \sqrt{7} \text{ cm}\end{aligned}$$

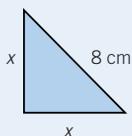
**044** Contesta a estas cuestiones y, en el caso de que sean ciertas, pon un ejemplo.

- a) ¿Puede existir un triángulo rectángulo equilátero?
  - b) ¿Y un triángulo rectángulo isósceles?
- a) No es posible, pues los triángulos equiláteros tienen los ángulos de  $60^\circ$ .
- b) Sí es posible, por ejemplo un triángulo que tenga los catetos de 1 cm y la hipotenusa de  $\sqrt{2}$  cm.

**045** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA MEDIDA DE LOS CATETOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES?

Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 8 cm.



**PRIMERO.** Se aplica el teorema de Pitágoras, considerando que la medida de los catetos es la misma,  $x$ .

$$8^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 8^2 = 2x^2$$

**SEGUNDO.** Se halla el valor de  $x$ .

$$8^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{8^2}{2} = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5,66 \text{ cm}$$

Los catetos miden 5,66 cm.

**046** Halla la medida de los catetos en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 9 cm.

$$81 = c^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{\frac{81}{2}} = 6,36 \text{ cm}$$

047 Los lados del triángulo rectángulo  $\widehat{ABC}$  son  $\overline{AB} = 8$  cm y  $\overline{AC} = 13$  cm. Calcula  $\overline{BC}$  si:

- a) El ángulo recto está en el vértice  $A$ .  
 b) El ángulo recto está en el vértice  $B$ .  
 c) El ángulo recto está en el vértice  $C$ .

- a)  $BC$  es la hipotenusa,  $\overline{BC} = \sqrt{169 + 64} = 15,26$  cm.  
 b)  $BC$  es un cateto,  $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10,25$  cm.  
 c)  $BC$  es un cateto,  $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10,25$  cm.

048 Determina si los triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de su hipotenusa y de sus catetos.

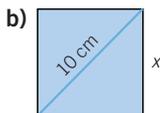
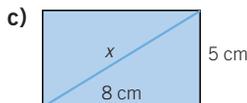
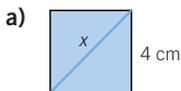
- a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.  
 b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.  
 c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y  $\sqrt{61}$  cm.  
 d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

- a)  $13^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow$  Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 13 cm y los catetos miden 5 cm y 12 cm.  
 b)  $12^2 \neq 8^2 + 6^2 \rightarrow$  No es un triángulo rectángulo.  
 c)  $61 = 5^2 + 6^2 \rightarrow$  Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide  $\sqrt{61}$  cm y los catetos miden 5 cm y 6 cm.  
 d)  $25^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow$  Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 25 cm y los catetos miden 24 cm y 7 cm.

049 Clasifica en acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:

$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 < \overline{CA}^2$	Tipo
4	8	6	$64 > 16 + 36$	Obtusángulo
3	8	7	$64 > 9 + 49$	Obtusángulo
5	10	8	$100 > 25 + 64$	Obtusángulo
5	10	9	$100 < 25 + 81$	Acutángulo

050 Calcula la longitud de  $x$  en estas figuras.

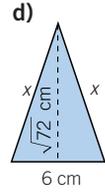
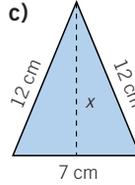
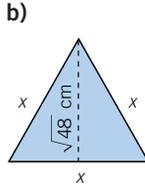
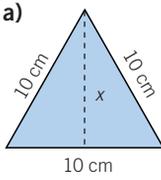


- a)  $x = \sqrt{2 \cdot 16} = 5,66$  cm  
 b)  $x = \sqrt{\frac{100}{2}} = 7,07$  cm  
 c)  $x = \sqrt{25 + 64} = 9,43$  cm  
 d)  $x = \sqrt{117 - 81} = 6$  cm

# Figuras planas. Áreas

051

Determina la longitud de  $x$  en estos triángulos.



a)  $x = \sqrt{100 - 25} = 8,66 \text{ cm}$

c)  $x = \sqrt{144 - 12,25} = 11,48 \text{ cm}$

b)  $x = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 48} = 8 \text{ cm}$

d)  $x = \sqrt{72 + 9} = 9 \text{ cm}$

052

Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 48 cm.

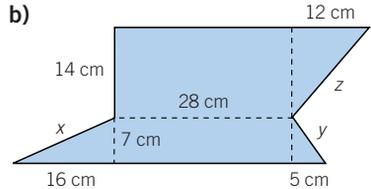
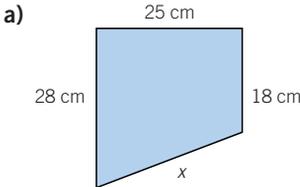


El lado del triángulo es 16 cm.

La altura mide:  $h = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 256} = 13,86 \text{ cm}$ .

053

Calcula el perímetro de las siguientes figuras.



a)  $x = \sqrt{(28 - 18)^2 + 25^2} = \sqrt{725} = 26,93 \text{ cm}$

$P = 25 + 28 + 18 + 26,93 = 97,93 \text{ cm}$

b)  $x = \sqrt{256 + 49} = 17,46 \text{ cm}$

$y = \sqrt{25 + 49} = 8,6 \text{ cm}$

$z = \sqrt{144 + 196} = 18,44 \text{ cm}$

$P = 16 + 28 + 5 + 8,6 + 18,44 + 12 + 28 + 14 + 17,46 = 147,5 \text{ cm}$

054

Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide:



a) 10 cm      b) 16 cm      c) 7 cm

a)  $a = \sqrt{100 - 25} = 8,66 \text{ cm}$

b)  $a = \sqrt{256 - 64} = 13,86 \text{ cm}$

c)  $a = \sqrt{49 - 12,25} = 6,06 \text{ cm}$

## 055 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

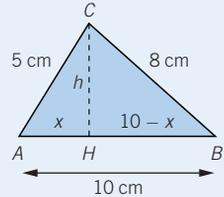
Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.

**PRIMERO.** Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.

La altura divide a la base del triángulo en dos partes:

$AH$ , cuya longitud llamamos  $x$ .

$HB$ , cuya longitud será  $10 - x$ .



**SEGUNDO.** Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

$$\text{En } \widehat{AHC}: \\ 5^2 = x^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 5^2 - x^2$$

$$\text{En } \widehat{HBC}: \\ 8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

**TERCERO.** Se igualan ambas expresiones.

$$\left. \begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \\ 25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x) \\ 25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x \\ 20x = 61 \rightarrow x = 3,05 \text{ cm}$$

**CUARTO.** Se halla el valor de  $h$ .

$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3,05^2} = 3,96 \text{ cm}$$

## 056 Calcula la altura de un triángulo con lados:

- a)  $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$  y  $\overline{CA} = 9 \text{ cm}$   
 b)  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 10 \text{ cm}$  y  $\overline{CA} = 14 \text{ cm}$   
 c)  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 11 \text{ cm}$  y  $\overline{CA} = 15 \text{ cm}$

Consideraremos la base como el lado mayor:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 4^2 - x^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \rightarrow \\ 16 - 49 + 81 = 18x \rightarrow x = 2,67 \\ h^2 = 4^2 - x^2 \xrightarrow{x=2,67} h^2 = 16 - 7,11 \rightarrow h = 2,98 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} h^2 = 6^2 - x^2 \\ h^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 6^2 - x^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \rightarrow \\ 36 - 100 + 196 = 28x \rightarrow x = 4,71 \\ h^2 = 6^2 - x^2 \xrightarrow{x=4,71} h^2 = 36 - 22,18 \rightarrow h = 3,71 \text{ cm}$$

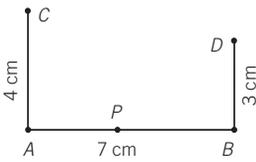
$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \rightarrow \\ 25 - 121 + 225 = 30x \rightarrow x = 4,3 \\ h^2 = 5^2 - x^2 \xrightarrow{x=4,3} h^2 = 25 - 18,49 \rightarrow h = 2,55 \text{ cm}$$

# Figuras planas. Áreas

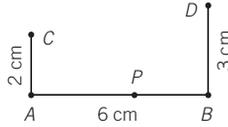
057

Halla la distancia del punto  $P$  al punto  $A$ , para que se verifique que  $\overline{CP} = \overline{DP}$ .

a)



b)



$$\left. \begin{aligned} a) \overline{CP}^2 &= 16 + \overline{AP}^2 \\ \overline{CP}^2 &= 9 + (7 - \overline{AP})^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow 16 + \overline{AP}^2 = 9 + (7 - \overline{AP})^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 14\overline{AP} = 42 \rightarrow \overline{AP} = 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} b) \overline{CP}^2 &= 4 + \overline{AP}^2 \\ \overline{CP}^2 &= 9 + (6 - \overline{AP})^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow 4 + \overline{AP}^2 = 9 + (6 - \overline{AP})^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 12\overline{AP} = 41 \rightarrow \overline{AP} = 3,42 \text{ cm} \end{aligned}$$

058

Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal  $\sqrt{116}$  cm.

La altura del rectángulo es:  $h = \sqrt{116 - 100} = 4$  cm.  
El área es:  $A = 10 \cdot 4 = 40$  cm<sup>2</sup>.

059

Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.

La altura mide:  $h = \frac{24 - 14}{2} = 5$  cm. El área es:  $A = 7 \cdot 5 = 35$  cm<sup>2</sup>.

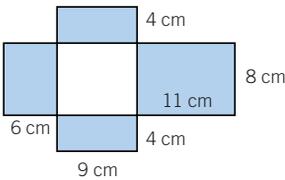
060

Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro mide 22,4 cm.

El lado del cuadrado mide:  $l = \frac{22,4}{4} = 5,6$  cm. El área es 31,36 cm<sup>2</sup>.

061

Calcula el área de la zona coloreada.



$$A = 6 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = 48 + 36 + 88 + 36 = 208 \text{ cm}^2$$

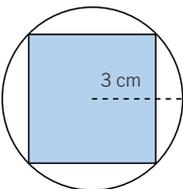
062

Obtén el lado de un cuadrado sabiendo que su área es 84,64 cm<sup>2</sup>.

$$l = \sqrt{84,64} = 9,2 \text{ cm}$$

063

Determina el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.



La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro, por lo que mide 6 cm.

$$\text{El lado es: } l = \sqrt{\frac{36}{2}} = 4,24 \text{ cm.}$$

El área mide 18 cm<sup>2</sup>.

**064** Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo  $a$  el lado de un cuadrado. Razona la respuesta.

- a) La diagonal mide  $\sqrt{2a^2}$ .                      c) El área es  $a^4$ .  
 b) El perímetro es  $4a^2$ .                          d) El cuadrado de su diagonal es  $2a^2$ .  
 a) Falsa, la diagonal es  $d = \sqrt{2a^2}$ .      c) Falsa, el área es  $A = a^2$ .  
 b) Falsa, el perímetro es  $P = 4a$ .        d) Verdadera.

**065** Halla la medida de la diagonal de un cuadrado cuya área es  $12,25 \text{ cm}^2$ .

$$A = 12,25 \text{ cm}^2 \rightarrow a = 3,5 \text{ cm} \rightarrow d = \sqrt{2 \cdot 12,25} = 4,95 \text{ cm}$$

**066** Encuentra un rectángulo que tenga igual área que un cuadrado de lado  $4 \text{ cm}$ . Razona cuántos rectángulos cumplen esa condición.

La condición la cumplen todos los rectángulos en los que el producto de sus lados sea  $16$ , es decir,  $a \cdot b = 16$ , por lo que las soluciones son infinitas, por ejemplo  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ .

**067** Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden:

- a)  $4 \text{ cm}$  y  $12 \text{ cm}$                                       b)  $3 \text{ cm}$  y  $9 \text{ cm}$

$$a) A = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

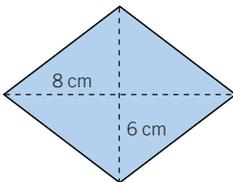
$$b) A = \frac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$$

**068** Calcula la medida de una de las diagonales de un rombo de área  $30,1 \text{ cm}^2$ , sabiendo que la otra diagonal mide  $7 \text{ cm}$ .

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \rightarrow D = \frac{2 \cdot A}{d} \rightarrow D = \frac{60,2}{7} = 8,6 \text{ cm}$$

**069** Halla el perímetro y el área de estos rombos.

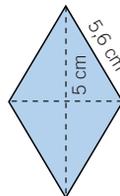
a)



$$a) l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2 \quad P = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$$

b)



$$b) D = 10 \text{ cm}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{5,6^2 - 5^2} = 5,04 \text{ cm}$$

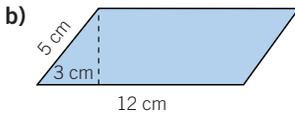
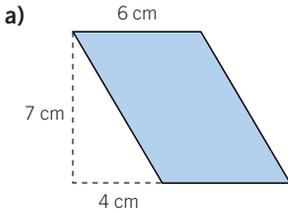
$$A = \frac{10 \cdot 5,04}{2} = 25,2 \text{ cm}^2$$

$$P = 5,6 \cdot 4 = 22,4 \text{ cm}$$

# Figuras planas. Áreas

070

Calcula el área y el perímetro de estas figuras.

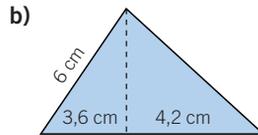
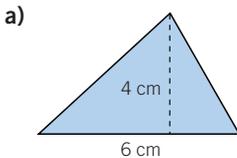


a)  $l = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8,06 \text{ cm}$   
 $A = 7 \cdot 6 = 42 \text{ cm}^2$   
 $P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8,06 = 28,12 \text{ cm}$

b)  $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$   
 $A = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$   
 $P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 34 \text{ cm}$

071

Halla el área de los siguientes triángulos.



a)  $A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$

b)  $h = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = 4,8 \text{ cm}$   
 $A = \frac{4,8 \cdot (3,6 + 4,2)}{2} = 18,72 \text{ cm}^2$

072

Determina el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide:



a) 36 cm

b) 6 dm

c) 0,153 m

a)  $l = 12 \text{ cm}$      $h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = 10,39 \text{ cm}$      $A = \frac{12 \cdot 10,39}{2} = 62,34 \text{ cm}^2$

b)  $l = 2 \text{ dm}$      $h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = 1,73 \text{ dm}$      $A = \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 1,73 \text{ dm}^2$

c)  $l = 51 \text{ cm}$      $h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = 44,17 \text{ cm}$      $A = \frac{51 \cdot 44,17}{2} = 1.126,33 \text{ cm}^2$

- 073** ● Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su lado desigual 9 cm.

$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 5,36 \text{ cm}$$

$$A = \frac{9 \cdot 5,36}{2} = 24,12 \text{ cm}^2$$

- 074** ●● Obtén el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm y su lado desigual mide cuatro unidades más que los lados iguales.

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = 7,14 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14 \cdot 7,14}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

- 075** ●● Calcula la altura y la base de un triángulo rectángulo isósceles, si su área mide:

a) 200 cm<sup>2</sup>

c) 450 dm<sup>2</sup>

b) 120,125 m<sup>2</sup>

d) 317,52 mm<sup>2</sup>

Consideramos un cateto como base y el otro cateto como altura:

a)  $200 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 20 \text{ cm}$

Hipotenusa =  $\sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 28,28 \text{ cm}$

Altura =  $\sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 14,14 \text{ cm}$

b)  $120,125 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 15,5 \text{ m}$

Hipotenusa =  $\sqrt{240,25 + 240,25} = \sqrt{480,5} = 21,92 \text{ m}$

Altura =  $\sqrt{240,25 - 120,125} = \sqrt{120,125} = 10,96 \text{ m}$

c)  $450 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 30 \text{ dm}$

Hipotenusa =  $\sqrt{900 + 900} = \sqrt{1.800} = 42,42 \text{ dm}$

Altura =  $\sqrt{900 - 450} = \sqrt{450} = 21,21 \text{ dm}$

d)  $317,52 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 25,2 \text{ mm}$

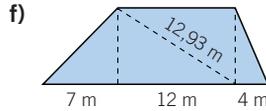
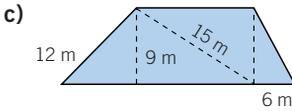
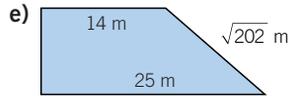
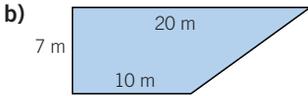
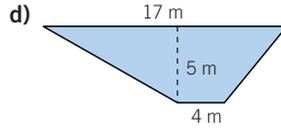
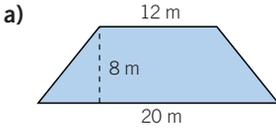
Hipotenusa =  $\sqrt{635,04 + 635,04} = \sqrt{1.270,08} = 35,64 \text{ mm}$

Altura =  $\sqrt{635,04 - 317,52} = \sqrt{317,52} = 17,82 \text{ mm}$

# Figuras planas. Áreas

076

Halla el área de los siguientes trapezios.



$$a) A = \frac{20 + 12}{2} \cdot 8 = 128 \text{ m}^2$$

$$d) A = \frac{17 + 4}{2} \cdot 5 = 52,5 \text{ m}^2$$

$$b) A = \frac{20 + 10}{2} \cdot 7 = 105 \text{ m}^2$$

$$e) h = \sqrt{202 - 121} = 9 \text{ m}$$

$$A = \frac{14 + 25}{2} \cdot 9 = 175,5 \text{ m}^2$$

$$c) b = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ m}$$

$$B = 6 + 12 + \sqrt{12^2 - 9^2} = 25,94 \text{ m}$$

$$f) h = \sqrt{12,93^2 - 12^2} = 4,81 \text{ m}$$

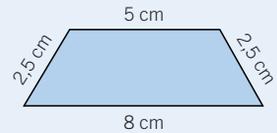
$$A = \frac{12 + 25,94}{2} \cdot 9 = 170,73 \text{ m}^2$$

$$A = \frac{23 + 12}{2} \cdot 4,81 = 84,17 \text{ m}^2$$

## 077 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPEZIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

Calcula el área de este trapezio isósceles.



**PRIMERO.** Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

Por ser el trapezio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases miden la mitad de la diferencia de las bases del trapezio.



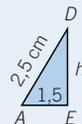
$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8 - 5}{2} = 1,5 \text{ cm}$$

**SEGUNDO.** Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que determina la altura.

$$1,5^2 + h^2 = 2,5^2$$

$$h^2 = 2,5^2 - 1,5^2 = 6,25 - 2,25 = 4$$

$$h = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

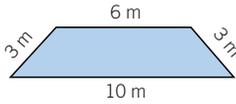


**TERCERO.** Se calcula el área del trapezio.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 5) \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

078 Halla el área de estos trapezios isósceles.

a)



$$a) h = \sqrt{3^2 - 2^2} = 2,24 \text{ m}$$

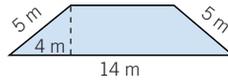
$$A = \frac{10 + 6}{2} \cdot 2,24 = 17,89 \text{ m}^2$$

$$b) d = 14 - 4 - 4 = 6 \text{ m}$$

$$h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ m}$$

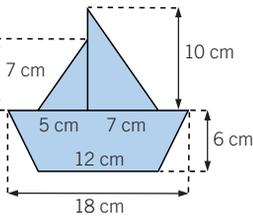
$$A = \frac{14 + 6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ m}^2$$

b)



079 Calcula el área de las siguientes figuras.

a)



$$a) A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{5 \cdot 7}{2} + \frac{7 \cdot 10}{2} + \frac{18 + 12}{2} \cdot 6 = \\ = 17,5 + 35 + 84 = 126,5 \text{ cm}^2$$

$$b) \text{Apotema} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 14^2} = 12,12 \text{ cm}$$

$$A_h = \frac{12,12 \cdot 84}{2} = 509,04 \text{ cm}^2$$

$$A_t = \frac{12,12 \cdot 12}{2} = 84,84 \text{ cm}^2$$

$$A = A_h + 6 \cdot A_t = 509,04 + 509,04 = 1.018,08 \text{ cm}^2$$

$$c) \text{Apotema} = \sqrt{13,61^2 - 8^2} = 11,01 \text{ cm}$$

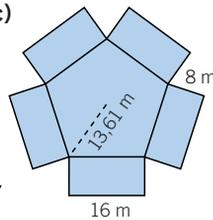
$$A_p = \frac{11,01 \cdot 80}{2} = 440,4 \text{ cm}^2$$

$$A_r = 16 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^2$$

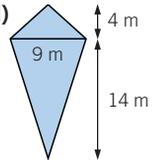
$$A = A_p + 5 \cdot A_r = 440,4 + 640 = 1.080,4 \text{ cm}^2$$

$$d) A = \frac{(14 + 4) \cdot 9}{2} = 81 \text{ cm}^2$$

c)



d)

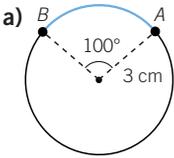


# Figuras planas. Áreas

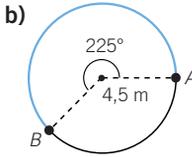
**080** Completa la siguiente tabla con los datos que faltan.

Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
<b>2 cm</b>	4 cm	12,57 cm
3,5 cm	<b>7 cm</b>	21,99 cm
4,7 cm	9,4 cm	<b>29,516 cm</b>
5 cm	<b>10 cm</b>	31,41 cm
<b>6,3 cm</b>	12,6 cm	39,58 cm
7,8 cm	15,6 cm	<b>48,984 cm</b>

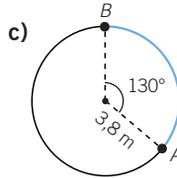
**081** Calcula la longitud del arco marcado en rojo.



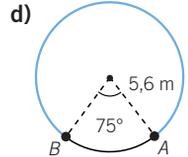
$$a) L = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 100}{360} = 5,23 \text{ cm}$$



$$b) L = \frac{2\pi \cdot 4,5 \cdot 225}{360} = 17,66 \text{ cm}$$



$$c) L = \frac{2\pi \cdot 3,8 \cdot 130}{360} = 8,62 \text{ cm}$$



$$d) L = \frac{2\pi \cdot 5,6 \cdot 75}{360} = 7,33 \text{ cm}$$

**082** ¿Cuál es el diámetro de una circunferencia de longitud 50,24 cm?

$$d = \frac{50,24}{\pi} = 16 \text{ cm}$$

**083** Halla el diámetro de una circunferencia, sabiendo que la longitud de un arco de 50° es 5,23 cm.

$$5,23 = \frac{d \cdot \pi \cdot 50}{360} \rightarrow d = 12 \text{ cm}$$

**084** ¿Cuál es la longitud de una circunferencia cuya longitud de un arco de 110° es 57,57 cm?

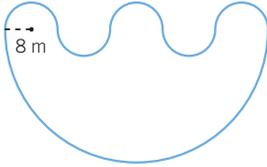
$$L = \frac{57,57 \cdot 360}{110} = 188,41 \text{ cm}$$

**085** Completa la tabla.

Longitud de arco de 60°	Longitud de arco de 85°	Longitud de arco de 190°	Longitud de la circunferencia
<b>9,42 cm</b>	13,34 cm	29,83 cm	56,52 cm
12,13 cm	<b>17,79 cm</b>	38,42 cm	72,8 cm
4,18 cm	5,93 cm	<b>13,26 cm</b>	25,12 cm

**086** Determina el perímetro de estas figuras.

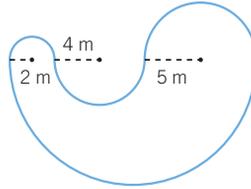
a)



$$a) r = 8 \text{ m} \quad R = 8 \cdot 5 = 40 \text{ m}$$

$$b) R = \frac{4 + 8 + 10}{2} = 11 \text{ m}$$

b)



$$L = 40\pi + 5 \cdot 8\pi = 251,2 \text{ m}$$

$$L = 11\pi + 2\pi + 4\pi + 5\pi = 69,08 \text{ m}$$

**087** Calcula el área de un círculo con:

a) Radio de 6 cm.

b) Diámetro de 6 cm.

c) Radio de 7,2 cm.

$$a) A = 36\pi = 113,04 \text{ cm}^2$$

$$b) A = 9\pi = 28,26 \text{ cm}^2$$

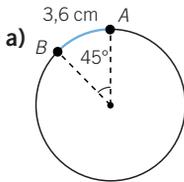
$$c) A = 51,84\pi = 162,78 \text{ cm}^2$$

**088** Halla el área de un círculo delimitado por una circunferencia de 321,4 cm.

$$r = \frac{321,4}{2\pi} = 51,18 \text{ cm}$$

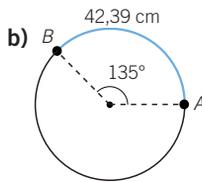
$$A = \pi \cdot 51,18^2 = 8.224,35 \text{ cm}^2$$

**089** Calcula el área de los círculos con estas longitudes de arco.



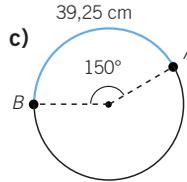
$$a) 3,6 = \frac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 4,58 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot 21 = 65,94 \text{ cm}^2$$



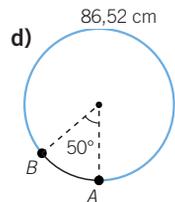
$$b) 42,39 = \frac{2\pi r \cdot 135}{360} \rightarrow r = 18 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot 324 = 1.017,36 \text{ cm}^2$$



$$c) 39,25 = \frac{2\pi r \cdot 150}{360} \rightarrow r = 15 \text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot 225 = 706,5 \text{ cm}^2$$

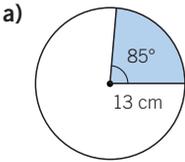


$$d) 86,52 = \frac{2\pi r \cdot 310}{360} \rightarrow r = 16 \text{ cm}$$

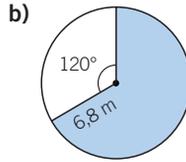
$$A = \pi \cdot 256 = 803,84 \text{ cm}^2$$

# Figuras planas. Áreas

**090** Halla el área de estos sectores circulares.

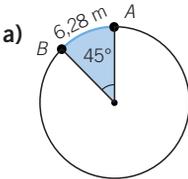


$$a) A = \frac{\pi \cdot 13^2 \cdot 85}{360} = 125,29 \text{ cm}^2$$



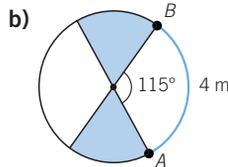
$$b) A = \frac{\pi \cdot 6,8^2 \cdot 240}{360} = 96,8 \text{ m}^2$$

**091** Determina el área de los sectores coloreados.



$$a) 6,28 = \frac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 8 \text{ m}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 45}{360} = 25,12 \text{ m}^2$$



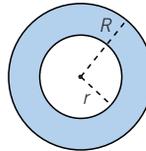
$$b) 4 = \frac{2\pi r \cdot 115}{360} \rightarrow r = 2 \text{ m}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 130}{360} = 4,54 \text{ m}^2$$

**092** Halla el área de la zona sombreada si:



- a)  $R = 10 \text{ m}$  y  $r = 6 \text{ m}$
- b)  $R = 12,6 \text{ cm}$  y  $r = 5 \text{ cm}$
- c)  $R = 3 \text{ m}$  y  $r = 2,4 \text{ cm}$
- d)  $R + r = 31 \text{ m}$  y  $R - r = 5 \text{ m}$



$$a) A = \pi \cdot (100 - 36) = 200,96 \text{ m}^2$$

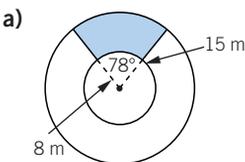
$$b) A = \pi \cdot (158,76 - 25) = 420 \text{ cm}^2$$

$$c) A = \pi \cdot (51,84 - 5,76) = 164,69 \text{ cm}^2$$

$$d) \left. \begin{array}{l} R + r = 31 \text{ m} \\ R - r = 5 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow R = 18 \text{ m} \rightarrow r = 13 \text{ m}$$

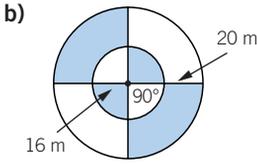
$$A = \pi \cdot (324 - 169) = 486,7 \text{ m}^2$$

**093** Calcula el área coloreada de estas figuras.



$$A_{\text{Corona}} = \pi \cdot (225 - 64) = 504,54 \text{ m}^2$$

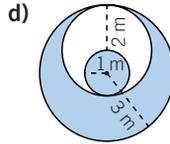
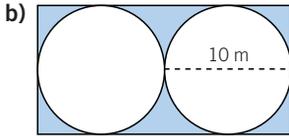
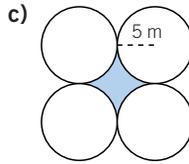
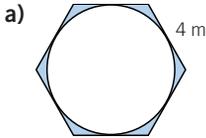
$$A_{\text{Sector}} = \frac{504,54 \cdot 78}{360} = 109,53 \text{ m}^2$$



El área coloreada es la mitad de la corona exterior más la mitad del círculo interior, por lo que es en total la mitad del círculo mayor.

$$A = \frac{\pi \cdot 36^2}{2} = 2.034,72 \text{ m}^2$$

094 Obtén el área de la zona coloreada.



$$a) a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ m}$$

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{24 \cdot 3,46}{2} = 41,52 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot 3,46^2 = 37,59 \text{ m}^2$$

$$A = A_{\text{Hexágono}} - A_{\text{Círculo}} = 41,52 - 37,59 = 3,93 \text{ m}^2$$

$$b) A = A_{\text{Rectángulo}} - 2 \cdot A_{\text{Círculo}} = 20 \cdot 10 - 2\pi \cdot 5^2 = 400 - 157 = 243 \text{ m}^2$$

$$c) A = A_{\text{Cuadrado}} - 4 \cdot \frac{A_{\text{Círculo}}}{4} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 78,5 = 21,5 \text{ m}^2$$

$$d) A = A_3 - A_2 + A_1 = \pi \cdot 9 - \pi \cdot 4 + \pi \cdot 1 = 18,84 \text{ m}^2$$

095 Considerando que los polígonos son regulares, completa la tabla.

N.º de lados	3	4	5	6	7	...
Suma de ángulos	180°	360°	540°	720°	900°	...
Ángulo interior	60°	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$	118°	120°	128,6°	...

a) ¿Cuál es el polígono con menor ángulo?

b) ¿Y el que tiene el mayor ángulo?

a) El polígono con menor ángulo es el triángulo.

b) El polígono con mayor ángulo es el que tiene mayor número de lados, y cuando estos son infinitos, es la circunferencia.

# Figuras planas. Áreas

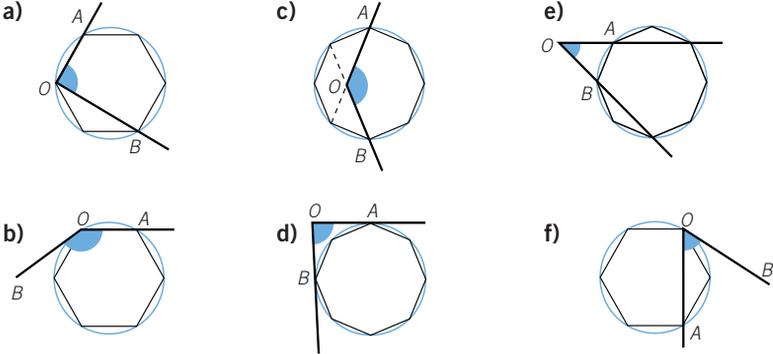
096

Calcula la suma de los ángulos de un polígono de 3, 4, 5 y 6 lados.

- a) ¿Qué diferencia hay entre la suma de cada polígono y la del polígono con un lado menos?
- b) Si la suma de los ángulos de un polígono de 15 lados es  $2.340^\circ$ , ¿cuál será la suma de uno de 16 lados?
- a) La diferencia es siempre  $180^\circ$ .
- b) La suma es:  $2.340^\circ + 180^\circ = 2.520^\circ$ .

097

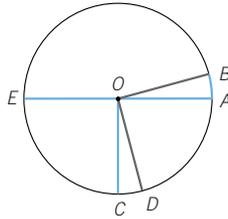
Calcula el valor de los ángulos marcados.



- a) Inscrito:  $180^\circ : 2 = 90^\circ$ .
- b) Semiinscrito:  $300^\circ : 2 = 150^\circ$ .
- c) Interior:  $(180^\circ + 90^\circ) : 2 = 135^\circ$ .
- d) Circunscrito:  $(270^\circ - 90^\circ) : 2 = 90^\circ$ .
- e) Exterior:  $(135^\circ - 45^\circ) : 2 = 45^\circ$ .
- f) Semiinscrito:  $120^\circ : 2 = 60^\circ$ .

098

Si el arco  $\widehat{AB} = 15^\circ 20'$ , calcula el valor de los arcos  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{AD}$  y  $\widehat{BE}$ .



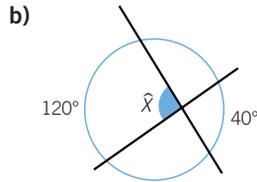
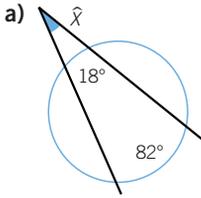
$$\widehat{BC} = 90^\circ - 15^\circ 20' = 74^\circ 40'$$

$$\widehat{CD} = \widehat{AB} = 15^\circ 20'$$

$$\widehat{AD} = 90^\circ + 15^\circ 20' = 105^\circ 20'$$

$$\widehat{BE} = 180^\circ + 15^\circ 20' = 195^\circ 20'$$

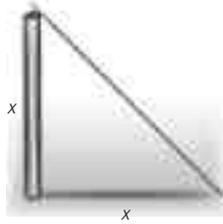
099 ●● Calcula el valor del ángulo  $\hat{X}$ .



a) Exterior:  $(82^\circ - 18^\circ) : 2 = 32^\circ$ .

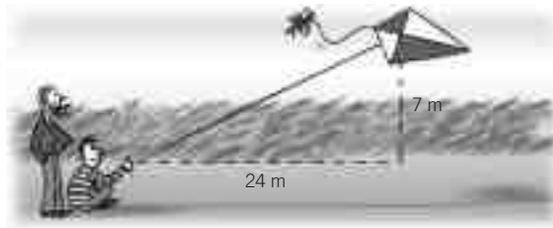
b) Interior:  $(120^\circ + 40^\circ) : 2 = 80^\circ$ .

100 ●● La sombra que produce una varilla vertical en un instante es igual a su longitud. ¿Qué triángulo determinan la varilla y su sombra? ¿Cuál es la inclinación de los rayos solares?



La varilla y su sombra determinan un triángulo rectángulo e isósceles. Los rayos del sol tienen una inclinación de  $45^\circ$ .

101 ●● Calcula la longitud del cable de la cometa.



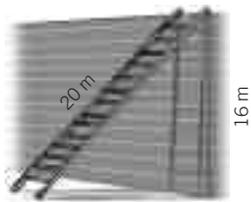
$$l = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \text{ m}$$

102 ●● ¿Cuál es la longitud máxima que Juan puede nadar en una piscina que mide 17 m de largo y 10 m de ancho, si solo puede hacerlo en línea recta?

La longitud máxima es la diagonal:  $d = \sqrt{17^2 + 10^2} = 19,72 \text{ m}$ .

# Figuras planas. Áreas

- 103** ●● Sobre una pared vertical de 16 m de altura se coloca inclinada una escalera de 20 m de longitud. ¿A qué distancia de la pared se encuentra la base de la escalera?

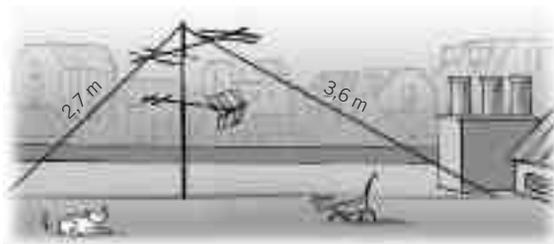


$$d = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ m}$$

- 104** ●● Una escalera mide 2,5 m de longitud, y, al apoyarse en la pared, su base dista de ella 0,7 m. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

$$h = \sqrt{2,5^2 - 0,7^2} = 2,4 \text{ m}$$

- 105** ●● Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 2,7 m y 3,6 m. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de unión de los cables con el suelo?



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman los cables:

$$d = \sqrt{2,7^2 + 3,6^2} = 4,5 \text{ m}$$

- 106** ●● Ana tiene un jardín rectangular, de 500 m de largo y 300 m de ancho, y quiere hacer una piscina de forma circular de 100 m de radio. ¿Cuánto terreno le queda para plantar césped?

El terreno para plantar césped es el área de la parcela menos el área de la piscina:

$$A = 500 \cdot 300 - \pi \cdot 100^2 = 150.000 - 31.400 = 118.600 \text{ m}^2$$

- 107** ●● La rueda de un camión mide 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 1.000 vueltas? ¿Y cuántas vueltas dará para recorrer 2 km?

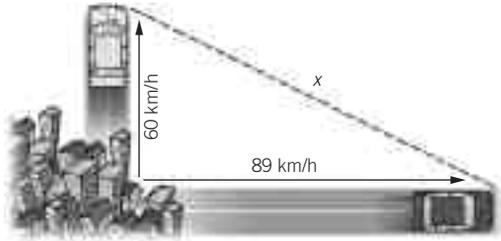
La longitud de la rueda es:  $L = 2\pi \cdot 90 = 565,2 \text{ cm}$ .

En 1.000 vueltas, el camión avanzará:  $1.000 \cdot 565,2 = 565.200 \text{ m}$ .

Para recorrer 2.000 m, la rueda dará:  $\frac{2.000}{565,2} = 5,53 \text{ vueltas}$ .

108

Dos coches parten de una ciudad a la vez y en direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 60 km/h y el segundo de 89 km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 1 hora y cuarto?



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman las carreteras.

Así, la distancia recorrida por el primer coche es 75 km y la del segundo es 111,25 km.

La distancia que los separa es:  $x = \sqrt{75^2 + 111,25^2} = 134,17$  km.

109

Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 600 km/h y el segundo de 800 km/h.

a) ¿Qué distancia les separa al cabo de 2 horas?

b) Si el alcance de su radio es de 500 km, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de media hora?

a) Al cabo de 2 horas, el primer avión ha recorrido 1.200 km, y el segundo, 1.600 km, por lo que la distancia que los separa es:

$$d = \sqrt{1.200^2 + 1.600^2} = 2.000 \text{ km}$$

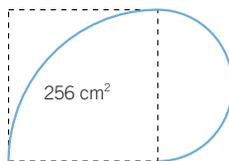
b) Al cabo de media hora, el primer avión ha recorrido 300 km, y el segundo, 400 km, por lo que la distancia que los separa es:

$$d = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ km y están en el límite del alcance de la radio.}$$

110

Uno de los adornos de metal de una reja tiene esta forma.

Calcula la longitud del adorno sabiendo que el área del cuadrado es  $256 \text{ cm}^2$ .



El lado del cuadrado es:  $l = \sqrt{256} = 16$  cm.

La longitud de la primera porción de reja es:  $L_1 = \frac{2\pi \cdot 16}{4} = 25,12$  cm.

La longitud de la segunda porción es:  $L_2 = \frac{2\pi \cdot 8}{2} = 25,12$  cm.

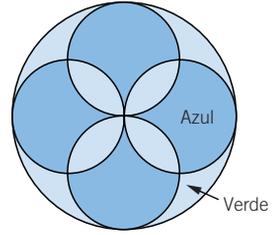
La longitud de la reja es:  $2 \cdot 25,12 = 50,24$  cm.

# Figuras planas. Áreas

111



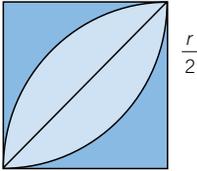
Sabiendo que se han empleado 400 cm<sup>2</sup> de cristal verde, ¿cuántos cm<sup>2</sup> de cristal azul son necesarios para realizar esta vidriera?



Área del círculo mayor:  $\pi \cdot r^2$

Área de los círculos menores:  $\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

Área de los pétalos:



$$A_{\text{Pétalo}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8}$$

$$A_{\text{Verde}} = A_{\text{Círculo}} - 4 \cdot A_{\text{Menores}} + 4 \cdot A_{\text{Pétalo}}$$

$$400 = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} + 4 \cdot \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{800}{\pi - 1}} = 19,33 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Azul}} = \pi \cdot r^2 - 400 = 773,83 \text{ cm}^2$$

112



Si dos polígonos tienen igual área, ¿pueden tener perímetros diferentes?

Sí pueden tener perímetros diferentes, ya que no existe una correspondencia entre perímetro y área, salvo si son polígonos semejantes.

113

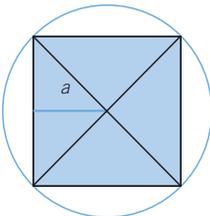


La fórmula para hallar el área de un polígono regular es:  $A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2}$ .

Comprueba que, aplicando esta fórmula al triángulo equilátero y al cuadrado,

obtenemos las fórmulas del área de un triángulo:  $A = \frac{b \cdot h}{2}$   
y de un cuadrado:  $A = l^2$ .

Cuadrado:

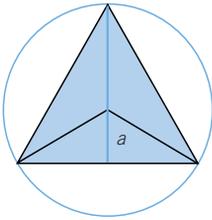


$$a = \frac{l}{2}$$

$$\text{Perímetro} = 4l$$

$$A = \frac{4l \cdot \frac{l}{2}}{2} = l^2$$

Triángulo equilátero:



Por ser un triángulo equilátero, la apotema es la mitad del radio:

$$a = \frac{r}{2}$$

$$\text{Altura} = r + a = \frac{3r}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot b \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{l \cdot \frac{3r}{2}}{2} = \frac{b \cdot \text{altura}}{2}$$

**114** Sabiendo que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los lados de un triángulo rectángulo, comprueba si son rectángulos los triángulos de lados:

a)  $2a$ ,  $2b$  y  $2c$

b)  $a + 5$ ,  $b + 5$  y  $c + 5$

c)  $\frac{a}{3}$ ,  $\frac{b}{3}$  y  $\frac{c}{3}$

d)  $2a$ ,  $3b$  y  $4c$

¿Puedes extraer una regla general?

Dado un triángulo rectángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , ¿cómo podrías obtener otros triángulos rectángulos?

Consideramos que  $a^2 = b^2 + c^2$ :

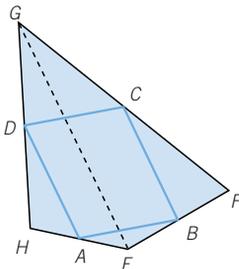
a)  $(2b)^2 + (2c)^2 = 4 \cdot (b^2 + c^2) = 4 \cdot a^2 = (2a)^2 \rightarrow$  Es rectángulo.

b)  $(b + 5)^2 + (c + 5)^2 = b^2 + 10b + 25 + c^2 + 10c + 25 = b^2 + c^2 + 10b + 10c + 50 = a^2 + 10a + 50 \neq (a + 5)^2 \rightarrow$  No es equilátero.

c)  $\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot (b^2 + c^2) = \frac{1}{9} \cdot a^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2 \rightarrow$  Es rectángulo.

d)  $(3b)^2 + (4c)^2 = 9 \cdot (b^2 + c^2) + 7c^2 = 9 \cdot a^2 + 7c^2 = (3a)^2 + 7c^2 \neq (2a)^2 \rightarrow$   
 $\rightarrow$  No es equilátero.

**115** En un cuadrilátero cualquiera, señala los puntos medios de sus lados y únelos de dos en dos. ¿Qué figura se forma? Investiga si se cumple siempre.



Consideramos el cuadrilátero y sus diagonales:

El triángulo  $\widehat{EFG}$  está en posición de Tales con  $\widehat{BFC}$ , por lo que  $CB$  es paralelo a  $EG$ .

El triángulo  $\widehat{HEG}$  está en posición de Tales con  $\widehat{HAD}$ , por lo que  $AD$  es paralelo a  $EG$ .

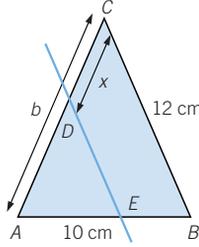
Tenemos que  $AD$  es paralelo a  $CB$  y  $AB$  es paralelo a  $CD$ .

Por tanto, siempre se forma un paralelogramo.

# Figuras planas. Áreas

116

La recta  $DE$  es paralela al lado  $BC$ .



a) Halla lo que miden los segmentos  $BE$  y  $DE$  en función de  $b$  y  $x$ .

b) Determina  $b$  y  $x$  para que  $\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD}$  y  $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{5}{11}$ .

a) Los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{AED}$  son semejantes.

$$\frac{\overline{BE}}{x} = \frac{10}{b} \rightarrow \overline{BE} = \frac{10x}{b}$$

$$\frac{12}{\overline{DE}} = \frac{b}{b-x} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot (b-x)}{b}$$

b) La primera igualdad significa que:

$$\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD} \rightarrow \frac{12 \cdot (b-x)}{b} = \frac{10x}{b} + x$$

y la segunda:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{x}{b} = \frac{5}{11}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que resulta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{12 \cdot (b-x)}{b} &= \frac{10x}{b} + x \\ \frac{x}{b} &= \frac{5}{11} \end{aligned} \right\} \rightarrow x = \frac{5b}{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{12 \cdot (b-x)}{b} &= \frac{10x}{b} + x \xrightarrow{x = \frac{5b}{11}} \frac{12 \cdot \left(\frac{6b}{11}\right)}{b} = \frac{50b}{11} + \frac{5b}{11} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{72}{11} = \frac{50}{11} + \frac{5b}{11} \rightarrow 22 = 5b \rightarrow b = \frac{22}{5} = 4,4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$x = \frac{5b}{11} \xrightarrow{b = \frac{22}{5}} x = 2$$

Es decir,  $b = 4,4$  cm y  $x = 2$  cm.

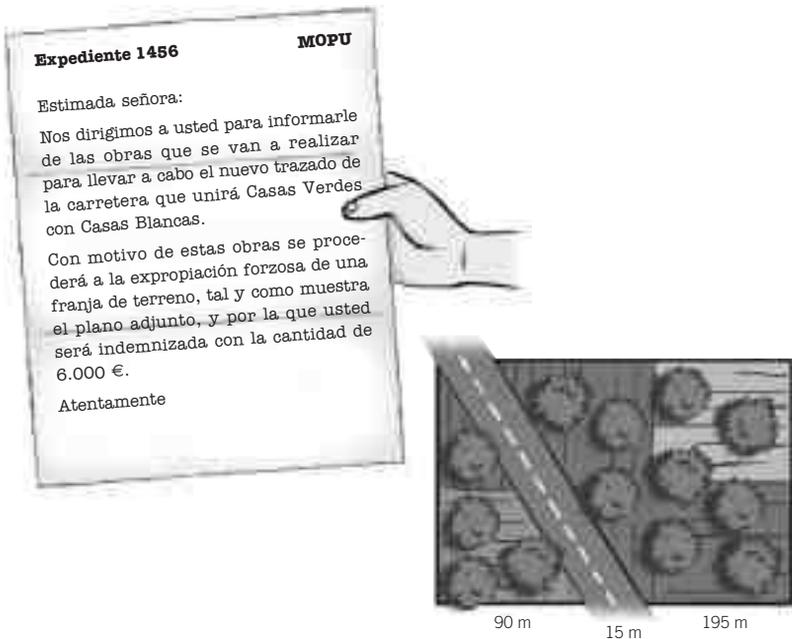
## EN LA VIDA COTIDIANA

117

Se está diseñando un nuevo trazado para la carretera que une Casas Verdes con Casas Blancas, pero este trazado pasará por los olivares, con lo que muchas familias se verán afectadas.



La familia de Lidia, al igual que otras familias del pueblo, ya ha recibido la notificación.



Según las escrituras, el terreno tiene una superficie de 6 hectáreas y el abogado al que han consultado les ha dicho que mediante una reclamación pueden recibir hasta 20 € por cada metro cuadrado expropiado.

**¿Cuánto les pagan por cada metro cuadrado expropiado? ¿Cuánto podrían obtener si reclamaran judicialmente?**

El área del terreno es:  $6 \text{ ha} = 60.000 \text{ m}^2 = (90 + 15 + 195) \cdot \text{ancho}$ .

$$60.000 = 300 \cdot \text{ancho} \rightarrow \text{Ancho} = 200 \text{ m}$$

El área de la carretera mide:  $15 \cdot 200 = 3.000 \text{ m}^2$ .

Por cada metro cuadrado expropiado les pagan:  $\frac{6.000}{3.000} = 2 \text{ €}$ .

Si reclaman judicialmente podrían pagarles:  $20 \cdot 3.000 = 60.000 \text{ €}$ .

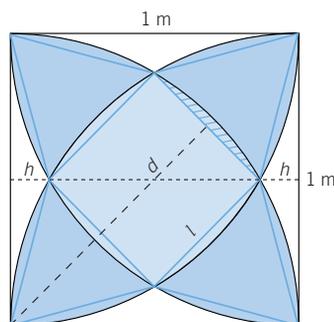
# Figuras planas. Áreas

118



Arturo es un artesano especializado en fabricar vidrieras. Su trabajo es complicado porque las vidrieras suelen tener formas geométricas, y es necesario medir con precisión para no equivocarse al unir las piezas.

En el último encargo que ha recibido, le han pedido un presupuesto para 25 vidrieras de esta forma.



Si el cristal de colores cuesta  $5,25 \text{ €/m}^2$  y el blanco  $3,20 \text{ €/m}^2$ , ¿cuál será el presupuesto para fabricar las 25 vidrieras?

En primer lugar, vamos a calcular el área de las figuras sombreadas. A continuación, hallamos el área de los segmentos circulares semejantes al que aparece rayado en el dibujo.

Área del cuadrado:

$$\left. \begin{aligned} 2h + d &= 1 \\ d + h &= \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 2h + d &= 1 \\ d + h &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 0,14 \text{ m} \\ d &= 1 - 2h = 1 - 2 \cdot 0,14 = 0,72 \text{ m} \end{aligned}$$

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow 2l^2 = 0,72^2 \rightarrow 2l^2 = 0,52 \rightarrow l^2 = 0,26 \rightarrow l = 0,51 \text{ m}$$

$$\text{Área del cuadrado} = 0,51 \cdot 0,51 = 0,26 \text{ m}^2$$

Área de los triángulos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_t^2 \rightarrow 0,51^2 = 0,26^2 + h_t^2 \rightarrow h_t = \sqrt{0,51^2 - 0,26^2} = 0,44 \text{ m}$$

$$A_t = \frac{0,51 \cdot 0,44}{2} = 0,11 \text{ m}^2$$

Área de los triángulos =  $4 \cdot 0,11 = 0,44 \text{ m}^2$

Área del segmento circular:

$$h_{\text{Sector}}^2 = 1^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h_{\text{Sector}} = \sqrt{1 - 0,17} = 0,91 \text{ m}$$

$$\text{Área del triángulo sector} = \frac{0,51 \cdot 0,91}{2} = 0,23 \text{ m}^2$$

$$\text{Área del segmento} = A_{\text{Sector}} - A_{\text{T Sector}} = \frac{30}{360} \pi - 0,23 = 0,26 - 0,23 = 0,03 \text{ m}^2$$

Conclusión:

$$\begin{aligned} \text{Área sombreada} &= \text{Área cuadrado} + \text{Área 4 triángulos} + \text{Área 4 segmentos} = \\ &= 0,26 + 0,44 + 0,12 = 0,82 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Área blanco} = 1 - 0,82 = 0,18 \text{ m}^2$$

Presupuesto:

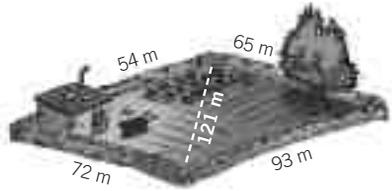
$$\text{Precio de 1 vidriera} = 0,82 \cdot 5,25 + 0,18 \cdot 3,20 = 4,3 + 0,58 = 4,88 \text{ €}$$

$$\text{Precio de 25 vidrieras} = 25 \cdot 4,88 = 122 \text{ €}$$

119

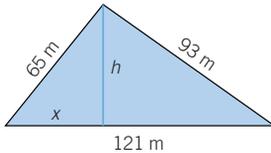
El ayuntamiento ha declarado urbanizable uno de los terrenos en los que Goro ha sembrado cereales. Antes de enterarse de la noticia ya había recibido una oferta de una empresa constructora.

Nos interesa la tierra que tienes junto a la carretera... Estamos dispuestos a darte 325.000 €... Es decir, te pagaríamos casi 100 €/m<sup>2</sup>.



Goro ha buscado los planos de la tierra para comprobar si es verdad lo que le dicen. ¿Es cierto lo que afirma el constructor? ¿Le pagarían a 100 €/m<sup>2</sup>?

Consideramos los dos triángulos que se forman con la diagonal:

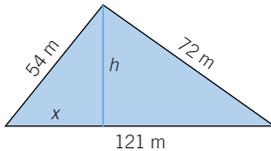


$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 65^2 - x^2 \\ h^2 &= 93^2 - (121 - x)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$65^2 - x^2 = 93^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 4.225 - x^2 = 8.649 - 14.641 + 242x - x^2 \rightarrow 242x = 4.225 - 8.649 + 14.641 = 10.217 \rightarrow x = 42,22 \text{ m}$$

$$h^2 = 65^2 - x^2 \xrightarrow{x=42,22} h^2 = 4.225 - 1.782,53 \rightarrow h = 49,42 \text{ m}$$

$$A_1 = \frac{121 \cdot 49,42}{2} = 2.989,91 \text{ m}^2$$



$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 54^2 - x^2 \\ h^2 &= 72^2 - (121 - x)^2 \end{aligned} \right\}$$

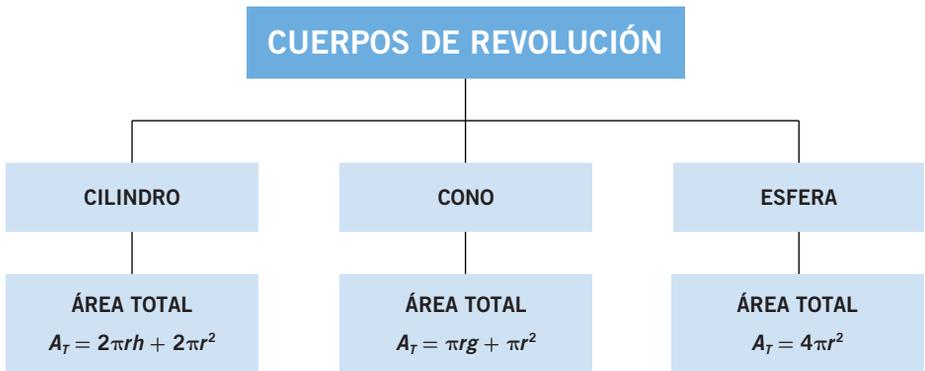
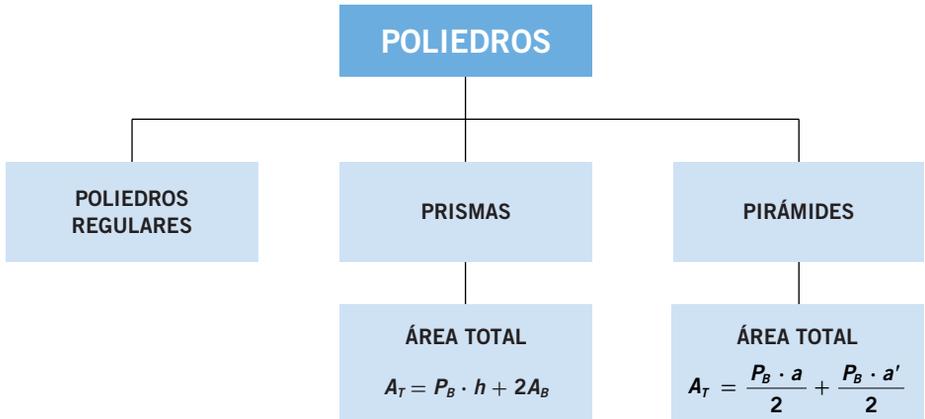
$$54^2 - x^2 = 72^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 2.916 - x^2 = 5.184 - 14.641 + 242x - x^2 \rightarrow 242x = 2.916 - 5.184 + 14.641 = 12.373 \rightarrow x = 51,13 \text{ m}$$

$$h^2 = 54^2 - x^2 \xrightarrow{x=51,13} h^2 = 2.916 - 2.614,28 \rightarrow h = 17,37 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{121 \cdot 17,37}{2} = 1.050,88 \text{ m}^2$$

El área total es:  $2.989,91 + 1.050,88 = 4.040,79 \text{ m}^2$ .

Por tanto, le pagan  $\frac{325.000}{4.040,79} = 80,43 \text{ €/m}^2$ .



## El centro del universo

Como a otros les ocurrió antes y a otros muchos después, Aristarco de Samos se vio irremediabilmente atraído por Alejandría: una ciudad tranquila, patria adoptiva de sabios y protectora del conocimiento.

La magnífica biblioteca de la ciudad le abrió sus puertas y Aristarco se empapó de los conocimientos de los sabios de otros tiempos. Después, tras años de silencioso estudio se decidió por fin a hacer públicas sus teorías y, ante un concurrido auditorio de sabios, comenzó:

—Amigos, tras exhaustivos estudios puedo afirmar que la Tierra no está inmóvil: se mueve en círculo alrededor del Sol, completando un círculo cada año y, además, gira sobre sí misma, una vuelta cada día.

Un murmullo de protestas se alzó en la sala, entre insultos y burlas que le decían:

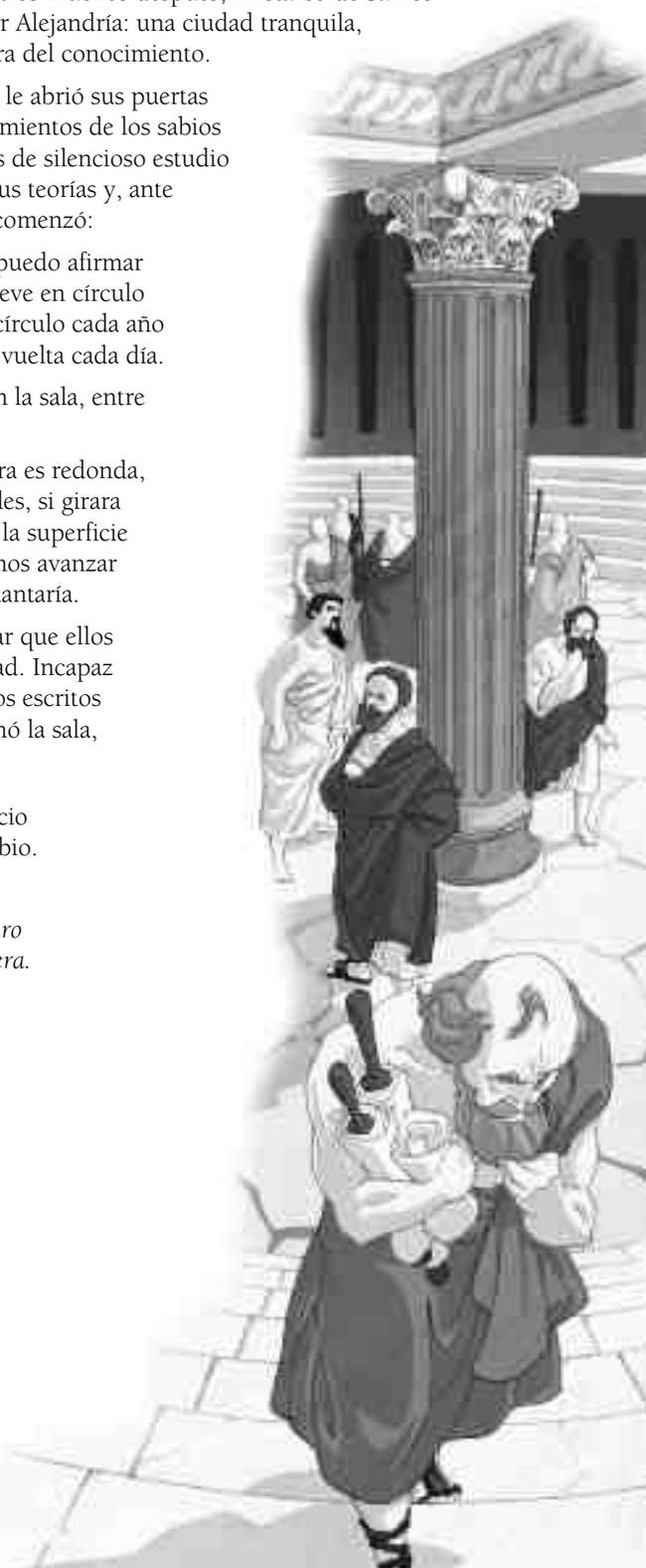
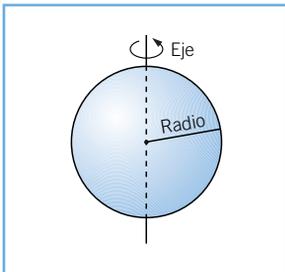
—Partiendo del hecho de que la Tierra es redonda, lo que ha sido probado por Aristóteles, si girara una vuelta cada día, la velocidad en la superficie sería tan elevada que nunca podríamos avanzar hacia el Este, pues la Tierra nos adelantaría.

Aristarco, en vano, intentaba explicar que ellos también giraban a la misma velocidad. Incapaz de convencer al auditorio, recogió los escritos donde explicaba su teoría y abandonó la sala, diciendo:



—A veces lo más necio es un hombre sabio.

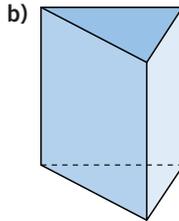
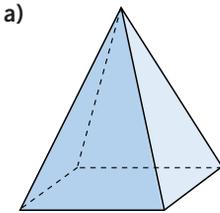
*Señala el eje de giro y el radio de la esfera.*



# Cuerpos geométricos

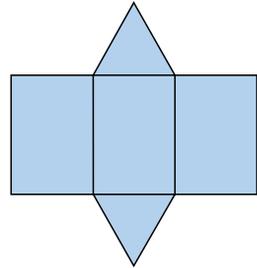
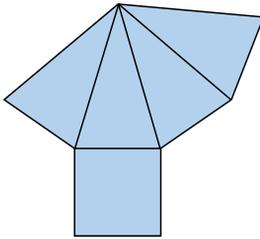
## EJERCICIOS

**001** Determina el nombre de los siguientes poliedros. ¿Cuántas caras tienen? ¿Y cuántas aristas?



- a) Pirámide cuadrangular: 5 caras y 8 aristas.  
b) Prisma triangular: 5 caras y 9 aristas.

**002** Realiza el desarrollo plano de los poliedros del ejercicio anterior, indicando los pasos que sigues al hacerlo.



**003** Justifica si es verdadero o falso.

- a) En un poliedro, todas sus caras son iguales.  
b) El menor número de caras de un poliedro es 4.  
c) En cada vértice de un poliedro concurre siempre el mismo número de aristas.
- a) Falso, pues las caras pueden ser diferentes, y solo son iguales en los poliedros regulares.  
b) Verdadero, ya que el polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, son 4 caras.  
c) Falso, por ejemplo en los vértices de la base de las pirámides concurren 3 aristas, y en el vértice superior concurren tantas aristas como lados tiene la base.

**004** Prueba que todos los poliedros regulares cumplen la fórmula de Euler.

- Tetraedro  $\longrightarrow$  Caras: 4, vértices: 4, aristas: 6  $\longrightarrow 4 + 4 = 6 + 2$   
Cubo  $\longrightarrow$  Caras: 6, vértices: 8, aristas: 12  $\longrightarrow 6 + 8 = 12 + 2$   
Octaedro  $\longrightarrow$  Caras: 8, vértices: 6, aristas: 12  $\longrightarrow 8 + 6 = 12 + 2$   
Dodecaedro  $\rightarrow$  Caras: 12, vértices: 20, aristas: 30  $\rightarrow 12 + 20 = 30 + 2$   
Icosaedro  $\longrightarrow$  Caras: 20, vértices: 12, aristas: 30  $\rightarrow 20 + 12 = 30 + 2$

**005** Determina el número de caras que concurre en los vértices de cada uno de los poliedros regulares.

Tetraedro: 3 caras.

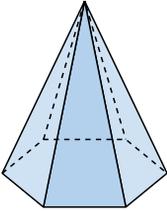
Dodecaedro: 3 caras.

Cubo: 3 caras.

Icosaedro: 5 caras.

Octaedro: 4 caras.

**006** Dibuja un poliedro que tenga 7 vértices. ¿Cumple la fórmula de Euler?



Caras: 7.

Aristas: 12.

Vértices: 7.

$$C + V = A + 2$$

$$7 + 7 = 12 + 2$$

**007** ¿Puede existir un poliedro regular de 3 caras?

No es posible, ya que el polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, al menos tendrá 4 caras.

**008** Dibuja un prisma recto de base triangular y otro de base pentagonal.

a) Calcula su número de caras, aristas y vértices.

b) ¿Cumplen la fórmula de Euler?

c) Dibuja sus desarrollos planos.

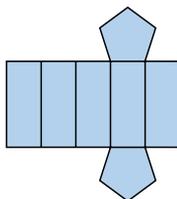
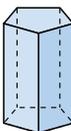
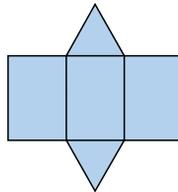
a) Prisma triangular  $\rightarrow$  Caras: 5, aristas: 9, vértices: 6

Prisma pentagonal  $\rightarrow$  Caras: 7, aristas: 15, vértices: 10

b) Prisma triangular  $\rightarrow 5 + 6 = 9 + 2$

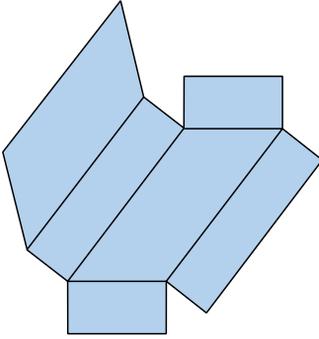
Prisma pentagonal  $\rightarrow 7 + 10 = 15 + 2$

c)



# Cuerpos geométricos

**009** Dibuja el desarrollo plano de un prisma oblicuo de base cuadrangular.



**010** ¿Qué polígono forma la base de un prisma que tiene 18 aristas?

La base del prisma es un hexágono.

**011** Calcula el área de un cubo cuya arista mide 2 cm.

$$A = 6 \cdot A_B = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ cm}^2$$

**012** Determina el área de un prisma:

- Pentagonal regular de altura 10 cm, lado de la base 4 cm y apotema 2,75 cm.
- Triangular regular de altura 8 cm, lado de la base 4 cm y altura de la base 3,46 cm.

$$\text{a) } A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 2,75 = 455 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 12 \cdot 8 + 12 \cdot 3,46 = 140,98 \text{ cm}^2$$

**013** Un prisma cuadrangular recto, con arista de la base de 3 cm, tiene un área total de 78 cm<sup>2</sup>. Calcula su altura.

$$A = 2 \cdot A_B + P \cdot h \rightarrow 78 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot h \rightarrow h = \frac{60}{12} = 5 \text{ cm}$$

**014** Halla la longitud de la arista de un cubo para que su área sea igual que la de un ortoedro de 6 cm de ancho, 3 cm de alto y 2 cm de profundidad.

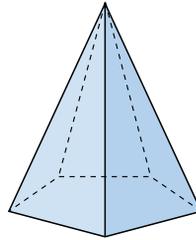
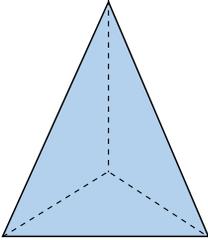
$$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cubo}} = 6l^2 \rightarrow 6l^2 = 72 \rightarrow l = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

La arista mide 3,46 cm.

**015** Dibuja una pirámide recta de base triangular y otra de base pentagonal.

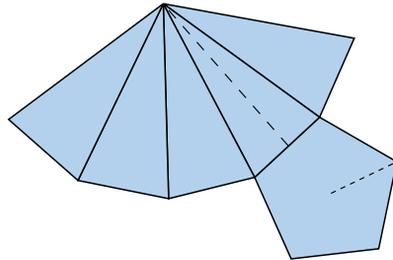
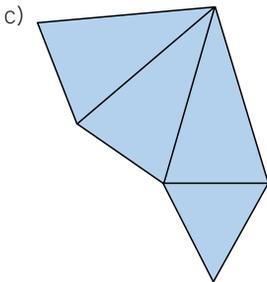
- Calcula su número de caras, aristas y vértices.
- Comprueba que ambos poliedros cumplen la fórmula de Euler.
- Dibuja sus desarrollos planos.



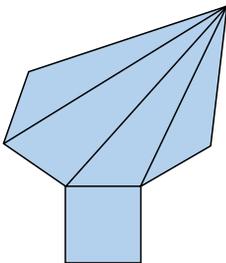
- Pirámide triangular  $\rightarrow$  Caras: 4, aristas: 6, vértices: 4

Pirámide pentagonal  $\rightarrow$  Caras: 6, aristas: 10, vértices: 6
- Pirámide triangular  $\rightarrow 4 + 4 = 6 + 2$

Pirámide pentagonal  $\rightarrow 6 + 6 = 10 + 2$



**016** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide oblicua de base cuadrangular.



**017** ¿Qué polígono forma la base de una pirámide que tiene 18 aristas?  
¿Y de una pirámide que tiene 9 vértices?

La pirámide con 18 aristas tiene un eneágono de base.

La pirámide con 9 vértices tiene un octógono de base.

# Cuerpos geométricos

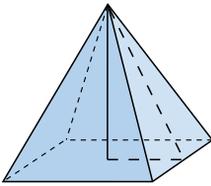
- 018** Calcula el área de una pirámide regular de base cuadrangular, si su arista básica mide 7 cm y la altura de sus caras laterales es 4 cm.

$$A_L = 4 \cdot \frac{b \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 4}{2} = 56 \text{ cm}^2$$

$$A_B = l^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 56 + 49 = 105 \text{ cm}^2$$

- 019** Halla el área total de una pirámide cuadrangular de altura 4 cm y arista de la base 4 cm.

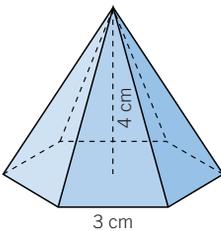


La altura de los triángulos laterales es:

$$a = \sqrt{16 + 4} = 4,47 \text{ cm}$$

$$A_T = A_B + 4 \cdot A_t = 4 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{4 \cdot 4,47}{2} = 51,76 \text{ cm}^2$$

- 020** Determina el área total de la pirámide regular.



La apotema del hexágono es:

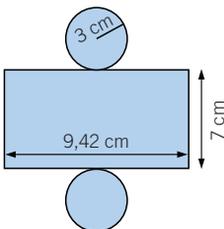
$$a = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = 2,6 \text{ cm}$$

La altura de los triángulos laterales es:

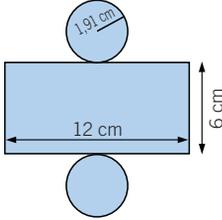
$$a' = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{22,75} = 4,77 \text{ cm}$$

$$A_T = A_B + \frac{P \cdot a'}{2} = \frac{18 \cdot 2,6}{2} + \frac{18 \cdot 4,77}{2} = 66,33 \text{ cm}^2$$

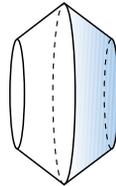
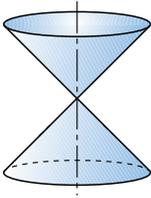
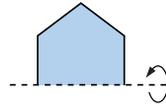
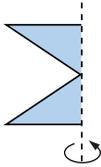
- 021** Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de 3 cm de radio y 7 cm de altura.



- 022** Dibuja el desarrollo plano de un cilindro cuya circunferencia de la base mide 12 cm y tiene una altura de 6 cm.



- 023** Determina los cuerpos de revolución que al girar generan estas figuras planas.



- 024** Calcula el área total de un cilindro de altura 10 cm y radio de la base 7 cm.

$$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 7 \cdot 10 = 439,6 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 153,86 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 747,32 \text{ cm}^2$$

- 025** Luis y Ana tienen que forrar un tubo cilíndrico de 12 m de altura y 2 m de diámetro. Si el papel les cuesta 12 €/m<sup>2</sup>, ¿cuánto les costará forrar la superficie lateral del tubo?

$$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 1 \cdot 12 = 75,36 \text{ m}^2$$

$$\text{Les costará forrarla: } 75,36 \cdot 12 = 904,32 \text{ €}.$$

- 026** Halla la superficie total de un tronco de madera cilíndrico recto, de 3 m de altura y diámetro de la base de 30 cm.

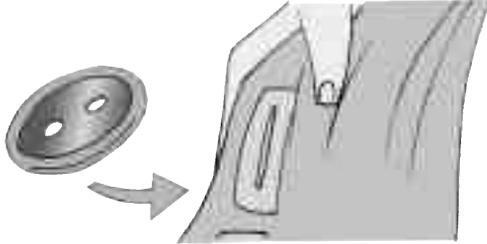
$$A_L = 2\pi rh = 2\pi \cdot 0,15 \cdot 3 = 2,83 \text{ m}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 0,15^2 = 0,07 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2,97 \text{ m}^2$$

# Cuerpos geométricos

- 027 Un botón de forma cilíndrica tiene una altura de 1 mm. Si su área total es  $188,4 \text{ mm}^2$ , ¿cabe por un ojal que tiene una altura de 8 mm?



Calculamos el diámetro del botón:

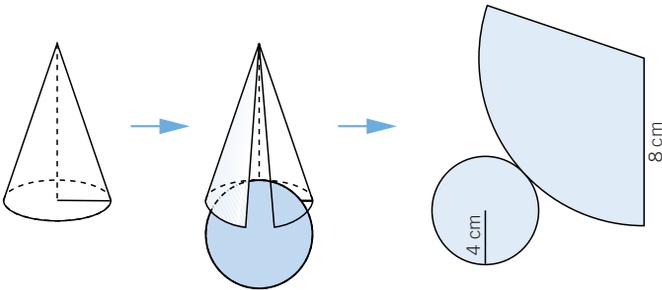
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow 188,4 = 2\pi \cdot (r^2 + r) \rightarrow 30 = r^2 + r \rightarrow r^2 + r - 30 = 0$$

$$r^2 + r - 30 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} \rightarrow$$

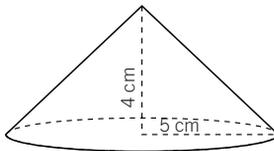
$$\rightarrow \begin{cases} r = \frac{1 + 11}{2} = 6 \text{ mm} \\ r = \frac{1 - 11}{2} = -5 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

Por tanto, el diámetro es 12 mm, y no cabe por el ojal de 8 mm.

- 028 Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 4 cm y generatriz 8 cm.

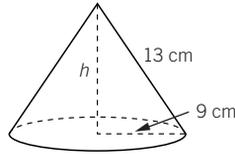


- 029 Calcula la generatriz del cono.



$$g = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6,4 \text{ cm}$$

030 Determina la altura de este cono.



$$13^2 = h^2 + 9^2$$

$$h^2 = 13^2 - 9^2$$

$$h = \sqrt{13^2 - 9^2} = 9,38 \text{ cm}$$

031 ¿Un triángulo equilátero, al girar sobre cualquiera de sus lados, genera un cono? ¿Y uno obtusángulo?

Solo generan conos los triángulos rectángulos al girar sobre uno de sus catetos.

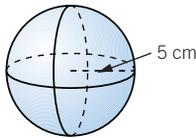
032 Un cono tiene 12 cm de generatriz y 8 cm de diámetro de la base. Calcula su área total.

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 12 = 150,72 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

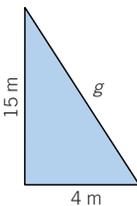
$$A_T = A_L + A_B = 150,72 + 50,24 = 200,96 \text{ cm}^2$$

033 ¿Cuál es el área de esta esfera?



$$A = 4\pi \cdot 5^2 = 314 \text{ cm}^2$$

034 Se desea cubrir con lona un torreón de forma cónica de 15 m de altura y diámetro de 8 m. ¿Qué cantidad de lona se necesita?



Hallamos su generatriz:

$$g = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{225 + 16} = \sqrt{241} = 15,5 \text{ m}$$

$$A_L = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 15,5 = 194,98 \text{ m}^2$$

035 Razona si un círculo puede generar una esfera. ¿Cuántos ejes de giro puede tener?

Un círculo genera una esfera al girar sobre alguno de sus diámetros, por lo que tiene infinitos ejes de giro.

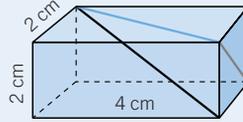
# Cuerpos geométricos

## ACTIVIDADES

### 036 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LAS DIAGONALES DE UN ORTOEDRO CONOCIENDO SUS ARISTAS?

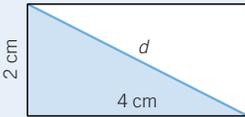
Calcula la longitud de las diagonales de este ortoedro.



**PRIMERO.** Se identifican los tipos de diagonales que hay en el poliedro.

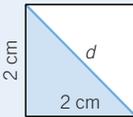
En un ortoedro hay tres tipos de diagonales: las de sus caras laterales, las de sus bases y las situadas entre vértices de caras opuestas.

**SEGUNDO.** Se determinan las diagonales de las caras, que son la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de la cara. Se aplica el teorema de Pitágoras.



$$d^2 = 2^2 + 4^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ cm}$$

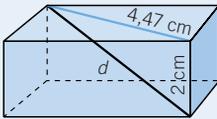


$$d^2 = 2^2 + 2^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ cm}$$

**TERCERO.** Se determinan las diagonales que hay situadas entre vértices de caras opuestas.

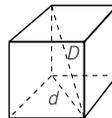
Estas diagonales son la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son las diagonales de las caras laterales y las aristas de la base. Se aplica el teorema de Pitágoras.



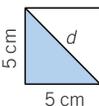
$$d^2 = 2^2 + 4,47^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4,47^2} = 4,9 \text{ cm}$$

### 037 ●● Un cubo tiene de arista 5 cm. Calcula la longitud de la diagonal de la cara y de la diagonal del cubo.



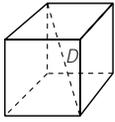
Diagonal de la cara:



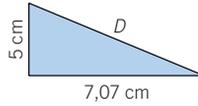
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7,07 \text{ cm}$$

Diagonal del cubo:



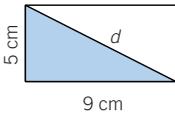
Aparece otra vez un triángulo rectángulo:



$$D^2 = 5^2 + 7,07^2 \rightarrow D^2 = 74,98 \rightarrow D = 8,66 \text{ cm}$$

**038** Un ortoedro tiene aristas de 5 cm, 7 cm y 9 cm. Halla la longitud de las diagonales de las caras y de la diagonal del ortoedro.

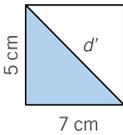
Diagonal de la cara rectangular mayor:



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 5^2 + 9^2 \rightarrow d^2 = 106 \rightarrow d = 10,3 \text{ cm}$$

Diagonal de la cara rectangular menor:

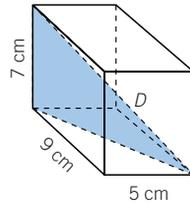
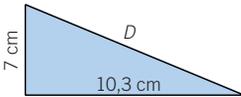


Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d'^2 = 7^2 + 5^2 \rightarrow d'^2 = 74 \rightarrow d' = 8,6 \text{ cm}$$

Diagonal del ortoedro:

Aparece otra vez un triángulo rectángulo:



$$D^2 = 7^2 + 10,3^2 \rightarrow D^2 = 155,09 \rightarrow D = 12,45 \text{ cm}$$

**039** Un cubo tiene una diagonal de cara de 4 cm. Determina la longitud de la arista y de la diagonal del cubo.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} \rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

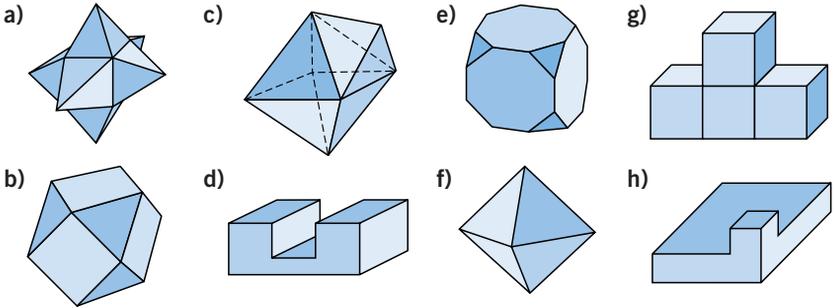
$$D^2 = l^2 + d^2 \rightarrow D = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} \rightarrow D = 4,9 \text{ cm}$$

**040** Completa la tabla, sabiendo que los datos pertenecen a poliedros en los que se cumple la fórmula de Euler.

N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
9	14	21
6	8	12
11	18	27
12	20	30
10	16	24

# Cuerpos geométricos

**041** Clasifica los siguientes poliedros en cóncavos o convexos. Evalúa si cumplen la fórmula de Euler.



- a) Convexo. Caras: 24, vértices: 14, aristas: 36  $\rightarrow 24 + 14 = 36 + 2$   
Sí cumple la fórmula de Euler.
- b) Cóncavo. La cumple por ser cóncavo.
- c) Cóncavo. La cumple por ser cóncavo.
- d) Convexo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24  $\rightarrow 10 + 16 = 24 + 2$   
Sí cumple la fórmula de Euler.
- e) Cóncavo. La cumple por ser cóncavo.
- f) Cóncavo. La cumple por ser cóncavo.
- g) Convexo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24  $\rightarrow 10 + 16 = 24 + 2$   
Sí cumple la fórmula de Euler.
- h) Convexo. Caras: 9, vértices: 13, aristas: 21  $\rightarrow 9 + 13 \neq 21 + 2$   
No cumple la fórmula de Euler.

**042** Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

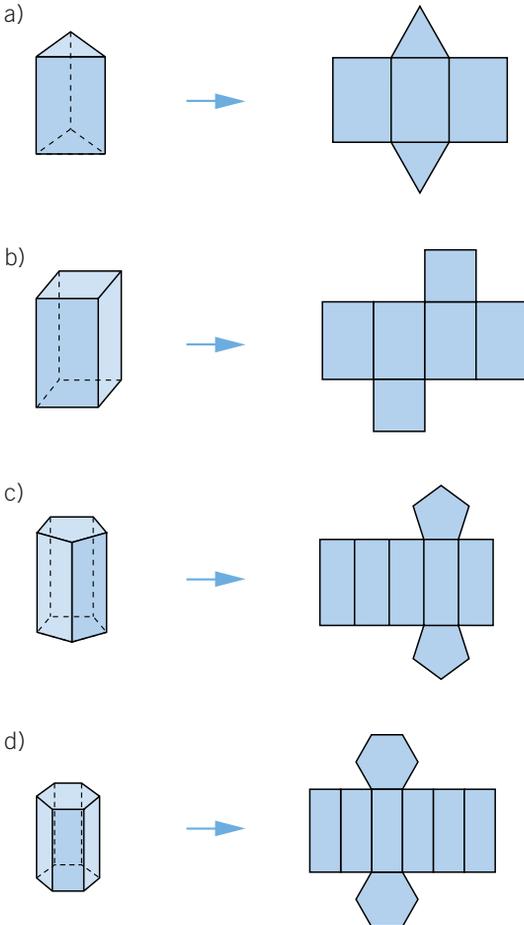
Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

**043** ¿Qué poliedro o poliedros regulares se pueden obtener utilizando como caras triángulos equiláteros? ¿Y con pentágonos regulares? ¿Y con hexágonos regulares?

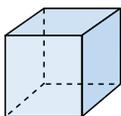
- Triángulos equiláteros: tetraedro, octaedro e icosaedro.
- Pentágonos regulares: dodecaedro.
- Hexágonos regulares: no se puede obtener ningún poliedro regular.

044 Dibuja estos prismas, indicando todos sus elementos. Dibuja también sus desarrollos planos.

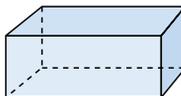
- a) Prisma triangular
- b) Prisma cuadrangular
- c) Prisma pentagonal
- d) Prisma hexagonal



045 Dibuja un prisma regular y otro irregular.



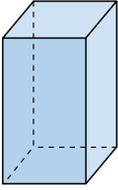
Regular



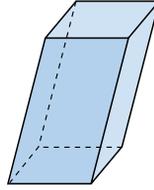
Irregular

# Cuerpos geométricos

046 Dibuja un prisma recto y otro oblicuo que tengan la misma base.

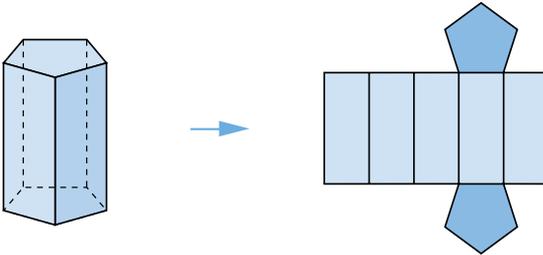


Recto



Oblicuo

047 Dibuja un prisma pentagonal regular y su desarrollo. Colorea en azul el área lateral, y en rojo, el área de las bases. ¿Cómo se calcula el área total?



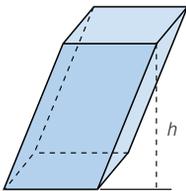
$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

048 Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.

- a) Un cubo es un ortoedro.
- b) La altura de un prisma oblicuo es la arista lateral.
- c) Los prismas oblicuos se clasifican en regulares e irregulares.

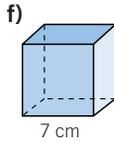
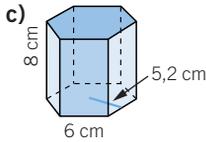
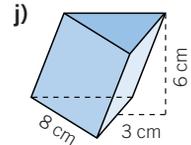
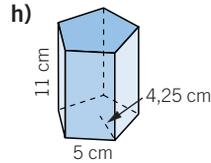
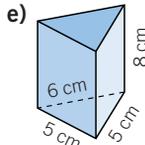
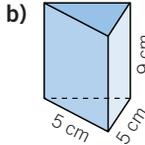
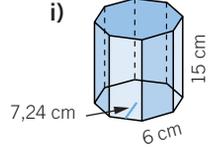
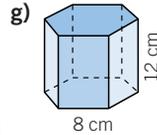
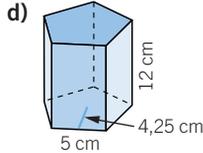
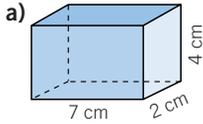
a) Verdadera.

b) Falsa.



c) Falsa, pues todos los prismas oblicuos son irregulares.

049 Calcula el área total de estos prismas.



$$a) A = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 100 \text{ cm}^2$$

$$b) h = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 9 = 156,65 \text{ cm}^2$$

$$c) A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} + 6 \cdot 6 \cdot 8 = 475,2 \text{ cm}^2$$

$$d) A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3,44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 12 = 386 \text{ cm}^2$$

$$e) h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} + 8 \cdot 5 \cdot 3 = 144 \text{ cm}^2$$

$$f) A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$g) a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} + 6 \cdot 8 \cdot 12 = 742,32 \text{ cm}^2$$

$$h) h = \sqrt{4,25^2 - 2,5^2} = 3,44 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5 \cdot 3,44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 11 = 361 \text{ cm}^2$$

$$i) A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{6 \cdot 7,24}{2} + 48 \cdot 15 = 1.067,52 \text{ cm}^2$$

$$j) h_{\text{Triángulo}} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Cara Lateral}} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ cm}$$

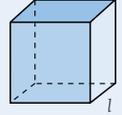
$$A = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 5,2 = 180,24 \text{ cm}^2$$

# Cuerpos geométricos

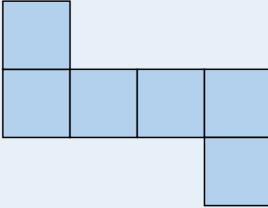
## 050 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ARISTA DE UN CUBO CONOCIENDO SU ÁREA?

Calcula la arista de un cubo sabiendo que su área es  $54 \text{ cm}^2$ .



PRIMERO. Se aplica la fórmula del área total.



$$A_T = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6 \cdot l \cdot l = 6l^2$$

SEGUNDO. Se iguala con el área conocida.

$$6l^2 = 54 \rightarrow l^2 = \frac{54}{6} = 9 \rightarrow l = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

## 051 El área total de un cubo mide $24 \text{ cm}^2$ . Calcula la arista del cubo, la diagonal de la cara y la diagonal del cubo.

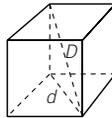
$$A = 6l^2 \rightarrow 24 = 6l^2 \rightarrow l = 2 \text{ cm}$$

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

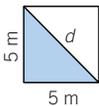
$$D^2 = 3l^2 \rightarrow D = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

## 052 Halla la diagonal de un cubo de área total $150 \text{ m}^2$ .

$$A = 6l^2 \rightarrow 150 = 6l^2 \rightarrow l = 5 \text{ m}$$



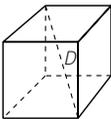
Diagonal de la cara:



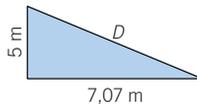
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7,07 \text{ m}$$

Diagonal del cubo:



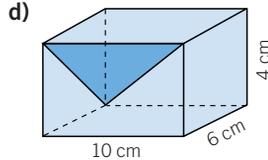
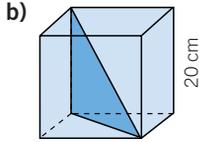
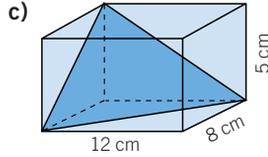
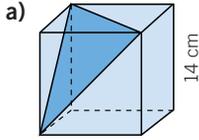
Aparece otra vez un triángulo rectángulo:



$$D^2 = 5^2 + 7,07^2 \rightarrow D^2 = 74,98 \rightarrow D = 8,66 \text{ m}$$

053

Calcula el área de los triángulos coloreados.



- a) La diagonal de cada cara es:  $d = \sqrt{14^2 + 14^2} = 19,8$  cm.  
Se forma un triángulo equilátero, de lado 19,8 cm.

$$h = \sqrt{392 - 98} = 17,15 \text{ cm}$$

$$A = \frac{19,8 \cdot 17,15}{2} = 169,78 \text{ cm}^2$$

- b) La diagonal de cada cara es:  $d = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28,28$  cm.  
Se forma un triángulo rectángulo, de catetos 28,28 cm y 20 cm.

$$A = \frac{20 \cdot 28,28}{2} = 282,8 \text{ cm}^2$$

- c) Las diagonales de cada cara son:

$$d_1 = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14,42 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$d_3 = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ cm}$$

Se forma un triángulo, de lados 14,42 cm, 13 cm y 9,43 cm.

$$\left. \begin{array}{l} h^2 = 13^2 - x^2 \\ h^2 = 9,43^2 - (14,42 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 13^2 - x^2 = 9,43^2 - (14,42 - x)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 169 - 89 + 208 = 28,84x \rightarrow x = 9,67 \text{ cm}$$

$$h^2 = 13^2 - x^2 \xrightarrow{x=9,67} h^2 = 169 - 93,58 \rightarrow h = 8,68 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14,42 \cdot 8,68}{2} = 62,58 \text{ cm}^2$$

- d) La diagonal del lateral es:  $d = \sqrt{16 + 36} = 7,21$  cm.

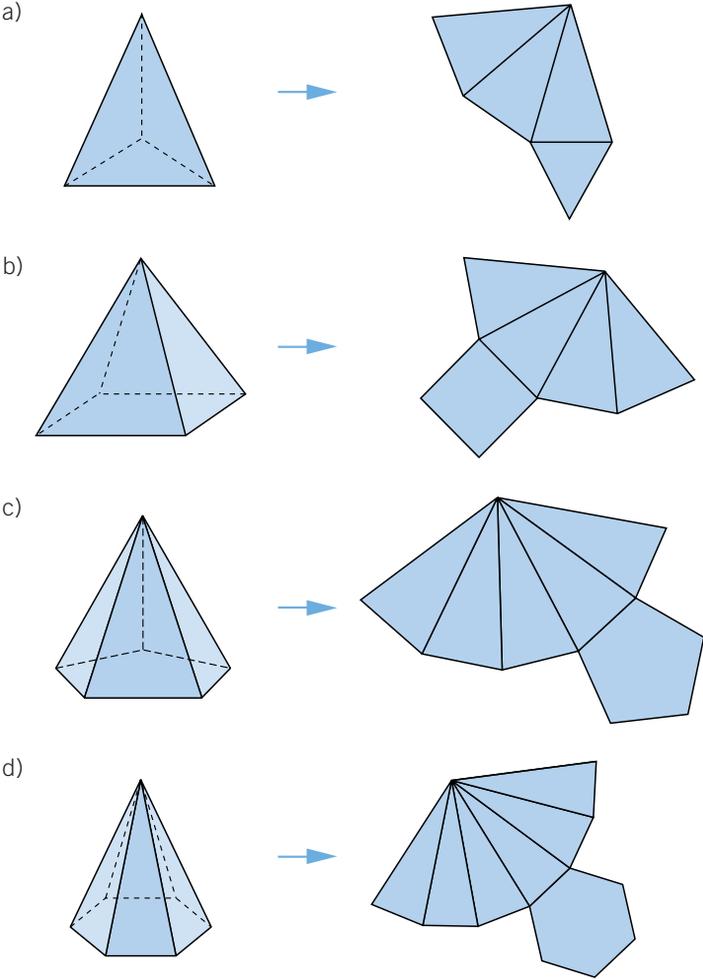
Se forma un triángulo rectángulo, de catetos 7,21 cm y 10 cm.

$$A = \frac{10 \cdot 7,21}{2} = 36,05 \text{ cm}^2$$

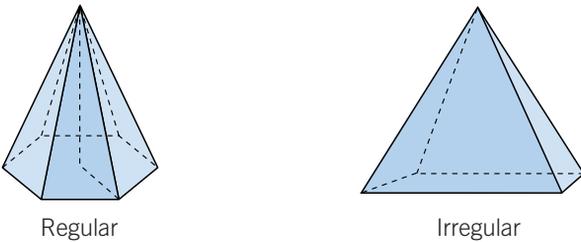
# Cuerpos geométricos

054 Dibuja estas pirámides y su desarrollo plano, indicando todos sus elementos.

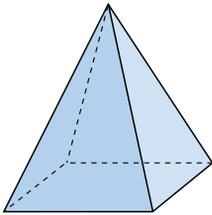
- a) Pirámide triangular
- b) Pirámide cuadrangular
- c) Pirámide pentagonal
- d) Pirámide hexagonal



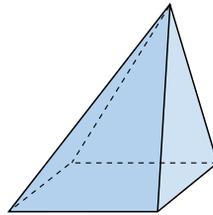
055 Dibuja una pirámide regular y otra irregular.



056 Dibuja una pirámide recta y otra oblicua que tengan la misma base.

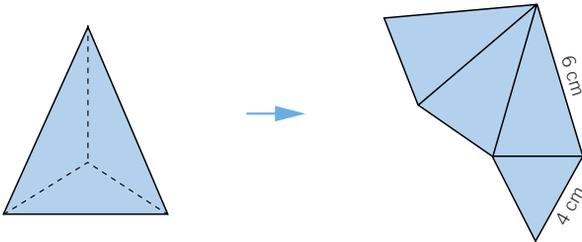


Recta



Oblicua

057 Dibuja el desarrollo plano de una pirámide triangular regular con aristas laterales de 6 cm, y base, un triángulo equilátero de 4 cm de lado.



058 Identifica similitudes y diferencias entre una pirámide triangular regular y un tetraedro.

El tetraedro es una pirámide triangular con la característica de que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base, por lo que es una pirámide triangular regular.

059 Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.

- En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos equiláteros.
- Una pirámide es un prisma triangular.
- La altura de una pirámide es cualquiera de sus aristas laterales.
- Una pirámide regular es un tetraedro.

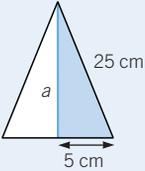
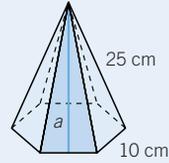
- Falsa, pues los triángulos son isósceles.
- Falsa, ya que la pirámide tiene caras laterales que son triángulos, y los prismas, paralelogramos.
- Falsa, porque la altura es la perpendicular que pasa por el vértice superior.
- Falsa, ya que el tetraedro es una pirámide regular en la que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base.

# Cuerpos geométricos

## 060 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UNA PIRÁMIDE CONOCIENDO SUS ARISTAS?

Calcula el área total de esta pirámide.

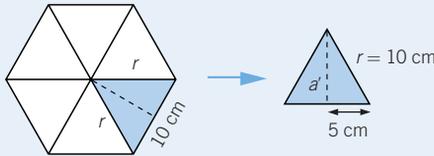


Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la pirámide, la mitad del lado de la base y la arista lateral.

$$25^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow a = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24,49 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula la apotema de la base.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la base, la mitad del lado de la base y el radio de la base.

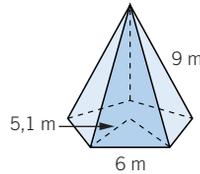
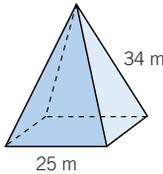


$$10^2 = (a')^2 + 5^2 \rightarrow a' = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm}$$

TERCERO. Se determina el área.

$$A_T = \frac{P_B \cdot a}{2} + \frac{P_B \cdot a'}{2} = \frac{(6 \cdot 10) \cdot 24,49}{2} + \frac{(6 \cdot 10) \cdot 8,66}{2} = 994,5 \text{ cm}^2$$

## 061 Calcula el área total de estas pirámides.



Pirámide cuadrangular:

$$a = \sqrt{34^2 - 12,5^2} = 31,62 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = 25^2 + 100 \cdot 31,62 = 3.787 \text{ m}^2$$

Pirámide pentagonal:

$$a = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8,49 \text{ m}$$

$$a' = \sqrt{5,1^2 - 3^2} = 4,12 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{30 \cdot 4,12}{2} + \frac{30 \cdot 8,49}{2} = 189,15 \text{ m}^2$$

**062** Halla el área total de un tetraedro de arista:

a) 3 cm

b) 5 cm

c) 9 cm

d) 6,2 cm

$$a) a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,6 \text{ cm} \quad A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$$

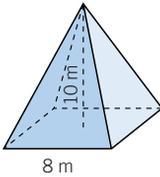
$$b) a = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm} \quad A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 34,3 \text{ cm}^2$$

$$c) a = \sqrt{9^2 - 4,5^2} = 7,79 \text{ cm} \quad A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{9 \cdot 7,79}{2} = 140,22 \text{ cm}^2$$

$$d) a = \sqrt{6,2^2 - 3,1^2} = 5,37 \text{ cm} \quad A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{6,2 \cdot 5,37}{2} = 66,59 \text{ cm}^2$$

**063** Calcula el área total de estas pirámides.

a)



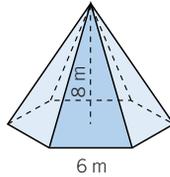
$$a) a = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,77 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = 64 + \frac{32 \cdot 10,77}{2} = 236,32 \text{ m}^2$$

$$b) a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ m} \quad a' = \sqrt{8^2 + 27} = 9,54 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{36 \cdot 5,2}{2} + \frac{32 \cdot 9,54}{2} = 265,52 \text{ m}^2$$

b)



**064** Determina el área total de una pirámide pentagonal que tiene un área de la base de  $100 \text{ cm}^2$  y una altura de 20 cm.

$$\text{Como la base es un hexágono: } A_B = 6 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2.$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 = 100 \rightarrow l^2 = \frac{100 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 38,5 \rightarrow$$

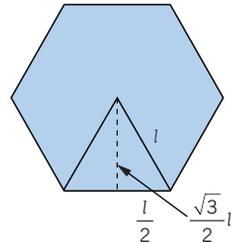
$$\rightarrow l = \sqrt{38,5} = 6,2 \text{ cm} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} l = 5,36 \text{ cm}$$

Calculamos la apotema de la pirámide:

$$a = \sqrt{5,36^2 + 20^2} = 20,7 \text{ cm}$$

$$\text{El área lateral es: } A_L = 6 \cdot \frac{6,2 \cdot 20,7}{2} = 385,02 \text{ cm}^2.$$

$$A_T = 100 + 385,02 = 485,2 \text{ cm}^2$$



# Cuerpos geométricos

065



El área total de una pirámide cuadrangular regular es  $4 \text{ cm}^2$  y su altura mide  $6 \text{ cm}$ . Calcula la arista que tiene un cubo cuya área total es igual que la de la pirámide.

$$A_T = 6 \cdot A_B \rightarrow 4 = 6l^2 \rightarrow l = 0,81 \text{ cm}$$

066



Halla la longitud de la arista de un tetraedro, para que su área sea igual que la de una pirámide hexagonal regular, con arista básica  $3 \text{ cm}$  y apotema de sus caras laterales  $10 \text{ cm}$ .

Pirámide hexagonal:

$$a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,6 \text{ cm}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{18 \cdot 2,6}{2} + \frac{18 \cdot 10}{2} = 113,4 \text{ cm}^2$$

Tetraedro:

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

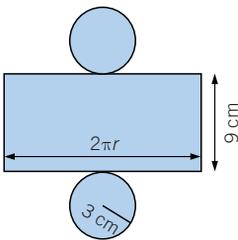
$$A_T = 4 \cdot A_B \rightarrow 113,4 = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} \rightarrow 113,4 = \sqrt{3} l^2 \rightarrow l = 8,1 \text{ cm}$$

La arista del tetraedro es  $8,1 \text{ cm}$ .

067



La altura de un cilindro es  $9 \text{ cm}$  y el diámetro de la base mide  $6 \text{ cm}$ . Dibuja su desarrollo.

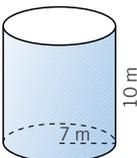


068

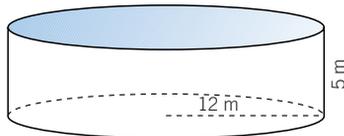


Calcula el área total de estos cilindros.

a)



b)



$$a) A = 2\pi \cdot 7^2 + 2\pi \cdot 7 \cdot 10 = 747,32 \text{ m}^2$$

$$b) A = 2\pi \cdot 12^2 + 2\pi \cdot 12 \cdot 5 = 1.281,12 \text{ m}^2$$

- 069** ●● Halla la altura de un cilindro de área lateral  $756,6 \text{ cm}^2$  y radio de la base  $10 \text{ cm}$ .

$$A_L = 2\pi r g \rightarrow 756,6 = 2\pi \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = \frac{756,6}{62,8} = 12 \text{ cm}$$

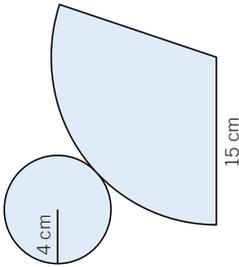
- 070** ●● El área total de un cilindro es  $471 \text{ cm}^2$  y su altura es el doble de su radio. Obtén la altura y el radio.

$$\left. \begin{array}{l} 471 = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ h = 2r \end{array} \right\} \rightarrow 471 = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r \rightarrow$$

$$\rightarrow 471 = 6\pi r^2 \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$h = 2r \xrightarrow{r=5 \text{ cm}} h = 10 \text{ cm}$$

- 071** ● Dibuja el desarrollo de un cono, y calcula el valor de la longitud del arco del sector correspondiente, si el radio de la base del cono es  $4 \text{ cm}$  y su generatriz  $15 \text{ cm}$ .



La longitud de arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base:  
 $L = 2\pi \cdot 4 = 25,12 \text{ cm}$ .

- 072** ● Un cono tiene  $12 \text{ cm}$  de generatriz y  $8 \text{ cm}$  de diámetro de la base. Calcula su área total.

$$A = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 12 = 401,92 \text{ cm}^2$$

- 073** ●● Halla la altura de un cono cuya generatriz mide  $13 \text{ cm}$  y el radio de la base  $5 \text{ cm}$ .

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

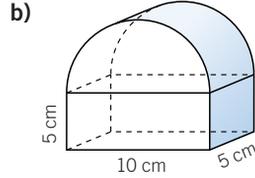
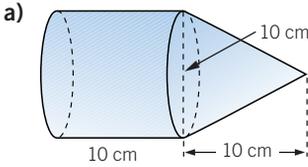
- 074** ●● Obtén el radio de una esfera, sabiendo que el área de su superficie es  $803,84 \text{ cm}^2$ .

$$A = 4\pi r^2 \rightarrow 803,84 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 8 \text{ cm}$$

# Cuerpos geométricos

075

Halla el área total de estas figuras.

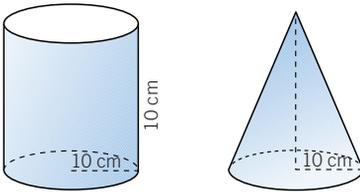


$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2\pi rg + \pi r^2 + \pi rg' \rightarrow A = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 \rightarrow \\ &\rightarrow A = 314 + 78,5 + 157 = 549,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= 10 \cdot 5 + (10 + 10 + 5 + 5) \cdot 5 + \frac{2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 5}{2} = \\ &= 50 + 150 + 157 = 357 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

076

Averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:



- a) La misma área lateral.  
b) La misma área total.

$$\begin{aligned} \text{a) } A_L &= 2\pi \cdot 10 \cdot 1.000 = 62.800 \text{ cm}^2 \\ 62.800 &= \pi \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2.000 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A_T &= 2\pi \cdot 10 \cdot 10 + 2\pi \cdot 10 \cdot 1.000 = 63.428 \text{ cm}^2 \\ 63.428 &= \pi \cdot 10 \cdot 10 + \pi \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2.010 \text{ cm} \end{aligned}$$

077

Las paredes y el techo de una habitación tienen un área de  $94 \text{ m}^2$ .



Si el suelo es un rectángulo de  $7 \text{ m}$  de largo y  $4 \text{ m}$  de ancho, ¿qué altura tiene dicha habitación?

$$A_{\text{Techo}} = A_{\text{Suelo}} = 7 \cdot 4 = 28 \text{ m}^2$$

Las cuatro paredes ocuparán un área de:  $94 - 28 = 66 \text{ m}^2$ .

Hay dos paredes de  $7 \text{ m}$  de largo y  $h$  de altura, y otras dos paredes de  $4 \text{ m}$  de largo y  $h$  de altura:

$$2 \cdot 7 \cdot h + 2 \cdot 4 \cdot h = 66 \rightarrow 14h + 8h = 66 \rightarrow 22h = 66 \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

078

Un edificio tiene forma de prisma recto de  $30 \text{ m}$  de altura y la base es un triángulo equilátero de  $5 \text{ m}$  de lado. ¿Qué áreas lateral y total tiene el edificio?



$$a = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ m}$$

$$A_L = 15 \cdot 30 = 450 \text{ m}^2$$

$$A_T = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + 540 = 561,65 \text{ m}^2$$

- 079** ●● Calcula el área lateral y total de un monolito en forma de pirámide hexagonal, cuyo lado del hexágono mide 10 cm y el lado de los triángulos laterales mide 25 cm.

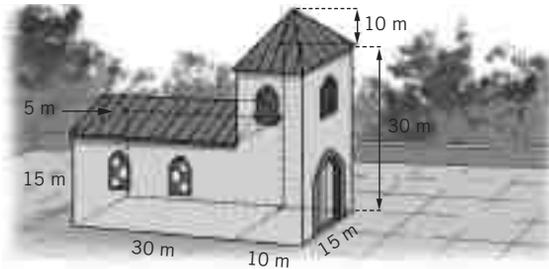
$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm}$$

$$a' = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24,49 \text{ cm}$$

$$A_L = 60 \cdot 24,49 = 1.469,4 \text{ cm}^2$$

$$A_T = \frac{60 \cdot 8,66}{2} + 1.469,4 = 1.729,2 \text{ cm}^2$$

- 080** ●● Determina el coste de construir este edificio, sabiendo que el metro cuadrado de ladrillos cuesta 4,35 €, y el de tejas, 9,65 €.



Tejado de la torre:

$$a = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \text{ m}$$

$$A = \frac{40 \cdot 11,18}{2} = 223,6 \text{ m}^2$$

Tejado de la iglesia:

$$l = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15,81 \text{ m}$$

$$A = 2 \cdot 15,81 \cdot 30 = 948,6 \text{ m}^2$$

$$\text{Fachadas laterales: } 2 \cdot (30 \cdot 15 + 10 \cdot 30) = 1.500 \text{ m}^2$$

$$\text{Fachadas frontales y traseras: } 15 \cdot 30 + 15 \cdot 15 + 15 \cdot 15 = 900 \text{ m}^2$$

$$\text{Coste de las tejas: } (223,6 + 948,6) \cdot 9,65 = 11.311,73 \text{ €}$$

$$\text{Coste de los ladrillos: } (1.500 + 900) \cdot 4,35 = 10.440 \text{ €}$$

$$\text{Coste total: } 11.311,73 + 10.440 = 21.751,73 \text{ €}$$

- 081** ●● Una tienda de campaña de forma cónica tiene una altura de 2 m y un diámetro de 1 m. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para forrarla, incluyendo la base?

El área total de la tienda es la superficie que hay que forrar:

$$A = \pi \cdot 0,5^2 + 2\pi \cdot 0,5 \cdot 2 = 7,065 \text{ m}^2$$

# Cuerpos geométricos

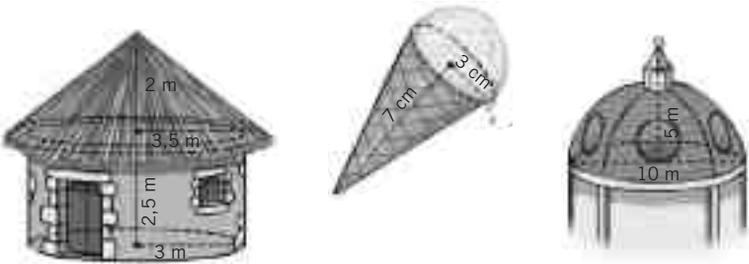
- 082** ●● Una bobina de papel de forma cilíndrica tiene una altura de 1,75 m y un diámetro de la base circular de 80 cm. Calcula el área total.

$$A = 2\pi \cdot 40^2 + 2\pi \cdot 40 \cdot 175 = 54.008 \text{ cm}^2$$

- 083** ● Determina la superficie esférica de un balón que tiene 30 cm de diámetro.

$$A = 4\pi \cdot 15^2 = 2.826 \text{ cm}^2$$

- 084** ●● Obtén el área total de estas figuras.



Área de la casa:

$$g_{\text{Tejado}} = \sqrt{2^2 + 3,5^2} = 4,03 \text{ m}$$

$$A = \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 2,5 + \frac{2\pi \cdot 3,5 \cdot 4,03}{2} = 119,65 \text{ m}^2$$

Área del helado:

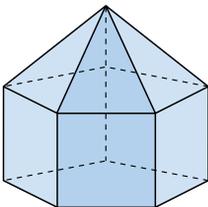
$$A = \frac{4\pi \cdot 3}{2} + \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 7}{2} = 94,2 \text{ cm}^2$$

Área de la cúpula:

$$A = \frac{4\pi \cdot 5^2}{2} + \pi \cdot 5^2 = 235,5 \text{ m}^2$$

- 085** ●●● Si consideramos  $C = 11$ ,  $V = 11$  y  $A = 20$  se cumple la fórmula de Euler. ¿Existe algún poliedro cuyas caras, aristas y vértices coincidan con esas cantidades? En caso afirmativo, dibújalo.

Sí, por ejemplo un prisma coronado por una pirámide.



- 086** Con 1.000 cubitos construimos un cubo que tiene 10 cubitos por arista. A continuación, pintamos las 6 caras del cubo. ¿Cuántos cubitos tienen 3 caras pintadas? ¿Cuántos cubitos tienen 2 caras pintadas? ¿Y cuántos tienen 1 cara? ¿Cuántos cubitos no tienen ninguna cara pintada?

Tienen 3 caras pintadas los cubitos que forman las esquinas: 8 cubitos.

Tienen 2 caras pintadas los cubitos que forman las aristas menos los que están en las esquinas:  $12 \cdot 8 = 96$  cubitos.

Tienen 1 cara pintada los cubitos que forman las caras exteriores menos las aristas:  $81 \cdot 6 = 486$  cubitos.

No tienen ninguna cara pintada:  $1.000 - 486 - 96 - 8 = 810$  cubitos.

- 087** Ariel tiene 36 cubitos de madera para hacer construcciones. ¿Cuántos prismas diferentes puede formar utilizando todos los cubitos?

Considerando que son iguales los prismas que tienen las mismas dimensiones, aunque estén en posición diferente, tenemos estos prismas con las siguientes dimensiones.

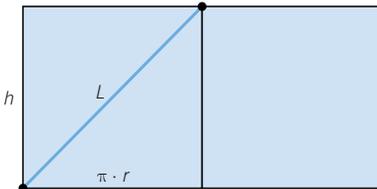
$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 1 \cdot 36 & 1 \cdot 6 \cdot 6 \\ 1 \cdot 2 \cdot 18 & 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ 1 \cdot 3 \cdot 12 & 2 \cdot 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 4 \cdot 9 & 3 \cdot 3 \cdot 4 \end{array}$$

En total, se pueden formar 8 prismas diferentes.

- 088** Una hormiga se desplaza desde el punto X al punto Y sobre la superficie de un cilindro.

¿Cuál es la mínima distancia recorrida por la hormiga?

La mínima distancia recorrida es dando menos de una vuelta. Si desarrollamos el área lateral, la distancia es la diagonal de un rectángulo de base la mitad de la circunferencia, y de altura, la altura del cilindro.



$$L = \sqrt{h^2 + (\pi \cdot r)^2}$$

# Cuerpos geométricos

## EN LA VIDA COTIDIANA

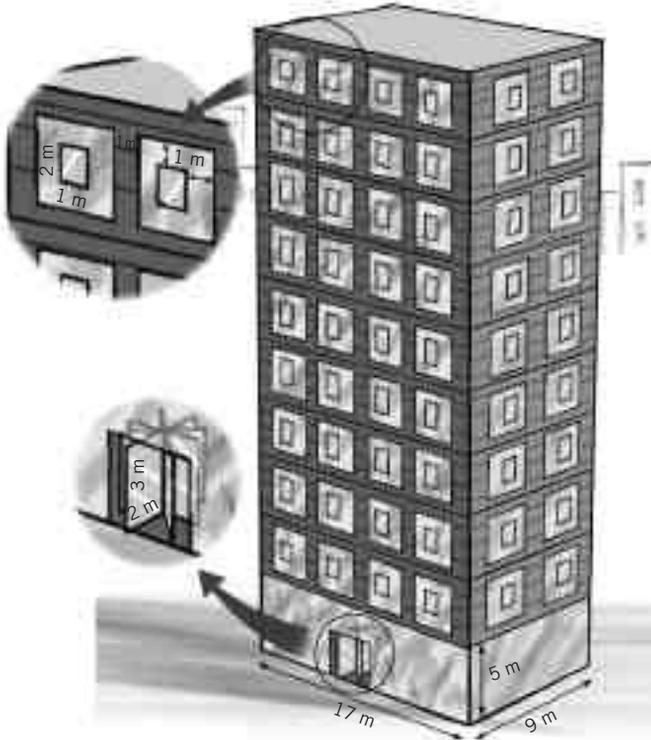
089



La empresa FACHADAS LIMPIAS se dedica al cuidado y limpieza de fachadas de edificios. El último trabajo que les han encargado consiste en limpiar las ventanas y puertas, así como pulir el mármol de la fachada de un edificio.



Para elaborar el presupuesto, un técnico se ha acercado hasta el edificio para tomar medidas.



Estas medidas se entregan en el departamento de Facturación y Presupuestos, donde se calculan los costes de la limpieza.

### COSTES DE LIMPIEZA

	En planta baja	En planta alta
Cristal	8,50 €/m <sup>2</sup>	14,30 €/m <sup>2</sup>
Mármol	19,80 €/m <sup>2</sup>	26,10 €/m <sup>2</sup>

#### ¿Cuál es el coste de la limpieza total del edificio?

Suponemos que el edificio ocupa la totalidad de la manzana y que las ventanas se reparten de manera similar por todo el edificio.

El número de ventanas es:  $2 \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 9 = 108$  ventanas, que tienen un área de:  $108 \cdot 1 \cdot 2 = 216 \text{ m}^2$ , que es la superficie de cristal de las plantas altas.

El mármol que recubre cada ventana tiene una superficie de:  $3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10 \text{ m}^2$ , siendo  $1.080 \text{ m}^2$  la superficie de mármol en las plantas altas.

En la planta baja hay una puerta con 8 cristales de:  $2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2$ , que hacen un total de  $48 \text{ m}^2$  de cristal en la planta baja.

La superficie de mármol de la planta baja es la superficie del zócalo menos la del espacio de la puerta:  $(17 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 248 \text{ m}^2$ .

El coste de la limpieza del edificio será:

$$48 \cdot 8,50 + 216 \cdot 14,30 + 248 \cdot 19,80 + 1.080 \cdot 26,10 = 36.595,20 \text{ €}$$

090

La escultora María Cincel ha recibido un encargo del ayuntamiento de Buril.

Queremos una escultura que simbolice  
la relación entre el ser humano  
y la naturaleza..., la simbiosis entre nuestras  
gentes y el entorno que les rodea.



# Cuerpos geométricos

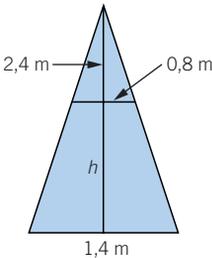
La escultora ha pensado en realizar una escultura de granito, que es la piedra predominante en los alrededores, y en una estructura similar a esta.

Cuando ha llamado a una cantera en la que le pueden proporcionar el granito, le han informado de que tienen estas piezas.

Un cono de 2,4 m de altura y un diámetro de 1,4 m.  
Un cilindro de 0,4 m de radio y 0,6 m de altura.  
Una esfera de 0,5 m de radio.

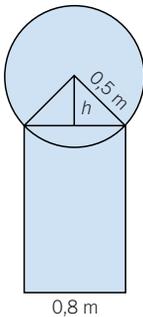


Para conseguir esa estructura tendrá que hacer un corte al cono y otro a la esfera. ¿A qué altura los tiene que hacer?



Como son triángulos semejantes:  $\frac{1,4}{2,4} = \frac{0,8}{h} \rightarrow h = 1,37$  m

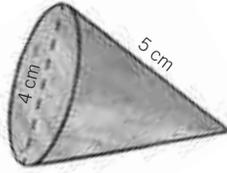
El cono lo ha de cortar a 1,37 m de la base.



$$h = \sqrt{0,5^2 - 0,4^2} = 0,3 \text{ m}$$

La esfera ha de cortarla a una distancia de 30 cm del centro o, lo que es lo mismo, a 20 cm de la superficie.

091 Tenemos un trozo de corcho con esta forma.



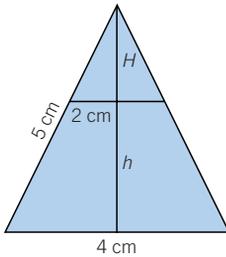
Si la boca de la botella es un círculo de  $314 \text{ mm}^2$  de área, ¿a partir de qué punto podemos cortar el corcho para que sirva para tapar la botella?



El radio de la boca de la botella es:

$$A = \pi r^2 \rightarrow 314 = \pi r^2 \rightarrow r = 10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$$

El diámetro es 2 cm.



La altura del cono es:  $H = \sqrt{5^2 - 2^2} = 4,58 \text{ cm}$ .

La altura del tronco de cono medirá:  $\frac{4}{2} = \frac{4,58}{h} \rightarrow h = 2,29 \text{ cm}$ .

Hay que cortar el corcho a partir de 2,29 cm de la base.

## UNIDADES DE VOLUMEN

RELACIÓN ENTRE  
LAS UNIDADES DE VOLUMEN,  
MASA Y CAPACIDAD

DENSIDAD

## VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

ORTOEDRO

CUBO

PRISMA

PIRÁMIDE

CILINDRO

CONO

ESFERA

## El saqueo de Siracusa

El cónsul Marcelo veía desde la distancia el inexorable avance de su ejército sobre la ciudad de Siracusa. El grueso de sus tropas entraba por un boquete de la muralla, mientras que otros legionarios la escalaban por distintos puntos.

La batalla estaba decidida y, de regreso a su tienda, le dijo a su lugarteniente:

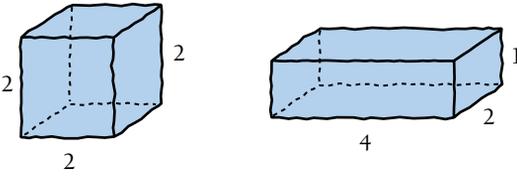
—¡Lo quiero capturar vivo! No permitas que nadie toque ni un pelo de su cabeza.

El subordinado saludó con la mano a la altura del pecho y corrió hacia la ciudad para transmitir las órdenes.

Después de largas horas, la agonía de la ciudad había llegado a su fin, los combates y el posterior saqueo habían terminado; sin embargo, el genio seguía sin aparecer y el cónsul, nervioso, ordenó a un escuadrón de legionarios que registrara toda la ciudad hasta dar con él.

Al cabo de un par de horas, el centurión encargado de la patrulla de búsqueda regresó con malas noticias:

—Hemos encontrado al sabio Arquímedes, atravesado por una espada, y bajo su cuerpo hemos hallado estos dibujos.

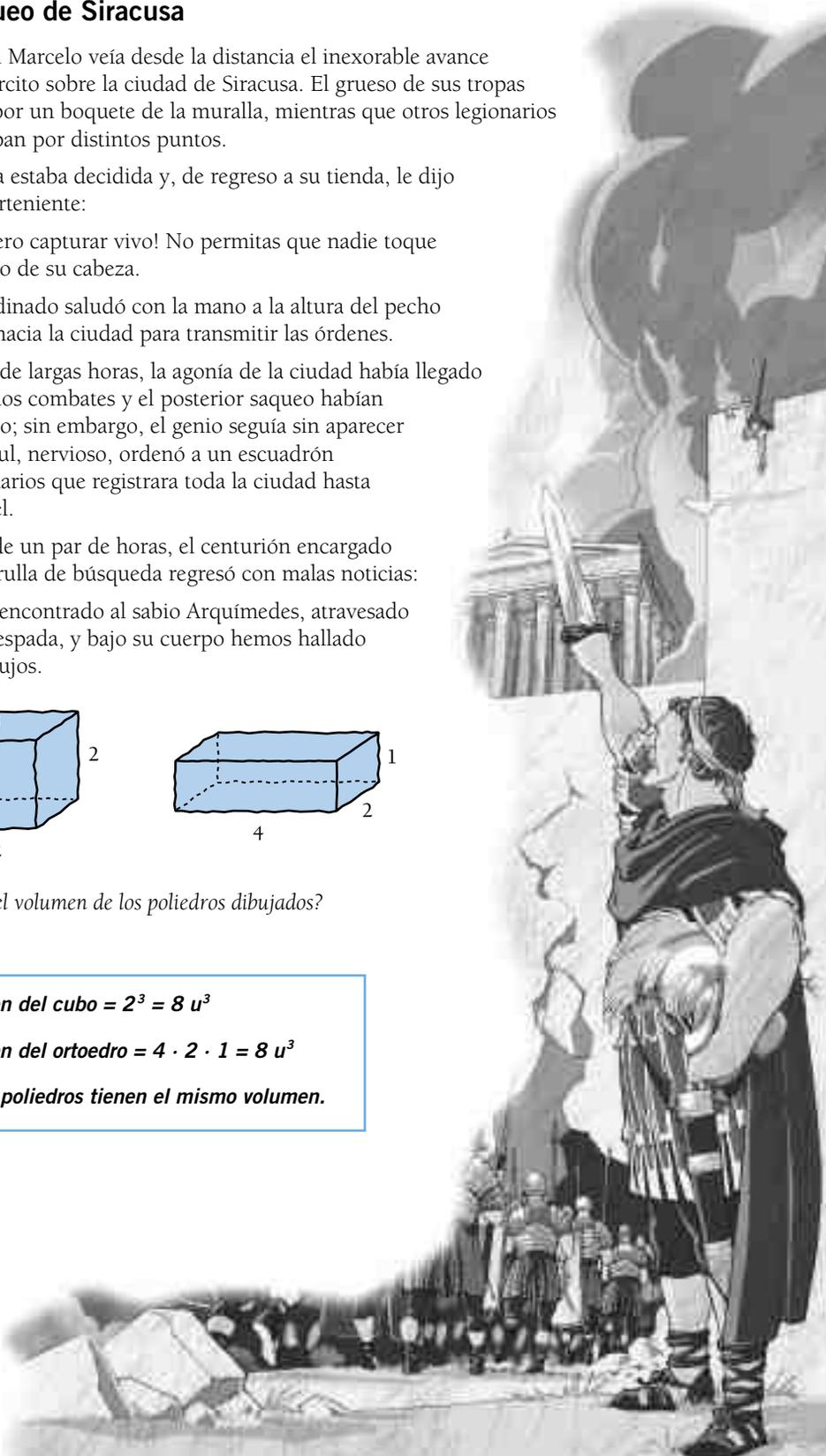


¿Cuál es el volumen de los poliedros dibujados?

$$\text{Volumen del cubo} = 2^3 = 8 u^3$$

$$\text{Volumen del ortoedro} = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 u^3$$

**Ambos poliedros tienen el mismo volumen.**



# Volumen de cuerpos geométricos

## EJERCICIOS

**001** Expresa  $5,7 \text{ m}^3$  en  $\text{cm}^3$ .

$$5.700.000 \text{ cm}^3$$

**002** ¿Cuántos  $\text{m}^3$  son  $4.895 \text{ dm}^3$ ?

$$4,895 \text{ m}^3$$

**003** Expresa en  $\text{dm}^3$ .

a)  $525 \text{ cm}^3$

c)  $3 \text{ m}^3$

b)  $0,5 \text{ dam}^3$

d)  $0,256 \text{ hm}^3$

a)  $0,523 \text{ dm}^3$

c)  $3.000 \text{ dm}^3$

b)  $500.000 \text{ dm}^3$

d)  $256.000.000 \text{ dm}^3$

**004** Ordena, de mayor a menor.

$27,67 \text{ m}^3$

$0,7 \text{ hm}^3$

$2.007,24 \text{ cm}^3$

$3.009.341 \text{ mm}^3$

$$0,7 \text{ hm}^3 > 27,67 \text{ m}^3 > 3.009.341 \text{ mm}^3 > 2.007,24 \text{ cm}^3$$

**005** Una planta que potabiliza agua del mar desala  $25.000 \text{ m}^3$  de agua al día. ¿Cuántos  $\text{hm}^3$ ,  $\text{dam}^3$  y  $\text{m}^3$  desalará en un año?

$$25.000 \cdot 365 = 9.125.000 \text{ m}^3 = 9.125 \text{ dam}^3 = 9,125 \text{ hm}^3$$

**006** Calcula.

a)  $4,02 \text{ hm}^3 + 1.430,27 \text{ dm}^3$

b)  $0,0875 \text{ km}^3 - 1.435,48 \text{ dam}^3$

c)  $1 \text{ km}^3 + 100 \text{ hm}^3 + 1 \text{ m}^3$

d)  $1 \text{ hm}^3 - 2 \text{ dam}^3 - 5 \text{ m}^3$

a)  $4.020.001.430,27 \text{ dm}^3$

c)  $1.100.000.001 \text{ m}^3$

b)  $88.935,48 \text{ dam}^3$

d)  $997.995 \text{ m}^3$

**007** Expresa en forma compleja.

a)  $3.425.123 \text{ m}^3$

c)  $789.452.142 \text{ cm}^3$

b)  $4.090,67 \text{ dm}^3$

d)  $45.860,0019 \text{ dam}^3$

a)  $3 \text{ hm}^3 425 \text{ dam}^3 123 \text{ m}^3$

b)  $4 \text{ m}^3 90 \text{ dm}^3 670 \text{ cm}^3$

c)  $789 \text{ m}^3 452 \text{ dm}^3 142 \text{ cm}^3$

d)  $45 \text{ hm}^3 860 \text{ dam}^3 1 \text{ m}^3 900 \text{ dm}^3$

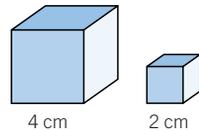
**008** Expresa en forma incompleja.

- a)  $3 \text{ dam}^3 40 \text{ dm}^3$                       c)  $76 \text{ cm}^3 0,46 \text{ dm}^3$   
 b)  $4.000 \text{ mm}^3 5 \text{ cm}^3$                       d)  $90 \text{ cm}^3 450 \text{ mm}^3$
- a)  $3.000.040 \text{ dm}^3$                               c)  $536 \text{ cm}^3$   
 b)  $9 \text{ cm}^3$     d)  $90.450 \text{ mm}^3$

**009** Calcula el volumen de un cubo que tiene 5 cm de arista. Expresa el resultado en  $\text{m}^3$ .

$$V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3 = 0,000125 \text{ m}^3$$

**010** ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cubo grande que el del cubo pequeño?



El volumen del cubo grande es 8 veces mayor que el del pequeño.

**011** Expresa en decímetros cúbicos.

- a)  $3,42 \text{ l}$     c)  $0,98 \text{ dal}$   
 b)  $4.090 \text{ cl}$                                       d)  $0,009 \text{ hl}$
- a)  $3,42 \text{ dm}^3$                                       c)  $9,8 \text{ dm}^3$   
 b)  $10,9 \text{ dm}^3$                                       d)  $0,9 \text{ dm}^3$

**012** Transforma en kilos las siguientes medidas de agua destilada.

- a)  $240 \text{ cm}^3$                                       c)  $7 \text{ dal}$   
 b)  $8,6 \text{ cl}$     d)  $2.400 \text{ mm}^3$
- a)  $0,24 \text{ kg}$     c)  $70 \text{ kg}$   
 b)  $0,086 \text{ kg}$                                       d)  $0,0024 \text{ kg}$

**013** ¿Cuántos vasos de 3 dl de capacidad se pueden llenar con una jarra de 1,5 l?

Se pueden llenar  $15 : 3 = 5$  vasos.

**014** ¿Cuántos litros de leche caben en un paquete de forma cúbica cuya arista mide 16 cm?

Caben  $16^3 = 4.096 \text{ cm}^3 = 4,096$  litros de leche.

**015** ¿Qué arista debe tener un cubo para contener 8 l de aceite?

$V = l^3 \rightarrow 8 = l^3 \rightarrow l = 2 \text{ dm}$ . Debe tener 2 dm de arista.

# Volumen de cuerpos geométricos

**016** Una barra de plata de  $1 \text{ dm}^3$  pesa **10,47 kg**. ¿Cuál es la densidad de la plata?

Como el volumen se expresa en  $\text{dm}^3$ , la masa se expresará en kg.

$$\text{Sustituimos en la fórmula: } d = \frac{m}{V} \rightarrow d = \frac{10,47}{1} \rightarrow d = 10,47 \text{ kg/dm}^3.$$

**017** Un trozo de metal de  $400 \text{ cm}^3$  de volumen tiene una densidad de **16,18 g/cm<sup>3</sup>**. ¿Cuánto pesa?

Como el volumen se expresa en  $\text{cm}^3$ , la masa se expresará en g.

$$\begin{aligned} \text{Sustituimos en la fórmula: } d &= \frac{m}{V} \rightarrow 16,18 = \frac{m}{400} \rightarrow \\ &\rightarrow m = 16,18 \cdot 400 \rightarrow m = 6.472 \text{ g} \end{aligned}$$

**018** Una barra de hierro pesa **50 kg**. Si la densidad del hierro es **7,21 kg/l**, ¿cuál será su volumen?

Como la masa se expresa en kg, el volumen se expresará en  $\text{dm}^3$ .

$$\begin{aligned} \text{Sustituimos en la fórmula: } d &= \frac{m}{V} \rightarrow 7,21 = \frac{50}{V} \rightarrow 7,21 \cdot V = 50 \rightarrow \\ &\rightarrow V = \frac{50}{7,21} \rightarrow V = 6,93 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

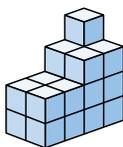
**019** Si una sortija de oro de  $1 \text{ cm}^3$  pesa **19,26 g**, ¿cuál es la densidad del oro?

$$\text{Sustituimos en la fórmula: } d = \frac{m}{V} \rightarrow d = \frac{19,26}{1} \rightarrow d = 19,26 \text{ g/cm}^3.$$



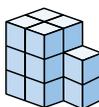
**020** Si cada cubito mide  $1 \text{ cm}^3$ , halla el volumen de estas figuras.

a)



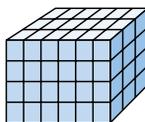
$$\text{a) } 21 \text{ cubos} \rightarrow 21 \text{ cm}^3$$

b)



$$\text{b) } 14 \text{ cubos} \rightarrow 14 \text{ cm}^3$$

c)



$$\text{c) } 72 \text{ cubos} \rightarrow 72 \text{ cm}^3$$

**021** Obtén el volumen de una piscina que tiene **12 m** de largo, **9 m** de ancho y **2 m** de profundidad. Expresa el resultado en  $\text{m}^3$  y  $\ell$ .

$$\text{Como } V = 12 \cdot 9 \cdot 2 = 216 \text{ m}^3, \text{ su capacidad es } 216 \text{ m}^3 = 216 \text{ kl} = 216.000 \ell.$$

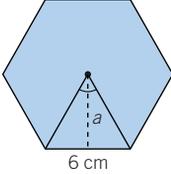
**022** Un ortoedro tiene de dimensiones  $a = 25 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$  y  $c = 5 \text{ cm}$ . ¿Cuánto mide la arista de un cubo con el mismo volumen que el ortoedro?

$$\text{El volumen del ortoedro es: } 25 \cdot 8 \cdot 5 = 1.000 \text{ cm}^3.$$

La arista del cubo mide 10 cm.

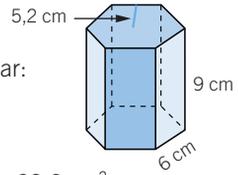
**023** Determina el volumen de este prisma.

Hallamos el área de la base, que es un hexágono regular:



$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 6) \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 93,6 \cdot 9 = 842,4 \text{ cm}^3$$



**024** Halla el volumen de un cilindro cuya área de la base mide  $45 \text{ cm}^2$  y su altura  $7 \text{ cm}$ .

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 45 \cdot 7 = 315 \text{ cm}^3$$

**025** Una caja de zapatos tiene unas aristas de  $40 \text{ cm}$ ,  $40 \text{ cm}$  y  $60 \text{ cm}$ . Calcula el volumen de la caja.

$$V = 40 \cdot 40 \cdot 60 = 96.000 \text{ cm}^3$$

**026** ¿Cuál es el área de la base de un cilindro con una altura de  $8 \text{ cm}$  y que tiene el mismo volumen que un cubo de  $6 \text{ cm}$  de arista?

$$\text{Volumen del cubo: } V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen del cilindro: } V = A_{\text{Base}} \cdot 8 = 216 \rightarrow A_{\text{Base}} = 27 \text{ cm}^2.$$

**027** Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular de arista de la base  $7 \text{ cm}$  y altura  $13 \text{ cm}$ .

$$\text{Hallamos el área de la base, que es un cuadrado: } A = l^2 \rightarrow A = 7^2 = 49 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Calculamos el volumen: } V = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 13 = 212,3 \text{ cm}^3.$$

**028** ¿Cuál es el radio de la base de un cono que tiene  $12 \text{ cm}$  de altura y un volumen de  $168 \text{ cm}^3$ ?

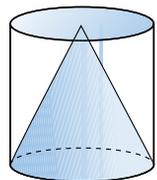
$$V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 168 = A_{\text{Base}} \cdot 12 \rightarrow A_{\text{Base}} = 14 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = \pi r^2 \rightarrow 14 = \pi r^2 \rightarrow r = 2,11 \text{ cm}$$

**029** Un cilindro tiene como diámetro de la base  $8 \text{ cm}$  y una altura de  $12 \text{ cm}$ . Calcula el volumen de un cono de igual altura y base circular equivalente.

$$A_{\text{Base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

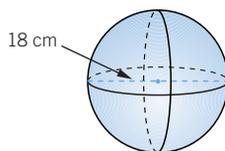
$$V = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 50,24 \cdot 12 = 200,96 \text{ cm}^3$$



# Volumen de cuerpos geométricos

**030** Halla el volumen de esta esfera.

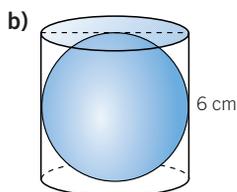
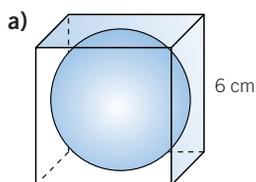
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 \rightarrow V = 3.052 \text{ cm}^3$$



**031** Si el volumen de una esfera es  $34 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es la longitud de su radio?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 34 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r^3 = 8,12 \rightarrow r = 2,01 \text{ cm}$$

**032** Calcula el volumen comprendido entre estos cuerpos y la esfera inscrita en ellos.



a) Volumen del cubo:  $V = l^3 \rightarrow V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$ .

Volumen de la esfera:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \rightarrow V = 113,04 \text{ cm}^3$ .

El volumen comprendido es:  $216 - 113,04 = 102,96 \text{ cm}^3$ .

b) Volumen del cilindro:  $V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169,56 \text{ cm}^3$ .

Volumen de la esfera:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \rightarrow V = 113,04 \text{ cm}^3$ .

El volumen comprendido es:  $169,56 - 113,04 = 56,52 \text{ cm}^3$ .

## ACTIVIDADES

**033** Transforma en decímetros cúbicos.

- a)  $8,56 \text{ m}^3$                       c)  $0,085 \text{ m}^3$   
b)  $124.090 \text{ cm}^3$                 d)  $0,006 \text{ dam}^3$

- a)  $8.560 \text{ dm}^3$                       c)  $85 \text{ dm}^3$   
b)  $124,09 \text{ dm}^3$                     d)  $6.000 \text{ dm}^3$

**034** Expresa en decámetros cúbicos.

- a)  $93,42 \text{ m}^3$                       c)  $0,86 \text{ hm}^3$   
b)  $64.090 \text{ cm}^3$                     d)  $0,0059 \text{ dm}^3$

- a)  $0,09342 \text{ dam}^3$                     c)  $860 \text{ dam}^3$   
b)  $0,00006409 \text{ dam}^3$                 d)  $0,0000000059 \text{ dam}^3$

**035** Expresa en metros cúbicos.



a)  $1,4 \text{ km}^3$   $23 \text{ hm}^3$   $18 \text{ dam}^3$

b)  $0,625 \text{ dm}^3$   $850 \text{ cm}^3$   $589 \text{ mm}^3$

a)  $1.423.018.000 \text{ m}^3$

b)  $0,001475589 \text{ m}^3$

**036** Transforma en hectómetros cúbicos.



a)  $30 \text{ dam}^3$   $41 \text{ m}^3$

c)  $760 \text{ m}^3$   $480 \text{ dm}^3$

b)  $4.450 \text{ m}^3$   $500 \text{ cm}^3$

d)  $98 \text{ m}^3$   $4.800 \text{ dm}^3$

a)  $0,030041 \text{ hm}^3$

c)  $0,000760480 \text{ hm}^3$

b)  $0,0000044505 \text{ hm}^3$

d)  $0,0001028 \text{ hm}^3$

**037** Expresa de forma compleja.



a)  $57.784.325 \text{ dam}^3$

c)  $85.245,9847 \text{ m}^3$

b)  $782.760,432 \text{ cm}^3$

d)  $6.667.229.503 \text{ dm}^3$

a)  $57 \text{ km}^3$   $784 \text{ hm}^3$   $325 \text{ dam}^3$

b)  $782 \text{ dm}^3$   $760 \text{ cm}^3$   $432 \text{ mm}^3$

c)  $85 \text{ dam}^3$   $245 \text{ m}^3$   $984 \text{ dm}^3$   $700 \text{ cm}^3$

d)  $6 \text{ hm}^3$   $667 \text{ dam}^3$   $229 \text{ m}^3$   $503 \text{ dm}^3$

**038** Expresa en mililitros.



a)  $53,41 \text{ l}$

c)  $9,08 \text{ dal}$

b)  $5.246 \text{ cl}$

d)  $0,0019 \text{ hl}$

a)  $53.410 \text{ ml}$

c)  $90.800 \text{ ml}$

b)  $52.460 \text{ ml}$

d)  $190 \text{ ml}$

**039** Transforma en decalitros.



a)  $8.050 \text{ dl}$   $900 \text{ cl}$

c)  $7.590,41 \text{ dl}$

b)  $850 \text{ ml}$   $50 \text{ cl}$

d)  $80 \text{ dl}$   $4.750 \text{ ml}$

a)  $81,4 \text{ dal}$

c)  $75,9041 \text{ dal}$

b)  $0,09 \text{ dal}$

d)  $1,275 \text{ dal}$

**040** Calcula el peso de este agua destilada.



a)  $3 \text{ dal}$

c)  $65 \text{ cm}^3$

b)  $12 \text{ dl}$

d)  $423 \text{ m}^3$

a)  $30 \text{ kg}$

c)  $65 \text{ g}$

b)  $1,2 \text{ kg}$

d)  $423.000 \text{ kg}$

# Volumen de cuerpos geométricos

- 041** Una barra de hierro pesa 40 kg. Si la densidad del hierro es 7,8 kg/dm<sup>3</sup>, ¿cuál será su volumen?

$$V = \frac{40}{7,8} = 5,128 \text{ dm}^3$$

- 042** Un lingote de plata de 2 dm<sup>3</sup> pesa 20,94 kg. ¿Cuál es la densidad de la plata?

$$d = \frac{20,94}{2} = 10,47 \text{ kg/dm}^3$$

- 043** La densidad del oro es 19,258 g/cm<sup>3</sup>. Di qué significa esto.

Esto significa que 1 cm<sup>3</sup> de oro pesa 19,258 g.

- 044** Un bloque de aluminio pesa 75 kg y su densidad es 2,7 g/cm<sup>3</sup>. ¿Cuál es su volumen?

$$V = \frac{75.000}{2,7} = 27.777,777 \text{ cm}^3 = 27,777 \text{ dm}^3$$

- 045** Un trozo de metal pesa 3.149,6 g y su densidad es 12,4 kg/dm<sup>3</sup>. ¿Cuál es su volumen en cm<sup>3</sup>?

$$V = \frac{3,1496}{12,4} = 0,254 \text{ dm}^3 = 254 \text{ cm}^3$$

- 046** Calcula el volumen de un cubo que tiene 8 cm de arista. Expresa el resultado en m<sup>3</sup>.

$$V = 8^3 = 512 \text{ cm}^3 = 0,000512 \text{ m}^3$$

- 047** El perímetro de la base de un cubo es 84 cm. Halla su volumen.

$$P = 4l \rightarrow 84 = 4l \rightarrow l = 21 \text{ cm}$$

$$V = 21^3 = 9.261 \text{ cm}^3$$

- 048** Si el volumen de un cubo es 98 cm<sup>3</sup>, calcula la longitud de su arista.

$$98 = l^3 \rightarrow l = 4,61 \text{ cm}$$

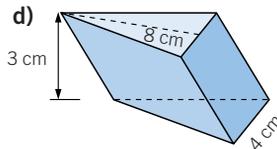
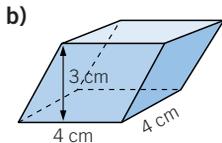
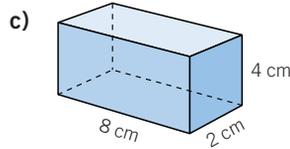
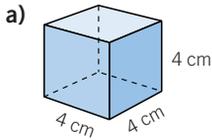
- 049** El volumen de un cubo es 125 cm<sup>3</sup>. Halla su diagonal.

$$125 = l^3 \rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal del lado: } d = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ cm.}$$

$$\text{Diagonal del cubo: } d = \sqrt{50 + 5^2} = 8,66 \text{ cm.}$$

- 050** ●● Identifica cuáles de estas figuras tienen el mismo volumen, aplicando el principio de Cavalieri.



Las figuras de los apartados a) y c) tienen el mismo volumen, porque la sección de ambas mide  $16 \text{ cm}^2$  de área y presentan igual altura: 4 cm.

Las figuras de los apartados b) y d) tienen el mismo volumen, porque la sección de ambas mide  $16 \text{ cm}^2$  de área y presentan igual altura: 3 cm.

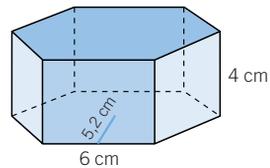
- 051** ● Obtén el volumen de un prisma cuya base es un cuadrado de 8 cm de lado y su altura mide 15 cm.

$$V = 8^2 \cdot 15 = 960 \text{ cm}^3$$

- 052** ● Calcula el volumen de este prisma de base hexagonal regular.

$$A_{\text{Base}} = \frac{36 \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 93,6 \cdot 4 = 374,4 \text{ cm}^3$$



- 053** ●● Determina el volumen de un prisma hexagonal que tiene 10 cm de arista básica y 16 cm de altura.

$$a = \sqrt{100 - 25} = 8,66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Base}} = \frac{60 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 259,8 \cdot 16 = 4.156,8 \text{ cm}^3$$

- 054** ●● Un prisma de base cuadrada de 12 cm de altura tiene un volumen de  $146 \text{ cm}^3$ . Calcula la longitud del lado de la base.

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 146 = A_{\text{Base}} \cdot 12 \rightarrow A_{\text{Base}} = 12,17 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = l^2 \rightarrow 12,17 = l^2 \rightarrow l = 3,49 \text{ cm}$$

# Volumen de cuerpos geométricos

**055** Obtén el volumen de un cilindro de altura 15 cm y diámetro de la base 16 cm.

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 3.014,4 \text{ cm}^3$$

**056** Calcula el radio de un cilindro que tiene 8 cm de altura y un volumen de 122 cm<sup>3</sup>.

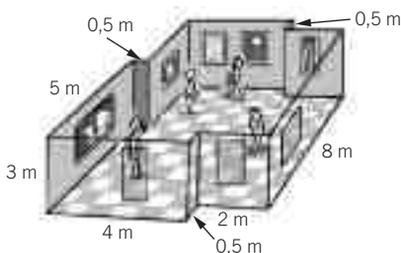
$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h \rightarrow 122 = \pi \cdot r^2 \cdot 8 \rightarrow r = 2,2 \text{ cm}$$

**057** Halla el volumen de un cilindro de 12 cm de radio de la base, y de altura, el triple del radio.

$$h = 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm}$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 16.277,76 \text{ cm}^3$$

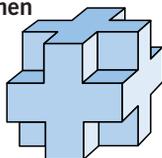
**058** Calcula el volumen de esta sala.



$$A_{\text{Base}} = A_{\text{Rectángulo}} - A_{\text{Entrantes}} = 9 \cdot 6 - 2 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5 = 50 \text{ m}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 50 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3$$

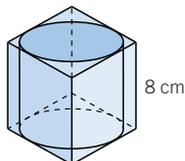
**059** Obtén el volumen de la figura.



6 cm El volumen total es el volumen del cubo exterior menos el volumen de los 8 cubitos:

$$V = 6^3 - 8 \cdot 2^3 = 216 - 64 = 152 \text{ cm}^3$$

**060** Calcula el volumen comprendido entre un cubo de 8 cm de arista y el cilindro inscrito en él.



$$\text{Volumen del cilindro: } V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 401,92 \text{ cm}^3.$$

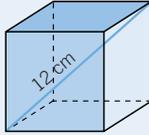
$$\text{Volumen de la esfera: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \cdot 4^3 = 268,08 \text{ cm}^3.$$

$$\text{El volumen comprendido es: } 401,92 - 268,08 = 133,84 \text{ cm}^3.$$

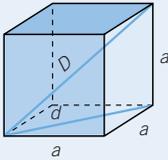
## 061 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE UN CUBO CONOCIENDO SOLO SU DIAGONAL?

Calcula el volumen de este cubo.



**PRIMERO.** Se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos:



- Hipotenusa  $D$  y catetos  $d$  y  $a$ .

$$D^2 = a^2 + d^2 \rightarrow 12^2 = a^2 + d^2$$

- Hipotenusa  $d$  y catetos  $a$  y  $a$ .

$$d^2 = a^2 + a^2$$

**SEGUNDO.** Se plantea un sistema con las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 12^2 = a^2 + d^2 \\ d^2 = a^2 + a^2 \end{array} \right\} \rightarrow d^2 = 12^2 - a^2$$

$$d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 12^2 - a^2 = a^2 + a^2 \rightarrow a^2 = \frac{12^2}{3} = 48 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

**TERCERO.** Se calcula el volumen.

$$V = 6,93^3 = 332,81 \text{ cm}^3$$

## 062 Calcula el volumen de un cubo, sabiendo que su diagonal mide:

a) 27 cm

b) 32 cm

c) 9 cm

$$a) \left. \begin{array}{l} 27^2 = a^2 + d^2 \\ d^2 = a^2 + a^2 \end{array} \right\} \rightarrow 27^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{243} = 15,59 \text{ cm}$$

$$V = a^3 = 15,59^3 = 3.789,12 \text{ cm}^3$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 32^2 = a^2 + d^2 \\ d^2 = a^2 + a^2 \end{array} \right\} \rightarrow 32^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{\frac{1.024}{3}} = 18,48 \text{ cm}$$

$$V = a^3 = 18,48^3 = 6.311,11 \text{ cm}^3$$

$$c) \left. \begin{array}{l} 9^2 = a^2 + d^2 \\ d^2 = a^2 + a^2 \end{array} \right\} \rightarrow 9^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{27} = 5,2 \text{ cm}$$

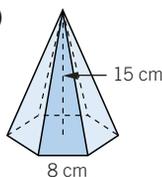
$$V = a^3 = 5,2^3 = 140,61 \text{ cm}^3$$

# Volumen de cuerpos geométricos

**063** Halla el volumen de estas figuras.



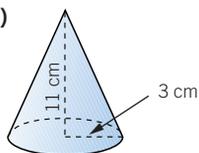
a)



$$a) a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 6,93}{2} \cdot 15 = 831,6 \text{ cm}^3$$

b)



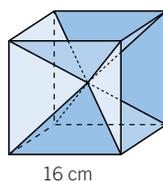
$$b) V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 11 = 103,62 \text{ cm}^3$$

**064** Uniendo el centro de un cubo de 16 cm de arista con sus 8 vértices se forman 6 pirámides. ¿Cuál es el volumen de cada pirámide?



El volumen de cada pirámide es la sexta parte del volumen del cubo:

$$V = \frac{16^3}{6} = 682,67 \text{ cm}^3$$

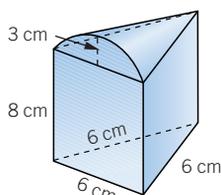


**065** Halla el volumen de esta figura, formada por un prisma y la mitad de un cono, si el triángulo de la base del prisma es equilátero.

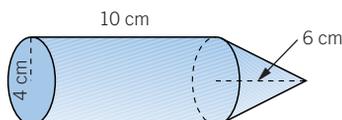


$$h_{\text{Base}} = \sqrt{36 - 9} = 5,2 \text{ cm}$$

$$V = V_{\text{Prisma}} + \frac{V_{\text{Cono}}}{2} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} + \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 6}{2} = 15,6 + 28,26 = 43,86 \text{ cm}^3$$



**066** En una acería se fabrican diariamente 3.000 piezas de acero ( $d = 8 \text{ g/cm}^3$ ) con esta forma. Halla la masa y el volumen de acero utilizado.



Volumen de una pieza:

$$V = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cono}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 602,88 \text{ cm}^3$$

Volumen total de las piezas:  $V = 602,88 \cdot 3.000 = 1.808.640 \text{ cm}^3$ .

Masa:  $M = 1.808.640 \cdot 8 = 14.469.120 \text{ g}$ .

- 067 ●● **Calcula el volumen de un cono de altura 36 cm y diámetro de la base  $\frac{2}{3}$  de la altura.**

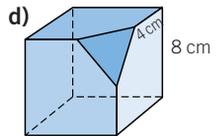
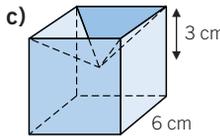
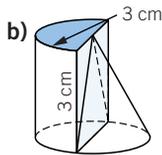
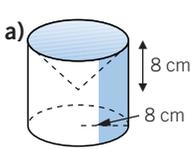
Altura: 36 cm. Diámetro: 24 cm.

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 5.425,92 \text{ cm}^3$$

- 068 ●● **Un cilindro tiene como diámetro de la base 6 cm y una altura de 10 cm. Determina el volumen de un cono de igual altura y base circular equivalente.**

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90,2 \text{ cm}^3$$

- 069 ●●● **Calcula el volumen de las figuras.**



a)  $V = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cono}} = \pi \cdot 8^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 2.679,47 \text{ cm}^3$

b)  $\frac{\text{Circunferencia}}{2} = \pi \cdot r \rightarrow \pi \cdot r = 3 \rightarrow r = 0,96 \text{ cm}$

$$V = \frac{V_{\text{Cilindro}}}{2} - \frac{V_{\text{Cono}}}{2} = \frac{\pi \cdot 0,96^2 \cdot 3}{2} + \frac{\frac{1}{3} \pi \cdot 0,96^2 \cdot 3}{2} = 5,79 \text{ cm}^3$$

c) El volumen del cono es la sexta parte del volumen del cubo:

$$V = 6^3 - \frac{6^3}{6} = 180 \text{ cm}^3$$

d) El volumen de la figura es el volumen de un cubo menos el volumen de una pirámide triangular.

Hallamos el volumen de la pirámide triangular oblicua cuya base es un triángulo rectángulo de lado 4 cm y altura 4 cm:

$$V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 8^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 64 - 10,67 = 53,33 \text{ cm}^3$$

- 070 ● **Halla el volumen de una esfera de 15 cm de radio.**

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 15^3 = 14.130 \text{ cm}^3$$

# Volumen de cuerpos geométricos

- 071** El diámetro de la base y la altura de un cilindro miden 16 cm. Halla el volumen comprendido entre el cilindro y la esfera inscrita en él.

$$\text{Volumen del cilindro: } V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 8^2 \cdot 16 = 3.215,36 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen de la esfera: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8^3 = 2.143,57 \text{ cm}^3.$$

$$\text{El volumen comprendido es: } 3.215,36 - 2.143,57 = 1.071,79 \text{ cm}^3.$$

- 072** Calcula y contesta.

- a) ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 14 cm?  
b) ¿Cuántos centilitros de agua caben en esta esfera?  
c) ¿Cuántos centigramos pesa el agua que cabe en la esfera?

$$\text{a) } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 7^3 = 1.436,03 \text{ cm}^3$$

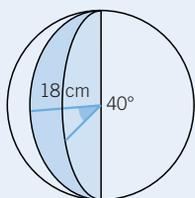
$$\text{b) En la esfera caben: } 1.436,03 : 10 = 143,603 \text{ cl.}$$

$$\text{c) El agua de la esfera pesa: } 1.436,03 \cdot 100 = 143.603 \text{ cg.}$$

- 073** HAZLO ASÍ

## ¿CÓMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE UN SECTOR ESFÉRICO?

La porción de una esfera limitada por dos semicírculos cuyo diámetro es el de la esfera se llama sector esférico.



¿Cuál es el volumen de este sector esférico?

**PRIMERO.** Se calcula el volumen de la esfera.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 18^3 = 24.416,64 \text{ cm}^3$$

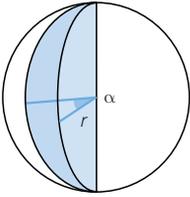
**SEGUNDO.** Se plantea una regla de tres en función de los grados que tenga el sector esférico.

$$\text{Si a } 360^\circ \xrightarrow{\text{le corresponden}} 24.416,64 \text{ cm}^3$$

$$\text{a } 40^\circ \xrightarrow{\text{le corresponderán}} x \text{ cm}^3$$

$$x = \frac{40 \cdot 24.416,64}{360} = 2.712,96 \text{ cm}^3$$

**074** ●● Calcula el volumen de estos sectores esféricos.



- a)  $r = 8 \text{ cm}$      $\alpha = 36^\circ$   
 b)  $r = 5 \text{ m}$      $\alpha = 120^\circ$   
 c)  $r = 10 \text{ dam}$      $\alpha = 90^\circ$   
 d)  $r = 12 \text{ cm}$      $\alpha = 150^\circ$

$$\text{a) } V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 8^3 = 2.143,57 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 36}{360} = 214,357 \text{ cm}^3$$

$$\text{b) } V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = 523,33 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 120}{360} = 174,44 \text{ m}^3$$

$$\text{c) } V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 10^3 = 4.186,66 \text{ dam}^3$$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 90}{360} = 1.046,66 \text{ dam}^3$$

$$\text{d) } V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 12^3 = 7.234,56 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 150}{360} = 3.014,4 \text{ cm}^3$$

**075** ●●● Una naranja de 10 cm de diámetro tiene 8 gajos iguales. Calcula el volumen de cada gajo.

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = 523,33 \text{ cm}^3 \quad V_{\text{Gajo}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{8} = 65,42 \text{ cm}^3$$

**076** ●● El consumo anual de agua en una vivienda ha sido  $140 \text{ m}^3 256 \text{ dm}^3$ . ¿Cuánto tienen que pagar si el metro cúbico cuesta 0,90 €?

El consumo anual es  $140 \text{ m}^3 256 \text{ dm}^3 = 140,256 \text{ m}^3$ .

Por tanto, el gasto anual es:  $140,256 \cdot 0,90 = 126,23 \text{ €}$ .

**077** ●● Un bote lleno de agua destilada pesa 380 g y vacío pesa 20 g. ¿Cuál es su capacidad en decilitros y en centilitros?

El peso del agua que hay en el bote es:  $380 - 20 = 360 \text{ g}$ , por lo que su capacidad es  $360 \text{ ml} = 36 \text{ cl} = 3,6 \text{ dl}$ .



**078** ●● Un grifo vierte 80 litros por hora y tarda 1 hora y 36 minutos en llenar una barrica. ¿Qué volumen tiene la barrica?

Los litros que caben en la barrica son:  $80 \cdot 1,6 = 128 \text{ litros}$ , siendo el volumen de la barrica de  $128 \text{ dm}^3$ .

# Volumen de cuerpos geométricos

- 079** Una bomba de agua que achica  $30 \text{ dm}^3/\text{min}$ , tarda 2 horas y media en vaciar un depósito. ¿Cuántos litros caben en el depósito?

Los litros de agua que desaloja son:  $30 \cdot 150 = 4.500$  litros, que es la capacidad del depósito.

## **080** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE LLENADO Y VACIADO CON DISTINTAS UNIDADES?

Un grifo mana  $140 \text{ l/mm}$ . ¿Cuánto tarda en llenar un depósito de  $9 \text{ m}^3$   $800 \text{ dm}^3$ ?

**PRIMERO.** Se transforman todas las cantidades a las mismas unidades.

Se transforma en  $\text{dm}^3$ :

$$\text{Grifo} \longrightarrow 140 \text{ l/min} = 140 \text{ dm}^3/\text{min}$$

$$\text{Depósito} \rightarrow 9 \text{ m}^3 + 800 \text{ dm}^3 = (9 \cdot 1.000) \text{ dm}^3 + 800 \text{ dm}^3 = 9.800 \text{ dm}^3$$

**SEGUNDO.** Se resuelve la regla de tres.

$$\text{Si } 140 \text{ dm}^3 \xrightarrow{\text{se llenan en}} 1 \text{ min}$$

$$9.800 \text{ dm}^3 \xrightarrow{\text{se llenarán en}} x \text{ min}$$

$$x = \frac{1 \cdot 9.800}{140} = 70 \text{ min}$$

- 081** Un grifo mana  $24,1 \text{ l/min}$ . ¿Cuánto tarda en llenar un depósito de  $24,75 \text{ m}^3$   $160 \text{ dm}^3$ ?

La capacidad del depósito es 24.910 litros.

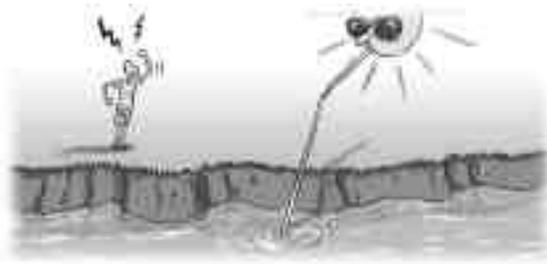
Tardará en llenarse:  $24.910 : 24,1 = 1.033,61$  minutos.

- 082** El desagüe de un estanque de  $180 \text{ dm}^3$  desaloja  $35 \text{ l/min}$ . ¿Cuánto tardará en vaciarse?



Tardará en vaciarse:  $180 : 35 = 5,14$  minutos.

- 083** Un pantano contiene 3.542 millones de  $\text{m}^3$  de agua. En verano pierde 875.000  $\ell$  por día.



- a) ¿Cuántos  $\text{m}^3$  perderá en 60 días?  
 b) ¿Cuántos  $\text{m}^3$  le quedarán después de 20 días?

- a) 875.000 litros = 875  $\text{m}^3$   
 En 60 días perderá:  $875 \cdot 60 = 52.500 \text{ m}^3$ .  
 b) Después de 20 días quedarán:  
 $3.542.000.000 - 875 \cdot 20 = 3.541.982.500 \text{ m}^3$

- 084** En un depósito caben 2.700  $\ell$  de agua. Si un grifo tarda en llenarlo 45 minutos, ¿cuántos metros cúbicos mana por minuto?

Consideramos que 2.700 litros equivalen a 2,7  $\text{m}^3$ .  
 En un minuto mana:  $2,7 : 45 = 0,06 \text{ m}^3/\text{min}$ .

- 085** Una piscina tiene 25 m de largo, 12 m de ancho y 1,6 m de profundidad. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarla un grifo que vierte 100  $\ell/\text{min}$ ?

El volumen de la piscina es:  $25 \cdot 12 \cdot 1,6 = 480 \text{ m}^3 = 480.000 \text{ dm}^3$ .  
 Tardará en llenarse:  $480.000 : 100 = 4.800 \text{ minutos} = 80 \text{ horas}$ .

- 086** ¿Cuántas cajas de 1 m de largo, 8 dm de ancho y 6 dm de altura se pueden apilar en una sala de  $4 \times 3,2$  m de planta y 2,4 m de altura?

Volumen de cada caja:  $V_{\text{Caja}} = 1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,48 \text{ m}^3$ .  
 Volumen de la sala:  $V_{\text{Sala}} = 4 \cdot 3,2 \cdot 2,4 = 30,72 \text{ m}^3$ .  
 El número de cajas que podemos almacenar es:  $30,72 : 0,48 = 64 \text{ cajas}$ .

- 087** En un día las precipitaciones de lluvia fueron de 60  $\ell/\text{m}^2$ . ¿Qué altura alcanzó el agua en un recipiente cúbico de 2 dm de arista?

El agua que recogió el recipiente fue:  

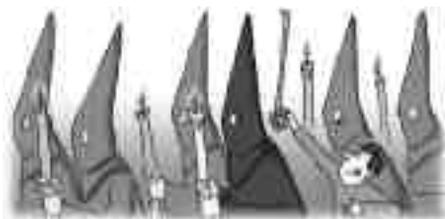
$$\left. \begin{array}{l} 60 \ell \longrightarrow 1.000 \text{ dm}^2 \\ x \ell \longrightarrow 4 \text{ dm}^2 \end{array} \right\} \rightarrow x = 0,24 \ell$$
  
 La altura que alcanzó es:  $V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 0,24 = 4 \cdot h \rightarrow h = 0,06 \text{ dm} = 6 \text{ mm}$ .

# Volumen de cuerpos geométricos

088



Halla el volumen del capirote de un cofrade de Semana Santa, sabiendo que tiene 9 cm de radio y 60 cm de altura.



$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 9^2 \cdot 60 = 5.086,8 \text{ cm}^3$$

089



Para inflar 200 balones de radio 12 cm, ¿qué volumen de aire se necesita?

$$\text{Volumen de un balón: } V = \frac{4}{3} \pi \cdot 12^3 = 7.234,56 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen de 200 balones: } V = 7.234,56 \cdot 200 = 1.446.912 \text{ cm}^3.$$

090



Calcula el volumen de material que se necesita para fabricar un balón de 15 cm de radio y 1 cm de espesor.

El volumen de material que se necesita es igual al volumen de la esfera exterior menos el volumen de la esfera interior.

$$V = V_{\text{Exterior}} - V_{\text{Interior}} = \frac{4}{3} \pi \cdot (15^3 - 14^3) = \frac{4}{3} \pi \cdot 631 = 2.641,79 \text{ cm}^3$$

091



El radio de la Tierra mide 6.370 km y el de Marte mide 3.400 km.

- a) ¿Cuántas veces es mayor el radio de la Tierra que el de Marte?  
b) ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la Tierra que el de Marte?

a) El radio de la Tierra es:  $\frac{6.370}{3.400} = 1,87$  veces mayor que el de Marte.

b) Volumen de la Tierra:  $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 6.370^3 = 1.082.148.051.226,67 \text{ km}^3.$

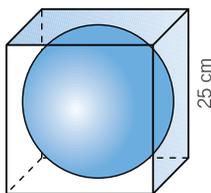
Volumen de Marte:  $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3.400^3 = 164.552.746.666,67 \text{ km}^3.$

$$\frac{1.082.148.051.226,67}{164.552.746.666,67} = 6,58 \rightarrow \text{El volumen de la Tierra es 6,58 veces mayor que el de Marte.}$$

092



Una empresa que fabrica bolas de cristal las envasa como ves en la figura.



- a) Halla el volumen comprendido entre el cilindro del envase y la bola inscrita en él.  
b) Si se rellena el hueco entre la bola y el envase con un material que cuesta 4,50 €/m<sup>3</sup>, ¿cuánto costará el relleno de 200 envases?  
c) Contesta a las preguntas anteriores, suponiendo que el envase fuera un cilindro de radio 13 cm y altura 25 cm.  
d) ¿Cuál de las dos opciones es más económica?

$$a) V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Esfera}} = 25^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12,5^3 = 7.447,92 \text{ cm}^3 = 0,00744792 \text{ m}^3$$

$$b) \text{ El coste es: } 200 \cdot 4,50 \cdot 0,00744792 = 6,70 \text{ €.}$$

$$c) V = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Esfera}} = \pi \cdot 13^2 \cdot 25 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12,5^3 = \\ = 5.089,42 \text{ cm}^3 = 0,00508942 \text{ m}^3$$

$$\text{El coste es: } 200 \cdot 4,50 \cdot 0,00508942 = 4,58 \text{ €.}$$

d) Es más económica la opción del cilindro.

**093** Un cono de 3 m de altura y una esfera de 3 m de radio tienen el mismo volumen. ¿Cuál es el radio de la base del cono?

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3 \\ V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \rightarrow r^2 = 12 \rightarrow r = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

**094** Si un cono y un cilindro tienen igual base y volumen, ¿qué relación hay entre sus alturas?

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 H \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r^2 H \rightarrow h = 3H$$

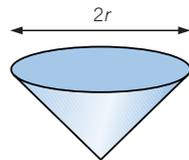
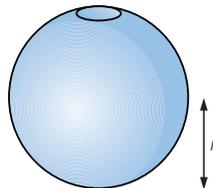
La altura del cono es el triple de la altura del cilindro.

**095** Un cono y un cilindro tienen la misma altura y el mismo volumen. ¿Qué relación existe entre los diámetros de sus bases?

$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{\text{Cilindro}} = \pi R^2 h \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi R^2 h \rightarrow r^2 = 3R^2 \rightarrow r = \sqrt{3}R$$

El diámetro del cono es  $\sqrt{3}$  del diámetro del cilindro.

**096** El radio del cono de la figura es igual a su altura y ambos segmentos son idénticos al radio de la esfera. ¿Cuántos conos de agua se necesitan para llenar la esfera?



$$\left. \begin{array}{l} V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 r \\ V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{V_{\text{Esfera}}}{V_{\text{Cono}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^3} = 4$$

Se necesitan 4 conos de agua para llenar la esfera.

# Volumen de cuerpos geométricos

097

●●● **¿Cuántas veces aumenta el volumen de un prisma hexagonal si duplicamos su altura? ¿Y si duplicamos las dimensiones de la base? ¿Y si duplicamos sus tres dimensiones?**

Volumen del prisma original:

$$V = A_{\text{Base1}} \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h$$

Volumen del prisma con doble altura:

$$V_1 = A_{\text{Base1}} \cdot 2 \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot 2 \cdot h = P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con doble altura es el doble del original.

Volumen del prisma con doble base:

$$V_2 = A_{\text{Base2}} \cdot h = \frac{(2 \cdot P) \cdot (2 \cdot a)}{2} \cdot h = 2 \cdot P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con doble base es el cuádruple del original.

Volumen del prisma con dimensiones duplicadas:

$$V_2 = A_{\text{Base2}} \cdot 2 \cdot h = \frac{(2 \cdot P) \cdot (2 \cdot a)}{2} \cdot 2 \cdot h = 4 \cdot P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con sus dimensiones duplicadas es 8 veces mayor que el original.

098

●●● **Dentro de una esfera está inscrito un cubo y, dentro de él, hay inscrita una esfera. ¿Qué relación existe entre el volumen de la esfera interior y la exterior?**

Radio de la esfera exterior:  $r$ .

Lado del cubo:  $l$ .

$$\text{Diagonal del lado del cubo: } \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2} l.$$

$$\text{Diagonal del cubo: } \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3} l.$$

El diámetro de la circunferencia coincide con la diagonal del cubo:

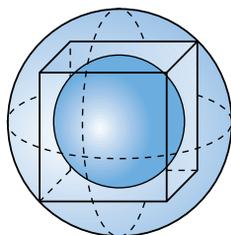
$$2r = \sqrt{3} l \rightarrow l = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

$$\text{Radio de la circunferencia menor: } r' = \frac{l}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} r.$$

$$\text{Volumen de la esfera mayor: } V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$$\text{Volumen de la esfera menor: } V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} r \right)^3.$$

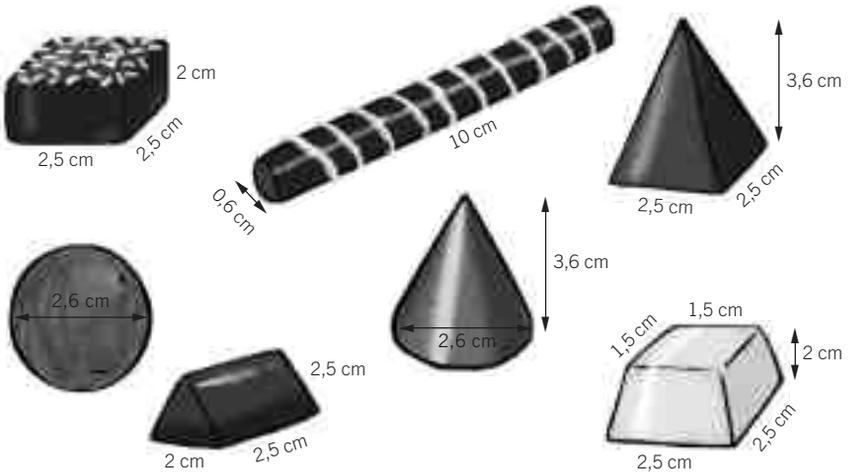
$$\text{Relación de los volúmenes: } \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} r \right)^3} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}.$$



## EN LA VIDA COTIDIANA

099

En BOMBONES BOMBAY cuidan mucho el diseño de los bombones que fabrican. Por eso, opinan que la calidad de las materias primas que utilizan es esencial: cacao, vainilla, menta... Pero también dan una especial importancia a la forma de los bombones.



Los bombones son macizos y se fabrican con una mezcla de diferentes chocolates a los que se les añaden distintos aromas. Una armoniosa composición de estos bombones en la caja en la que se comercializan, hace que el producto final se considere una auténtica obra de arte.



¿Qué cantidad de chocolate se necesita para fabricar una caja como esta?

$$\text{Volumen del prisma cuadrangular: } V_1 = 2,5^2 \cdot 2 = 12,5 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen del cono: } V_2 = \frac{1}{3} \cdot 2,5^2 \cdot 3,6 = 7,5 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen de la esfera: } V_3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1,3^3 = 9,2 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen del cilindro: } V_4 = \pi \cdot 0,3^3 \cdot 10 = 2,83 \text{ cm}^3.$$

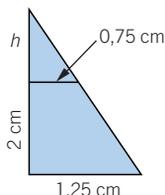
# Volumen de cuerpos geométricos

Volumen del prisma triangular:

$$a = \sqrt{2,5^2 - 1^2} = 2,29 \text{ cm} \rightarrow V_5 = \frac{2 \cdot 2,29}{2} \cdot 2,5 = 5,72 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen del cono: } V_6 = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,25^2 \cdot 3,5 = 5,72 \text{ cm}^3$$

El volumen del tronco de pirámide es el volumen total de la pirámide menos el volumen de la pirámide que se le ha quitado.



$$\left. \begin{array}{l} 1,25 \longrightarrow h + 2 \\ 0,75 \longrightarrow h \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1,25}{h+2} = \frac{0,75}{h} \rightarrow 1,25h = 0,75h + 1,5 \rightarrow h = 3 \text{ cm}$$

$$V_7 = \frac{1}{3} \cdot 2,5^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 8,17 \text{ cm}^3$$

La caja de bombones tiene 2 prismas cuadrangulares, 2 pirámides, 3 esferas, 3 cilindros, 2 prismas triangulares, 1 cono y 2 troncos de pirámide.

$$V = 2 \cdot 12,5 + 2 \cdot 7,5 + 3 \cdot 9,2 + 3 \cdot 2,83 + 2 \cdot 5,15 + 5,72 + 2 \cdot 8,17 = 108,45 \text{ cm}^3 \text{ de chocolate}$$

100

En una famosa cadena de restaurantes anuncian la siguiente oferta.

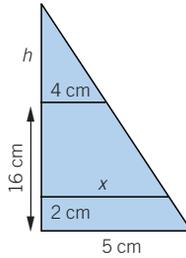


En esta oferta usan vasos como el que ves en el cartel, con forma de cono cortado por un plano paralelo a la base.

En ellos introducen ocho hielos cúbicos de 3 cm de lado y, después, los llenan de refresco hasta 2 cm del borde.

Teniendo en cuenta que  $\frac{1}{10}$  del volumen de los hielos flota en el refresco, quedando fuera del vaso, ¿cuál es el volumen de refresco que contienen?





$$\left. \begin{array}{l} 5 \longrightarrow h + 16 \\ 4 \longrightarrow h \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{h + 16} = \frac{4}{h} \rightarrow 5h = 4h + 64 \rightarrow h = 64 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \longrightarrow 64 \\ 64 + 16 - 2 \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{64}{78} \rightarrow x = 4,875 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen del vaso: } V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4,875^2 \cdot 78 - \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 64 = 868,44 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen de los cubitos: } 8 \cdot 3^3 = 216 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumen sumergido de los cubitos: } 90 \% \text{ de } 216 = 194,4 \text{ cm}^3.$$

$$\text{El volumen de refresco es: } 868,44 - 194,4 = 674,04 \text{ cm}^3 = 0,67404 \text{ litros.}$$

101

Hemos recibido el encargo de fabricar 25 m de tuberías por las que circularán 240 ℓ de agua y que tendrán un grosor de 2 mm. ¿Cuántas placas de plomo de 48,56 kg necesitaremos, si su densidad es 11,4 g/cm<sup>3</sup>?



$$\text{El volumen interior de la tubería es: } V = \pi \cdot r^2 \cdot 25.$$

$$\begin{aligned} V = \pi \cdot r^2 \cdot 250 \rightarrow 40 = \pi \cdot r^2 \cdot 250 \rightarrow \\ \rightarrow r = 0,30 \text{ dm} = 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

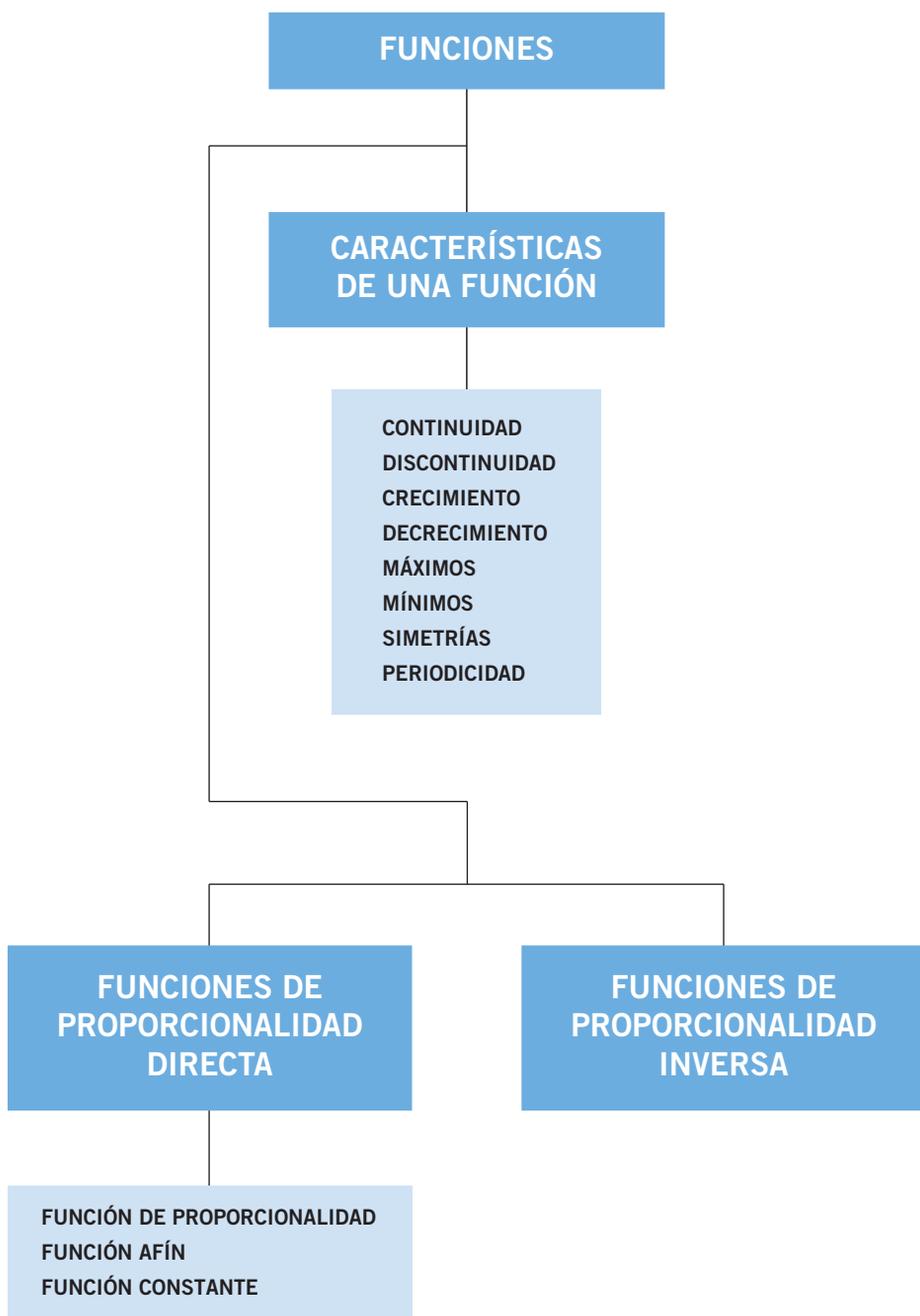
El volumen del material de la tubería es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 2.500 \cdot (R^2 - r^2) = \\ &= \pi \cdot 2.500 \cdot (5^2 - 3^2) = 125.600 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

El peso del plomo de la tubería es:

$$125.600 \cdot 11,4 = 1.431.840 \text{ g} = 1.431,84 \text{ kg}$$

$$\text{Por tanto, necesitaremos: } \frac{1.431,84}{48,56} = 29,49 \text{ placas de plomo.}$$

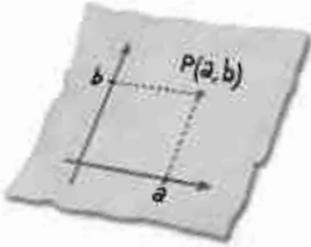


## El ingenio y la espada

René, un joven soldado, que en 1618 contaba con 22 años, paseaba por la ciudad de Breda sin rumbo fijo. Había decidido viajar para conocer el mundo y no se arrepentía lo más mínimo de haberlo hecho como soldado de fortuna. Podía alquilar su espada o su ingenio; nadie preguntaba por la espada y, sin embargo, se exigía prueba del ingenio.

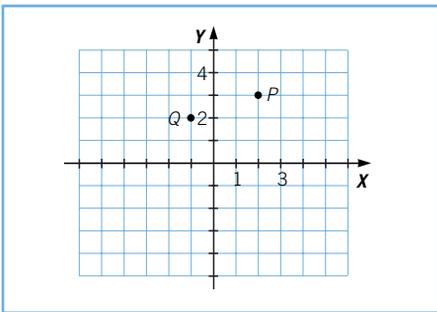
Al llegar a una plaza le llamó la atención un grupo de gente que se agolpaba frente una fachada, queriendo leer un cartel que había pegado en ella. La curiosidad pudo con él y, desconociendo el idioma, pidió que lo tradujeran al francés o al latín. Se encontró con un problema matemático por cuya resolución ofrecía una recompensa un tal Beeckman, científico de renombre en el país.

Al día siguiente se presentó en su casa con la solución al problema. Beeckman se sorprendió al ver al soldado; sin embargo, al leer la solución volvió a mirar al joven y ya no vio la espada, sino su enorme talento.



El joven era René Descartes y su ingenio le hizo inmortal. A él deben su nombre los diagramas cartesianos, donde sustituye cada punto del plano por un par de números que lo identifican.

En unos ejes cartesianos, señala los puntos P y Q cuyas coordenadas son  $P(2, 3)$  y  $Q(-1, 2)$ .

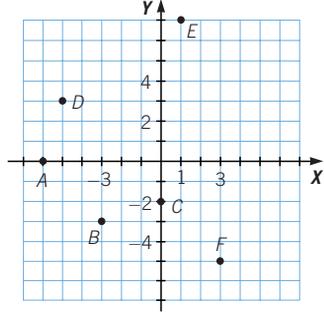


## EJERCICIOS

**001** Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Cuántos hay en cada cuadrante?

- $A(-6, 0)$        $D(-5, 3)$   
 $B(-3, -3)$        $E(1, 7)$   
 $C(0, -2)$        $F(3, -5)$

Primer cuadrante:  $E$ .  
Segundo cuadrante:  $D$ .  
Tercer cuadrante:  $B$ .  
Cuarto cuadrante:  $F$ .



**002** Dado el punto  $P(x, y)$ , con  $x > 0$  e  $y < 0$ , ¿en qué cuadrante estará representado? Pon un ejemplo.

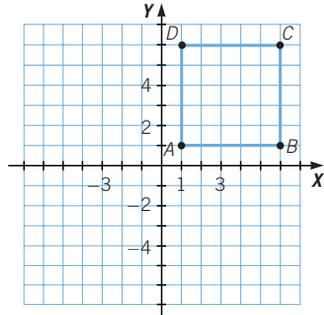
Los puntos de este tipo están en el cuarto cuadrante, por ejemplo  $(4, -3)$ .

**003** Representa en un sistema de coordenadas los puntos.

- $A(1, 1)$      $B(6, 1)$   
 $C(6, 6)$      $D(1, 6)$

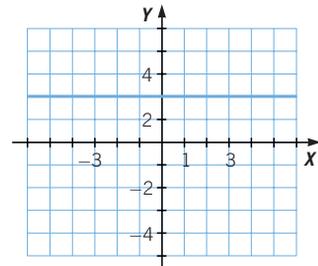
Une los puntos  $A, B, C$  y  $D$ .  
¿Qué figura has obtenido?

Se obtiene un cuadrado.



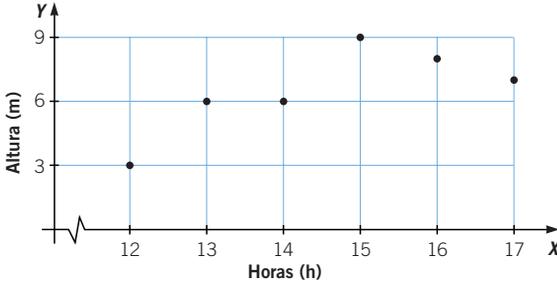
**004** Representa todos los puntos cuya ordenada sea 2. ¿Qué observas?

Es una recta horizontal.



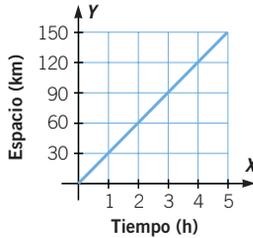
005 Estudia si estos valores son de una función.

Horas (h)	12	13	14	15	16	17
Altura (m)	3	6	6	9	8	7



Puede ser una función, porque a cada valor de  $x$  solo le corresponde un valor de  $y$ .

006 ¿Representa esta gráfica a una función?



Sí, porque a cada valor de  $x$  solo le corresponde un valor de  $y$ .

007 Cada kilo de fruta cuesta 2,50 €. En la función que asocia cada peso con su precio, halla las imágenes para 2, 4, 6, 8 y 10 kilos.

Peso (kg)	2	4	6	8	10
Precio (€)	5	10	15	20	25

008 Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no.

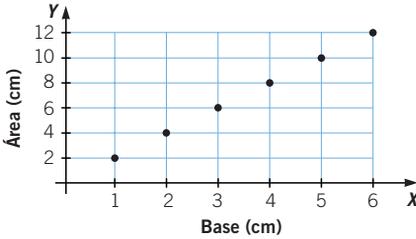
- Título de un libro y número de páginas.
- Velocidad y tiempo en recorrer un trayecto.
- Hora del día y longitud de una sombra.
  - No es una función.
  - Es una función.
  - Es una función.

# Funciones

**009** En esta tabla de valores se relaciona la base con el área de un rectángulo de altura 2 cm.

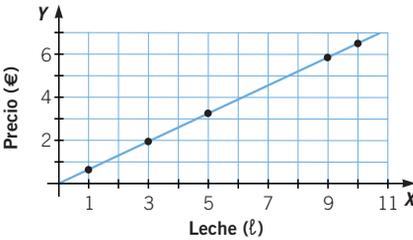
Base (cm)	1	2	3	4	5	6
Área (cm <sup>2</sup> )	2	4	6	8	10	12

Representa los valores gráficamente.

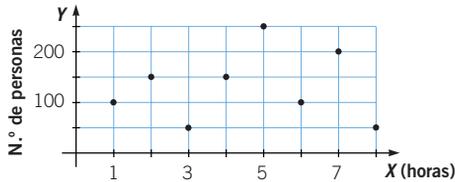


**010** Completa la tabla y representa la función que relaciona las magnitudes.

Leche (ℓ)	1	3	5	9	10
Precio (€)	0,65	1,95	3,25	5,85	6,50



**011** Esta gráfica relaciona las horas transcurridas desde la apertura de una exposición con el número de personas que asisten. Forma la tabla de valores correspondiente.



Horas	1	2	3	4	5	6	7	8
N.º de personas	100	150	50	150	250	100	200	50

**012** Pon un ejemplo de una función expresada mediante una tabla de valores y en cuya representación gráfica estén unidos sus puntos.

Por ejemplo, la función que relaciona el área de un cuadrado y su lado.

Lado	1	2	3	4	5	6	7	8
Área	1	4	9	16	25	36	49	64

**013** Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5:

a) Halla su expresión algebraica.      b) Calcula  $f(2)$  y  $f(0)$ .

$$a) y = \frac{x}{4} + 5$$

$$b) f(2) = \frac{2}{4} + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2} \qquad f(0) = \frac{0}{4} + 5 = 5$$

**014** Dada la función que asocia a cada número su triple menos 7 unidades:

a) Halla su expresión algebraica.      b) Calcula  $f(3)$  y  $f(5)$ .

$$a) y = 3x - 7$$

$$b) f(3) = 3 \cdot 3 - 7 = 9 - 7 = 2 \qquad f(5) = 3 \cdot 5 - 7 = 15 - 7 = 8$$

**015** Expresa la relación que existe entre el lado de un cuadrado y su área, mediante una expresión algebraica.

Si el lado es  $x$  y el área es  $y$ , la relación es  $y = x^2$ .

**016** La función que relaciona cada instante (tiempo) con su temperatura no tiene expresión algebraica. Razónalo. ¿Puedes poner otro ejemplo de función similar?

No tiene expresión algebraica, porque la temperatura no es predecible en función del tiempo.

Otro ejemplo sería la función que relaciona la edad con el peso de una persona.

**017** Determina si es continua la función que relaciona la edad con el peso de una persona. Algunos pares de valores vienen recogidos en la siguiente tabla.

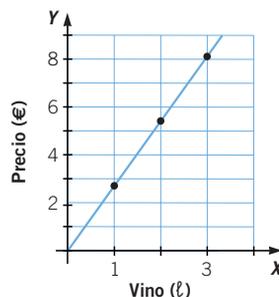
Edad (años)	0,5	1	2	5	8	11
Peso (kg)	5	6	9	15	21	34

Es una función continua, pues ambas variables lo son.

**018** En un almacén se vende el litro de vino a 2,70 €. Expresa esta situación con una función, dibuja la gráfica y determina si es continua.

La función es  $f(x) = 2,70x$ .

Es una función continua.



# Funciones

## 019 Pon un ejemplo de función continua y otro de discontinua.

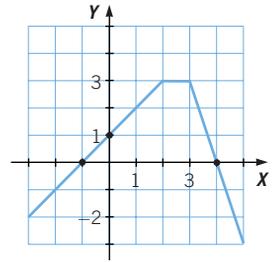
Ejemplo de función continua: el precio de la carne dependiendo de su peso.

Ejemplo de función discontinua: el coste de una llamada de teléfono dependiendo de su duración (si se tarifa por minutos).

## 020 Determina los puntos de corte con los ejes de esta función.

Puntos de corte con el eje  $X$ :  $(-1, 0)$  y  $(4, 0)$ .

Punto de corte con el eje  $Y$ :  $(0, 1)$ .



## 021 Representa la función $y = -2x + 2$ , y halla sus puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje de abscisas:

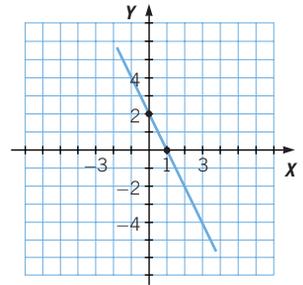
$$y = 0 \rightarrow 0 = -2x + 2 \rightarrow x = 1$$

La recta corta al eje  $X$  en el punto  $(1, 0)$ .

Con el eje de ordenadas:

$$x = 0 \rightarrow y = -2 \cdot 0 + 2 \rightarrow y = 2$$

La recta corta al eje  $Y$  en el punto  $(0, 2)$ .



## 022 Representa la función $y = -x$ . Halla los puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje de abscisas:

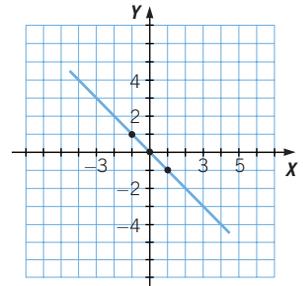
$$y = 0 \rightarrow 0 = -x \rightarrow x = 0$$

La recta corta al eje  $X$  en el punto  $(0, 0)$ .

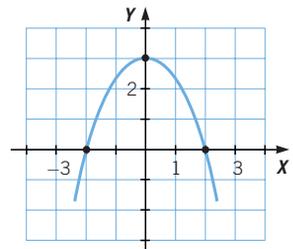
Con el eje de ordenadas:

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

La recta corta al eje  $Y$  en el punto  $(0, 0)$ .



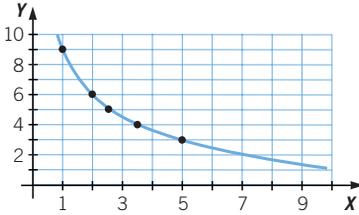
## 023 Dibuja la gráfica de una función continua que corte dos veces al eje $X$ y una vez al eje $Y$ .



**024** ¿Cuántos puntos de corte con el eje  $X$  tiene una función del tipo  $y = x + a$ ?  
¿ $Y$  con el eje  $Y$ ?

La función cortará una vez al eje  $X$  y otra vez al eje  $Y$ .

**025** Dibuja una gráfica que no tenga puntos de corte con los ejes.

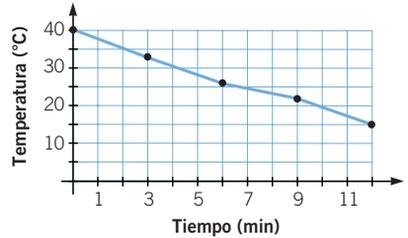


**026** Representa la evolución de la temperatura de una taza de café a lo largo del tiempo.

Tiempo (min)	0	3	6	9	12
Temperatura (°C)	40	33	26	22	15

Indica cuándo crece y decrece la función.

La función es siempre decreciente.



**027** Un globo aerostático registra la temperatura del aire en función de la altitud.

Altitud (km)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	16	6	2	-1	-4	-6

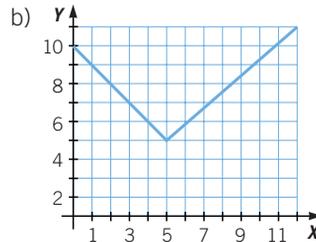
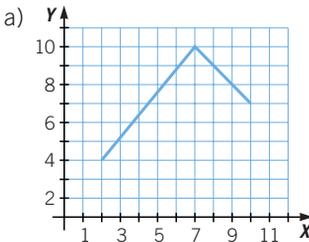
Estudia si es creciente o decreciente.

La función es siempre decreciente.

**028** Dibuja una función para cada una de las condiciones.

a) Crece de  $x = 2$  hasta  $x = 7$ , y decrece de  $x = 7$  hasta  $x = 10$ .

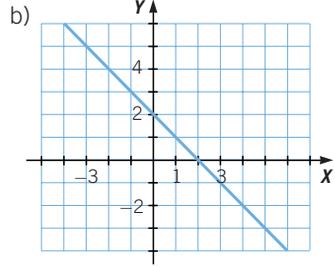
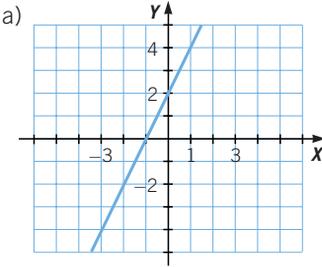
b) Decrece de  $x = 0$  hasta  $x = 5$ , y crece de  $x = 5$  hasta  $x = 12$ .



# Funciones

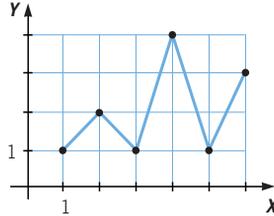
029 Representa la gráfica de una función que cumpla que:

- a) Siempre sea creciente.
- b) Siempre sea decreciente.



030 Indica los máximos y los mínimos de la siguiente gráfica.

Máximos: (2, 2) y (5, 4).  
Mínimos: (3, 1) y (5, 1).



031 Los datos de la tabla muestran la velocidad de un motorista en función del tiempo transcurrido.

Tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
Velocidad (km/h)	0	45	90	45	60	30

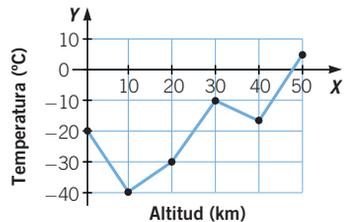
Encuentra sus máximos y mínimos.

Máximos: (10, 90) y (20, 60).  
Mínimo: (15, 45).

032 Representa gráficamente los datos de esta tabla, y encuentra sus extremos.

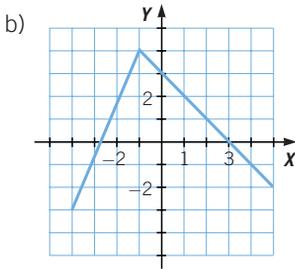
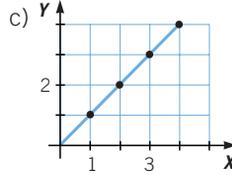
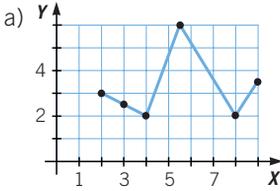
Altitud (km)	0	10	20	30	40	50
Temperatura (°C)	-20	-40	-30	-10	-18	5

Mínimos relativos: (10, -40) y (40, -18).  
Máximo relativo: (30, -10).



033 Dibuja la representación gráfica de una función que tenga:

- a) Un máximo y dos mínimos.                      c) Ningún máximo ni mínimo.  
 b) Un máximo y ningún mínimo.



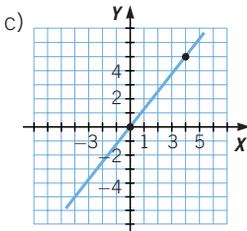
034 Un litro de un refresco cuesta 1,25 €.

- a) Haz una tabla que relacione el precio en función de los litros.  
 b) Averigua la expresión algebraica de la función.  
 c) Representa gráficamente la función.

a)

N.º de litros	1	2	3	4	5	6
Precio (€)	1,25	2,50	3,75	5	6,25	7,50

b)  $\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{5}{4}x$



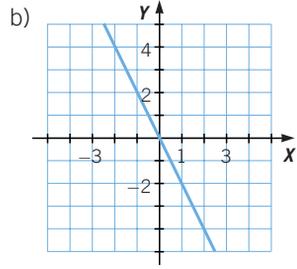
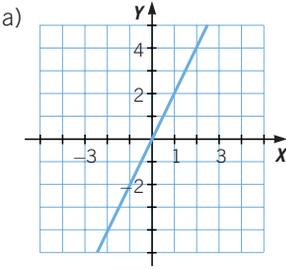
035 Queremos colocar un tendido eléctrico y cada metro de cable pesa 3 kg. Averigua la expresión algebraica de la función.

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6
Peso (kg)	3	6	9	12	15	18

$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 3x$

# Funciones

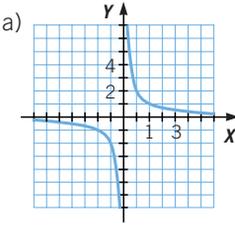
**036** Representa las funciones  $y = 2x$ ,  $y = -2x$ . Estudia y compara su crecimiento.



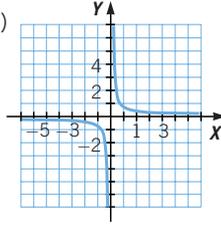
La función  $y = 2x$  es creciente y la función  $y = -2x$  es decreciente, y ambas son funciones de proporcionalidad directa.

**037** Representa las siguientes funciones.

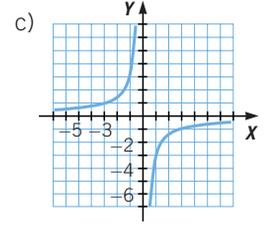
a)  $y = \frac{2}{x}$



b)  $y = \frac{20}{x}$



c)  $y = -\frac{3}{x}$



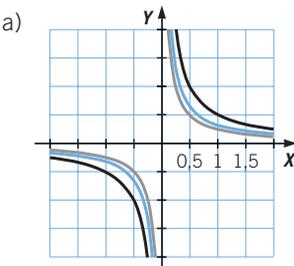
**038** En un trayecto, a una velocidad de 2 km/h, tardo 1,5 h. ¿Cuánto tardaré a 15 km/h?

Velocidad	Tiempo	
2	→ 1,5	} → $x \cdot 15 = 2 \cdot 1,5 \rightarrow x = 0,2 \text{ h} = 12 \text{ min}$
15	→ x	

**039** Dadas las funciones:  $y = \frac{1}{2x}$        $y = \frac{1}{3x}$        $y = \frac{1}{4x}$

a) Representa estas funciones en unos mismos ejes.

b) ¿Qué gráfica está por encima de las otras?



—  $y = \frac{1}{2x}$   
 —  $y = \frac{1}{3x}$   
 —  $y = \frac{1}{4x}$

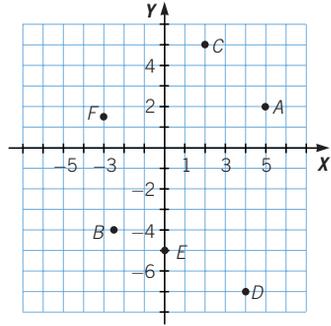
b) La gráfica que está por encima de las otras es

$y = \frac{1}{2x}$ .

**ACTIVIDADES**

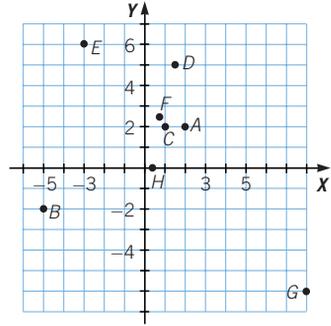
040 Dibuja unos ejes cartesianos en un papel cuadrulado y representa estos puntos.

- $A(5, 2)$                        $D(4, -7)$
- $B\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$              $E(0, -5)$
- $C(2, 5)$                          $F\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

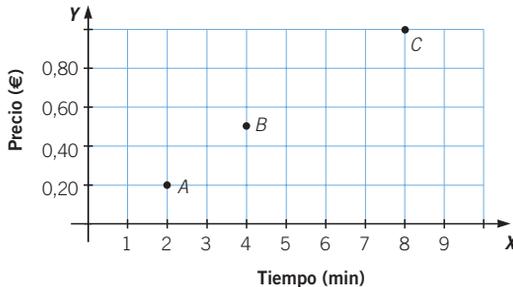


041 Representa en los ejes de coordenadas cartesianas los siguientes puntos.

- $A(2, 2)$                          $E(-3, 6)$
- $B(-5, -2)$                      $F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$
- $C(1, 2)$                          $G(8, -6)$
- $D\left(\frac{3}{2}, 5\right)$                  $H\left(\frac{2}{5}, 0\right)$



042 La gráfica relaciona el tiempo de una llamada telefónica con su precio. Di el precio y el tiempo de las llamadas A, B y C.



a) ¿Qué unidad tomamos en cada eje?

b) Halla la tabla de valores que relaciona ambas magnitudes.

a) En el eje de abscisas, la unidad es 1 minuto. Y en el eje de ordenadas, la unidad es 0,20 €.

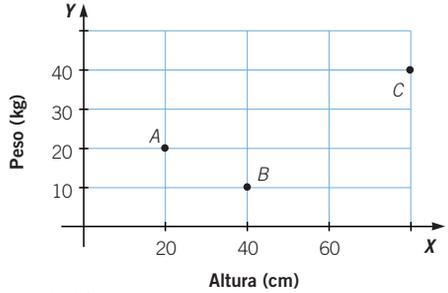
b)

Tiempo (min)	2	4	8
Precio (€)	0,20	0,50	1

# Funciones

**043** A partir de la gráfica, di si las siguientes afirmaciones son ciertas.

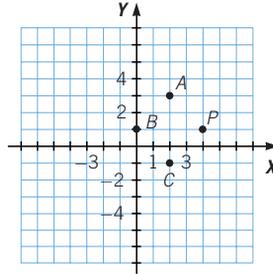
- a) *B* pesa más que *C*.
- b) *C* es el más alto y el que pesa más.
- c) *B* es el más bajo y el menos pesado.



Solo es cierta la afirmación del apartado b).

**044** Representa en unos ejes cartesianos los puntos *A*(2, 3), *B*(0, 1) y *C*(2, -1). Halla las coordenadas de otro punto que, junto con ellos, forme los vértices de un cuadrado.

El nuevo punto tiene de coordenadas *P*(4, 1).



**045** Indica si estas relaciones son funciones.

- a) A cada número natural le asociamos sus divisores.
- b) A cada número natural le hacemos corresponder su doble más 3.
  - a) No es una función, pues un número natural puede tener más de un divisor.
  - b) Es una función.

**046** El precio del kilogramo de cerezas es 2,75 €.

- a) Haz una tabla de valores donde figuren el peso y el precio.
- b) Define la variable independiente y la variable dependiente.
- c) Obtén su expresión algebraica.
- d) Evalúa si es o no una función.

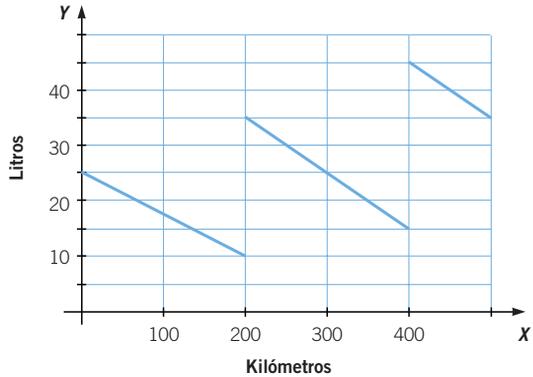
a)

<b>Peso (kg)</b>	1	2	4	6
<b>Precio (€)</b>	2,75	5,50	11	16,50

- b) La variable independiente es el peso y la dependiente es el precio.
- c) La expresión algebraica es  $y = 2,75x$ .
- d) Es una función, pues a cada valor del peso solo le corresponde un precio.

047

La gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en un depósito durante un viaje.



a) ¿Cuántos litros hay en el depósito en el momento de la salida?  
¿Y en la llegada?

b) ¿En qué kilómetros se repostó gasolina?

c) ¿Cuántos litros se repostaron durante el viaje?

d) Identifica la variable dependiente e independiente.

a) Hay 25 litros en la salida y 35 litros en la llegada.

b) Se repostó gasolina en los kilómetros 250 y 450.

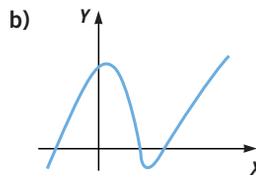
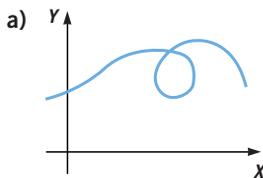
c) Se repostaron 55 litros en total: 25 litros la primera vez y 30 litros la segunda.

d) La variable independiente es los kilómetros recorridos, y la variable dependiente es los litros de gasolina.

048

Indica cuáles de las siguientes gráficas pertenecen a una función.

●



a) No es una función. Existen puntos con la misma abscisa y con dos valores diferentes en las ordenadas.

b) Es una función. Cada punto tiene una única ordenada para cada valor de abscisa.

049

Si en una cafetería hemos pagado 15 € por 6 cafés:

●●

a) Haz una tabla de valores donde figuren el número de cafés y el precio.

b) Señala cuál es cada variable.

a)

N.º de cafés	1	2	4	6
Precio (€)	2,50	5	10	15

b) La variable independiente es el número de cafés y la dependiente es el precio.

# Funciones

**050** Expresa estas relaciones mediante una tabla de 5 valores como mínimo.

- a) Un número y su mitad.
- b) El lado de un cuadrado y su área.
- c) Un número y su inverso.
- d) Un número y su triple.

a) 

<b>x</b>	2	4	6	8	10
<b>y</b>	1	2	3	4	5

b) 

<b>x</b>	1	2	3	4	5
<b>y</b>	1	4	9	16	25

c) 

<b>x</b>	1	2	3	4	5
<b>y</b>	1	1/2	1/3	1/4	1/5

d) 

<b>x</b>	1	2	3	4	5	6
<b>y</b>	3	6	9	12	15	18

**051** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXPRESAN ALGEBRAICAMENTE ALGUNAS RELACIONES NUMÉRICAS?

¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona un número entero con su cuadrado?

PRIMERO. Se estudia la tabla de valores.

<b>Número</b>	1	2	3	4	5	6	7	...
<b>Cuadrado</b>	1	4	9	16	25	36	49	...

SEGUNDO. Se escribe de forma algebraica el resultado.

$$x \rightarrow y = x^2$$

Dando un valor a la variable independiente,  $x$ , obtenemos el cuadrado de ese valor, que es la variable dependiente,  $y$ .

**052** Dada la función que asocia a cada número su mitad más 2 unidades:

- a) Construye una tabla de valores.
- b) Encuentra su expresión algebraica.
- c) Halla  $f(-5)$  y  $f(4)$ .

a) 

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	1	1,5	2	2,5	3

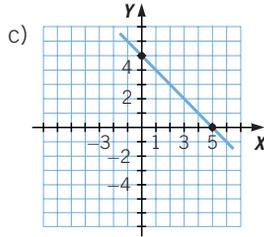
b) La expresión algebraica de la función es  $y = \frac{x}{2} + 2$ .

c)  $f(-5) = \frac{-5}{2} + 2 = -0,5$        $f(4) = \frac{4}{2} + 2 = 4$

**053** Dada la función que asocia a cada número su opuesto más 5:

- a) Halla su expresión algebraica.
- b) Calcula  $f(2)$  y  $f(-2)$ .
- c) Representa la función.

a)  $f(x) = -x + 5$   
 b)  $f(2) = -(2) + 5 = -2 + 5 = 3$   
 $f(-2) = -(-2) + 5 = 2 + 5 = 7$



**054** Escribe la expresión algebraica.

- a) A cada número le asignamos su quinta parte.
- b) A cada número le hacemos corresponder el cubo de su doble.
- c) A cada número se le asocia el cuadrado de su tercera parte.

a)  $y = \frac{x}{5}$       b)  $y = (2x)^3$       c)  $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

**055** En cada apartado se describe la relación entre dos magnitudes.

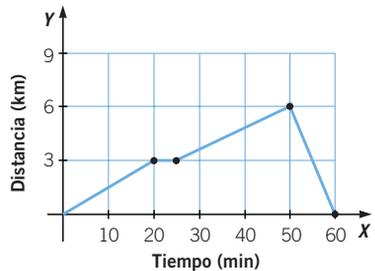
Expresa esta relación mediante una expresión algebraica definiendo, previamente, las variables  $x$  e  $y$ .

- a) El precio del kilo de café es 12,40 €.
- b) El precio de los artículos de una tienda está rebajado en un 30 %.
- c) El valor de un coche se deprecia un 10 % cada año.
- d) La distancia recorrida por un ciclista que circula a 20 km/h.

a)  $x = \text{kilos de café}$  e  $y = \text{precio} \rightarrow y = 12,40x$   
 b)  $x = \text{precio original}$  e  $y = \text{precio rebajado} \rightarrow y = \frac{70x}{100}$   
 c)  $x = \text{antigüedad del coche}$  e  $y = \text{depreciación} \rightarrow y = 10x$   
 d)  $x = \text{distancia recorrida}$  e  $y = \text{tiempo} \rightarrow y = 20x$

**056** La siguiente gráfica expresa la relación entre el tiempo (en minutos) y el espacio (en kilómetros) recorrido por una persona durante una hora.

- a) Exprésalo en una tabla de valores.
- b) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?
- c) ¿Cuánto tiempo ha estado parada?
- d) ¿Y cuánto tiempo ha caminado?



a)

Tiempo (min)	0	20	25	50	60
Distancia (km)	0	3	3	6	0

b) Ha recorrido 12 km.

c) 5 minutos.

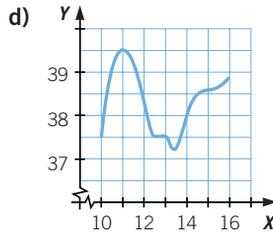
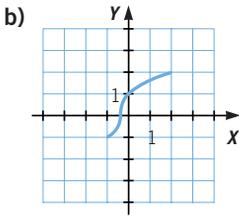
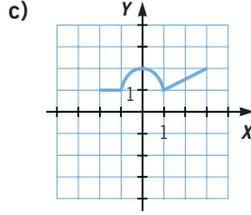
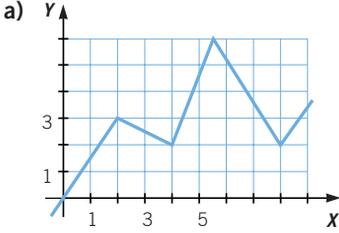
d) 55 minutos.

# Funciones

057



Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las gráficas de las siguientes funciones.

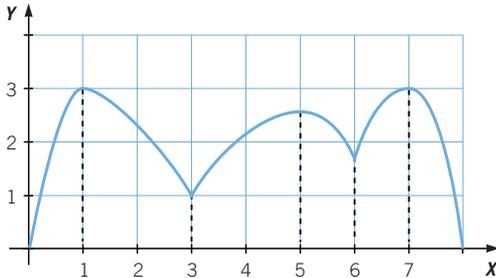


- a) Crece desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$ , desde  $x = 4$  hasta  $x = 5,5$  y desde  $x = 8$  hasta  $x = 9$ .  
 Decrece desde  $x = 2$  hasta  $x = 4$  y desde  $x = 5,5$  hasta  $x = 8$ .
- b) Crece desde  $x = -1$  hasta  $x = 2$ .  
 Nunca decrece.
- c) Crece desde  $x = -1$  hasta  $x = 0$  y desde  $x = 1$  hasta  $x = 3$ .  
 Decrece desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$ .
- d) Crece desde  $x = 10$  hasta  $x = 11$  y desde  $x = 13,5$  hasta  $x = 16$ .  
 Decrece desde  $x = 11$  hasta  $x = 13,5$ .

058



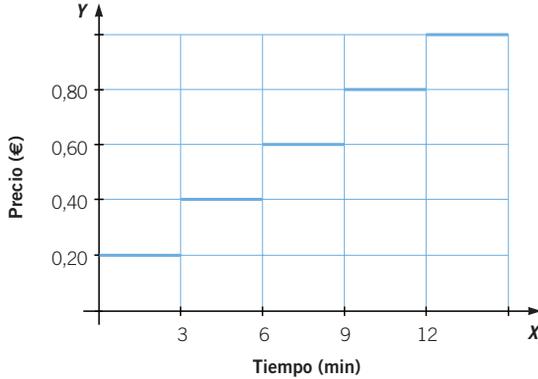
Indica los máximos y mínimos.



Los máximos son:  $(1, 3)$ ,  $(5, 2,5)$  y  $(7, 3)$ .

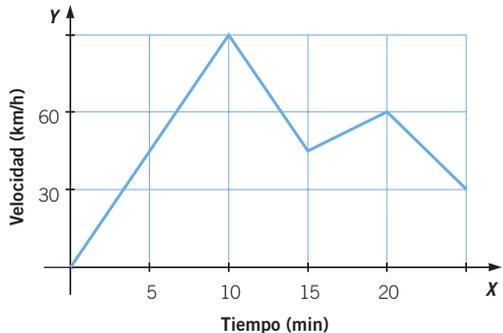
Los mínimos son:  $(3, 1)$  y  $(6, 1,75)$ .

- 059** La gráfica muestra el precio de una llamada telefónica con un determinado contrato.



- Identifica las variables. ¿Es una función?
  - Averigua si es una función creciente o decreciente.
  - ¿Tiene máximos y mínimos?
  - ¿Cuánto costará una llamada de 8 minutos? ¿Y una de 7 minutos? ¿Y una de 2 minutos?
  - Si solo quiero gastar 1 €, ¿cuánto tiempo podré hablar?
  - ¿Es una función continua?
- La variable dependiente es el tiempo y la independiente es el precio. Es una función.
  - Es una función constante a intervalos (escalonada) y creciente en los puntos de salto.
  - No tiene máximos ni mínimos.
  - Una llamada de 8 minutos costará 0,60 €; una de 7 minutos, 0,60 €, y otra de 2 minutos, 0,20 €.
  - Con 1 € podré hablar durante 15 minutos.
  - No es una función continua.

- 060** La velocidad de un motorista varía según se indica en la gráfica.

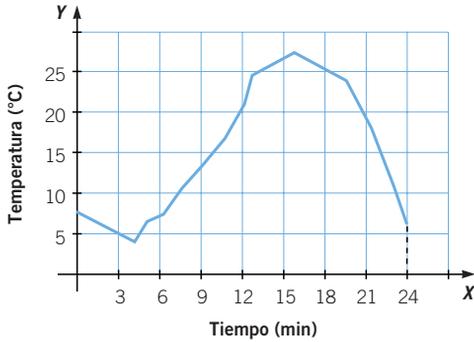


- Indica los tramos donde la función crece.
- Indica los tramos donde la función decrece.
- Halla los máximos absolutos y relativos.
- ¿Cuáles son los mínimos absolutos o relativos?
- ¿Es una función continua?

# Funciones

- a) Crece desde  $x = 0$  hasta  $x = 10$  y desde  $x = 15$  hasta  $x = 20$ .
- b) Decrece desde  $x = 10$  hasta  $x = 15$  y desde  $x = 20$  hasta  $x = 25$ .
- c) Los máximos relativos son:  $(10, 90)$  y  $(20, 60)$ , y el máximo absoluto es:  $(10, 90)$ .
- d) Hay un mínimo relativo en  $(15, 45)$  y un mínimo absoluto en  $(0, 0)$ .
- e) Es una función continua.

**061** La gráfica muestra la temperatura de una ciudad durante 24 horas seguidas.



**Analiza su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.**

La temperatura decrece desde las 0 hasta las 4 horas y desde las 16 hasta las 24 horas.

La temperatura crece desde las 4 hasta las 16 horas.

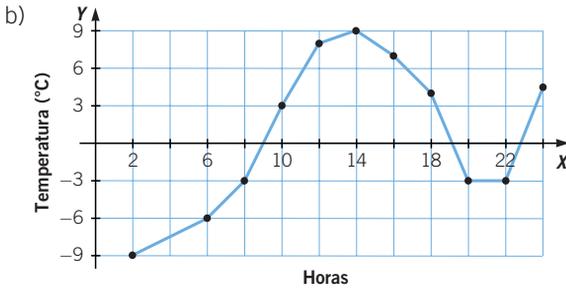
La temperatura mínima se da a las 4 horas con  $4^\circ\text{C}$  y la máxima a las 16 horas con  $27^\circ\text{C}$ .

**062** Esta tabla muestra las temperaturas de una localidad a lo largo de un día.

Horas	2	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura ( $^\circ\text{C}$ )	-9	-6	-3	3	8	9	7	4	-3	-3	-5

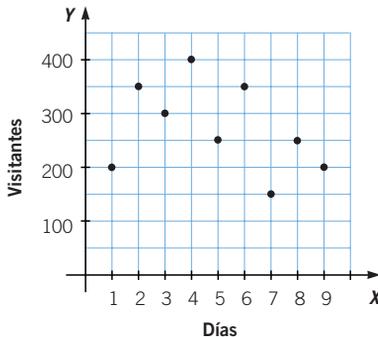
- a) Identifica las variables.
- b) Representa la gráfica.
- c) Halla los máximos relativos.
- d) Halla los mínimos relativos.
- e) ¿Es una función continua?
- f) ¿Durante cuántas horas la temperatura ha superado los  $0^\circ\text{C}$ ?
- g) ¿A qué hora se midió la temperatura mínima? ¿Y máxima?
- h) ¿A qué horas la temperatura fue de  $0^\circ\text{C}$ ?

a) La variable independiente es la hora del día y la dependiente es la temperatura.



- c) Hay un máximo relativo en  $(14, 9)$ .  
 d) Hay un mínimo relativo en  $(20, -9)$ .  
 e) Es una función continua.  
 f) La temperatura ha estado por debajo de  $0^\circ\text{C}$  desde las 2 hasta las 9 horas, y desde las 19 hasta las 23 horas; en total, 11 horas.  
 g) La temperatura mínima se midió a las 2 horas y la máxima a las 14 horas.  
 h) A las 9, 19 y 23 horas, respectivamente.

**063** La gráfica registra el número de visitantes a un museo durante 9 días.  
 ●● Señala cuáles de las afirmaciones son verdaderas.



- a) Hay un máximo en  $x = 4$ , porque el cuarto día se registró el mayor número de visitantes.  
 b) El número de visitantes fue distinto cada día.  
 c) Acudieron 250 visitantes en dos días.  
 d) Los últimos cinco días hubo en total más visitantes que en los cuatro primeros días.
- a) Verdadera.  
 b) Falsa, pues hay varios días en los que coincidió el número de visitantes.  
 c) Verdadera.  
 d) Falsa, ya que los cuatro primeros días acudieron 1.250 visitantes y los cinco últimos días acudieron 1.200 visitantes.

# Funciones

064

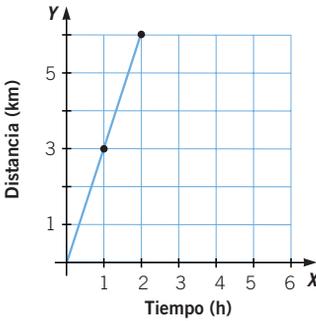
Elena sale del kilómetro 0 de una carrera con una velocidad de 3 km/h.



- a) Completa la siguiente tabla y dibuja su gráfica.
- b) Halla la expresión algebraica de esta función.
- c) En el momento en que pasa por el kilómetro 11, ¿cuánto tiempo hace que ha salido?

a)

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Distancia al km 0	0	3	6	9	12	15



- b)  $y = 3x$
- c)  $y = 3x \rightarrow 11 = 3x \rightarrow x = \frac{11}{3} = 3 \text{ h } 40 \text{ min}$

065

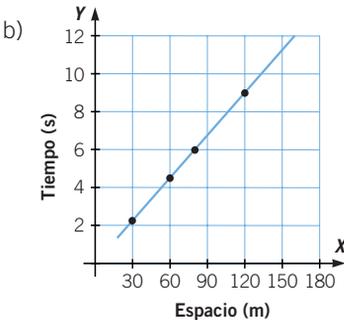
Los datos de la tabla son medidas de espacios y tiempos que se tardan en recorrerlos.



- a) Completa los datos de la tabla.
- b) Representa los datos gráficamente.
- c) Halla la expresión algebraica de esta función.

a) Se trata de una función de proporcionalidad directa.

Espacio (m)	120	30	60	80
Tiempo (s)	9	2,25	4,5	6



c)  $y = \frac{9}{120}x \rightarrow y = \frac{3}{40}x$

## 066 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DETERMINA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA CONOCIENDO UN PUNTO QUE LE PERTENECE?

Determina la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto  $(2, -2)$ .

**PRIMERO.** En la ecuación  $y = mx$ , se sustituye  $x$  por la primera coordenada e  $y$  por la segunda.

$$y = mx \xrightarrow{x=2, y=-2} -2 = m \cdot 2$$

**SEGUNDO.** Se calcula  $m$ .

$$-2 = 2m \rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

Por tanto, la ecuación de la función es  $y = -x$ .

## 067 Determina la ecuación y representa la función que verifica estas dos condiciones.

a) Es una función de proporcionalidad directa.

b)  $f(3) = 1$

$$y = \frac{x}{3}$$

## 068 Determina la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por:

a)  $(1, -1)$       b)  $(3, -4)$       c)  $(-2, -1)$

¿Pasa alguna de estas funciones por el punto  $(7, 2)$ ? ¿Y por el punto  $(0, -2)$ ?

a)  $y = -x$       b)  $y = -\frac{4x}{3}$       c)  $y = 2x$

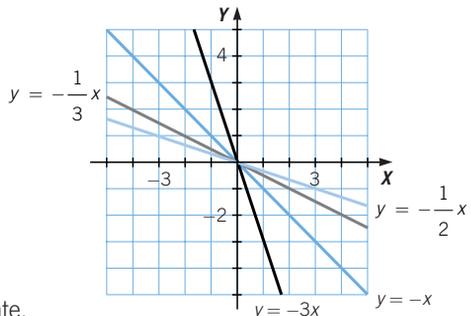
Ninguna de las funciones pasa por  $(7, 2)$  ni por  $(0, -2)$ .

## 069 Representa en unos mismos ejes de coordenadas estas funciones.

Explica las diferencias que encuentres entre ellas.

a)  $y = -x$       c)  $y = -3x$

b)  $y = -\frac{1}{2}x$       d)  $y = -\frac{1}{3}x$



La diferencia está en la pendiente.

# Funciones

070

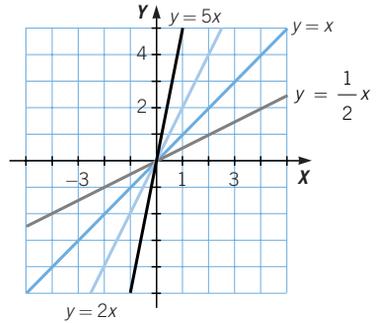


Representa en unos mismos ejes de coordenadas estas funciones.

Explica las diferencias que encuentres entre ellas.

a)  $y = x$       c)  $y = 2x$

b)  $y = \frac{1}{2}x$       d)  $y = 5x$



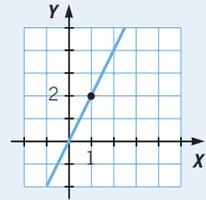
La diferencia está en la pendiente.

071

**HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA CONOCIENDO SU GRÁFICA?

Determina la ecuación de esta función.



**PRIMERO.** Si la función es una recta y pasa por el origen de coordenadas, es una función de proporcionalidad directa y, por tanto, su ecuación es del tipo  $y = mx$ .

**SEGUNDO.** Se determina un punto por el que pasa.

La gráfica pasa por  $(1, 2)$ .

**TERCERO.** Se calcula  $m$ .

$$y = mx \xrightarrow{x=1, y=2} 2 = m \cdot 1 \rightarrow m = 2$$

Por tanto, la ecuación de la función es  $y = 2x$ .

072



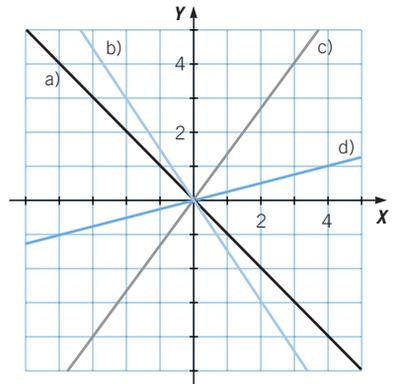
Determina las ecuaciones de estas funciones.

a)  $y = -x$

b)  $y = -\frac{3}{2}x$

c)  $y = \frac{4}{3}x$

d)  $y = \frac{1}{4}x$



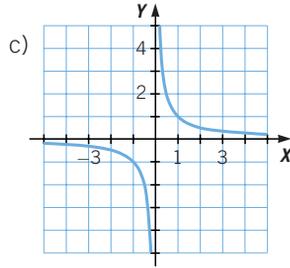
073 La siguiente tabla corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

- a) Completa la tabla.
- b) Escribe la expresión algebraica de la función.
- c) Representa la función.

a)

x	1	2	3	4	5	...
y	2	1/2	1/3	1/4	1/5	...

b)  $y = \frac{1}{x}$



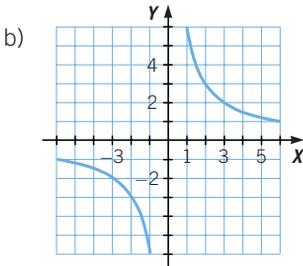
074 La relación entre dos números positivos viene establecida por la siguiente tabla.

x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2	...
y	300	60	30	12	6	3	...

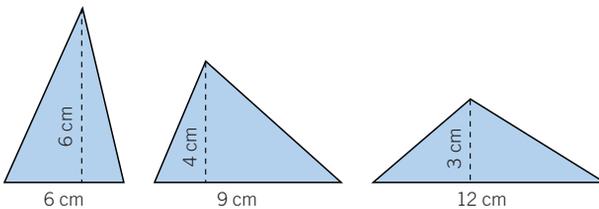
- a) ¿Cuál es la expresión algebraica de esta relación?
- b) Representala gráficamente.
- c) Da valores a x muy próximos a cero. ¿Qué ocurre con los valores de y?

a)  $y = \frac{6}{x}$

c) Los valores de y crecen rápidamente cuando x se aproxima a cero.



075 El área de un triángulo es 18 cm<sup>2</sup>. Construye una tabla con diferentes valores de la base y la altura, y representa la función que nos da la altura en función de la base.

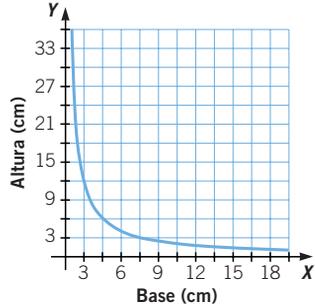


Determina la expresión algebraica que relaciona esos valores y representala gráficamente.

# Funciones

Base	1	2	3	4	6	9	12	36	18
Altura	36	18	12	9	6	4	3	1	2

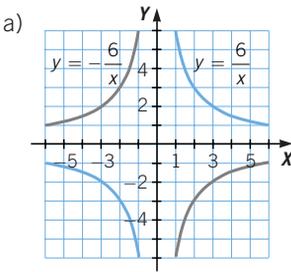
La expresión algebraica es  $y = \frac{36}{x}$ .



076

Dadas las funciones  $y = \frac{6}{x}$  e  $y = -\frac{6}{x}$ .

- Representálas gráficamente.
- Escribe las características que las diferencian.



- b) Son gráficas simétricas respecto de los dos ejes, siendo una positiva y la otra negativa.

077

Dada la función  $y = -\frac{5}{x}$ :

- ¿Para qué valores es decreciente la función?
- ¿Tiene máximos o mínimos?
- Haz una tabla de valores, dando valores a  $x$  de  $-1$  a  $0$  y de  $1$  a  $0$ , y tomando valores cada vez más cercanos a  $0$ . ¿A qué valores se acerca la función?

- La función nunca es decreciente, excepto en  $x = 0$ .
- No tiene máximos ni mínimos.

c)

$x$	-1	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	1
$y$	5	10	50	500	5.000	-5.000	-500	-50	-10	-5

Cuando la función se acerca a cero por la izquierda se aproxima a  $-\infty$ , y cuando lo hace por la derecha se aproxima a  $\infty$ .

078

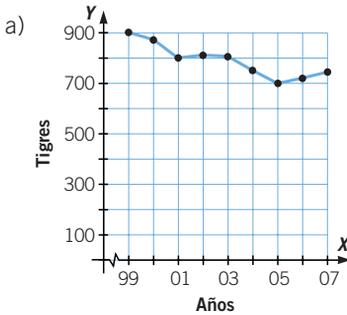
La siguiente tabla publicada por una ONG dedicada a la conservación de las especies, representa la población de tigres de Bengala en la India desde 1999 a 2007.

Año	99	00	01	02	03	04	05	06	07
Tigres	900	870	800	810	805	750	700	720	750



a) Representa los pares de valores gráficamente.

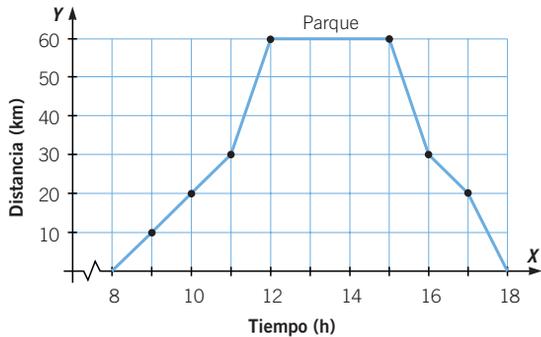
b) Interpreta los resultados obtenidos.



b) El número de tigres ha disminuido en los períodos 1999-2001 y 2002-2006, incrementándose en 2001-2002 y 2005-2007.

079

Hacemos una excursión en bicicleta a un parque situado a 60 km. Para llegar hay que recorrer un camino con subidas y bajadas. Después, descansamos y regresamos.



a) ¿Qué significado tienen los números situados en el eje de abscisas?  
¿Y los del eje de ordenadas?

b) ¿A qué hora salimos?

c) ¿Cuántos kilómetros hay desde el comienzo de la primera cuesta hasta la cima?

d) ¿Cuánto tiempo tardamos en subirla? ¿Y en bajarla?

e) ¿Cuánto tiempo estamos en el parque?

f) ¿Cómo es el camino de regreso?

g) ¿En qué tramo crece la función? ¿Dónde decrece?

h) ¿Es una función continua?

a) Los números del eje de abscisas son las horas que han transcurrido y los que están en el eje de ordenadas indican los kilómetros recorridos.

b) Salimos a las 8 horas.

c) Hay 60 km.

d) Tardamos 4 horas en subirla y 3 horas en bajarla.

e) Estamos 3 horas.

f) Tiene un primer tramo de 30 km de pendiente más favorable, otro de llano o pendiente desfavorable de 10 km y los últimos 20 km son también favorables.

g) Crece de 8 a 12 horas y decrece de 15 a 18 horas.

h) Es continua.

# Funciones

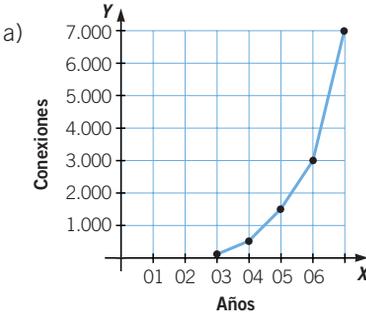
080



Se ha hecho un estudio en una ciudad del número de familias que se conectan a Internet cada año.

Años	03	04	05	06	07
N.º de conexiones	100	500	1.500	3.000	7.000

- a) Representa los pares de valores gráficamente.  
b) Interpreta los resultados.

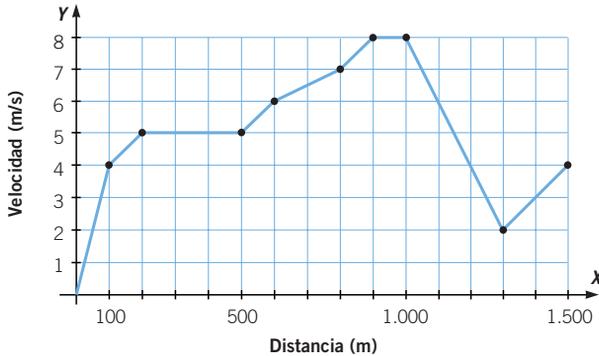


- b) Cada año se conecta a Internet un mayor número de familias, ya que al menos se duplica cada año.

081



La siguiente gráfica muestra la variación de la velocidad de un atleta en una carrera de 1.500 m.



- a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?  
b) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?  
c) ¿En qué momentos de la carrera su velocidad es de 6 m/s?  
d) ¿Cuándo crece la velocidad?  
e) ¿Y cuándo decrece?  
f) ¿En qué momentos mantiene constante la velocidad?  
g) ¿Es una función continua?  
h) ¿Cuál es la velocidad máxima?  
i) ¿Tiene algún mínimo relativo esta función?  
j) ¿Qué velocidad lleva a los 300 m?

- a) La variable independiente es la distancia recorrida, y se encuentra en el eje de abscisas.
- b) La variable dependiente es la velocidad, depende de la distancia recorrida y está en el eje de ordenadas.
- c) La velocidad es de 6 m/s a los 600 m y a los 1.100 m.
- d) Crece de 0 a 200 m, de 500 a 900 m y de 1.300 a 1.500 m.
- e) Decece de 1.000 a 1.300 m.
- f) Es constante desde 200 hasta 500 m, con una velocidad de 5 m/s, y desde 900 hasta 1.000 m, con una velocidad de 8 m/s.
- g) Sí, es continua.
- h) Su velocidad máxima es de 8 m/s.
- i) Sí, tiene un mínimo en  $x = 1.300 \rightarrow m_1 = (1.300, 2)$ .
- j) 5 m/s

El corredor comenzó aumentando su velocidad rápidamente hasta 4 m/s, y después aumentó más lentamente hasta alcanzar 5 m/s. Durante 300 m mantuvo esta velocidad constante, y luego volvió a aumentar la velocidad progresivamente, hasta alcanzar 8 m/s a 900 m de la salida. Mantuvo esta velocidad durante 100 m, pero después su velocidad disminuyó hasta 2 m/s en los siguientes 300 m. Finalmente, en los últimos 200 m aumentó la velocidad hasta alcanzar 4 m/s y terminó la carrera.

082

Queremos construir un depósito prismático con estas medidas.

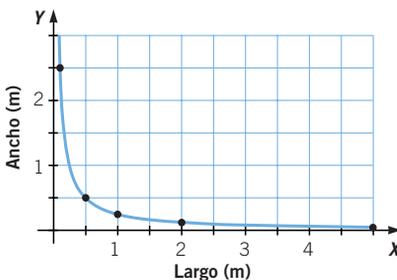
- a) Haz una tabla con los diferentes valores de las dimensiones que puede tener.
- b) Escribe la función correspondiente y represéntala.



a)

Largo (m)	0,1	0,5	1	2	5
Ancho (m)	2,5	0,5	0,25	0,125	0,05

b)  $y = \frac{0,250}{x}$



# Funciones

083



Los alumnos de 2.º ESO quieren ir de viaje de estudios. Para obtener fondos acuerdan vender polvorones. Deciden comprar 360 cajas que venderán entre todos los que vayan de viaje.

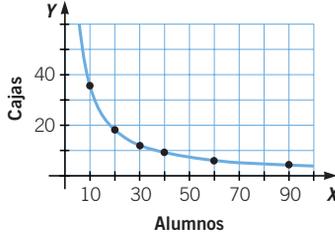


- Haz una tabla que relacione el número de alumnos que van a viajar con el número de cajas que ha de vender cada uno.
- Escribe su expresión algebraica y representa la función.
- Comprueba que el producto del número de alumnos por el de cajas es constante. ¿Qué significado tiene?

a)

N.º de alumnos	10	20	30	40	60	90
N.º de cajas por alumno	36	18	12	9	6	4

b)  $y = \frac{360}{x}$



- c) Esto significa que las dos variables están en proporcionalidad inversa.

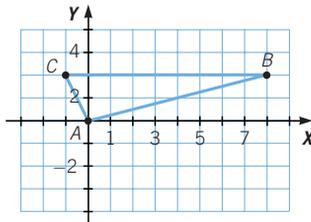
084



Un triángulo tiene por vértices los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(8, 2)$  y  $C(-1, 2)$ .  
Calcula el área de este triángulo.

Tomando el lado  $BC$  como base, la altura será el eje de ordenadas, por lo que la base mide 9 u y la altura 2 u.

El área es:  $A = \frac{9 \cdot 2}{2} = 9 \text{ u}^2$ .



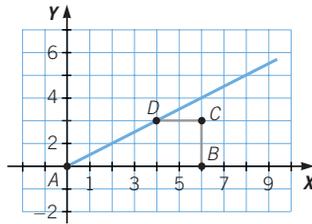
- 085** Un trapecio, de lados paralelos  $AB$  y  $CD$ , tiene por vértices los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $C(6, 2)$  y  $D$ . Calcula la ecuación de la función que determina el lado  $AD$  para que el área del trapecio sea  $8 \text{ u}^2$ .

El lado  $AB$  es una de las bases que mide 6 u.

La altura es  $BC$  y mide 2 u.

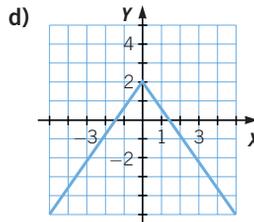
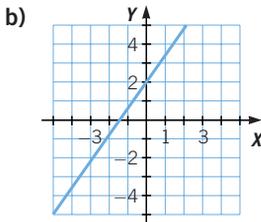
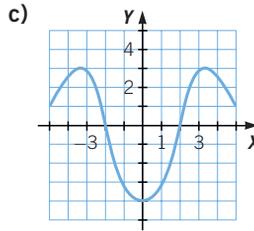
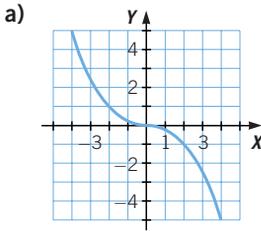
$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h \rightarrow 8 = \frac{6 + b}{2} \cdot 2 \rightarrow b = 2 \rightarrow D(4, 2)$$

Por tanto, la recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(4, 2)$  es  $y = 2x$ .



- 086** Se dice que una función es par si  $f(x) = f(-x)$  para cualquier valor de  $x$ , y que es impar si  $-f(x) = f(-x)$  para cualquier valor de  $x$ .

Determina si estas funciones son pares, impares o no son pares ni impares.



- a) Es impar.  
 b) Es par.  
 c) No es par ni impar.  
 d) Es par.

## EN LA VIDA COTIDIANA

087



El tamaño de un televisor se suele expresar en pulgadas. La pulgada es una unidad de medida del sistema anglosajón cuya equivalencia es 1 pulgada = 2,54 cm.

Un televisor de 24 pulgadas tiene:

- Una diagonal de:  $d = 24 \cdot 2,54 = 60,96$  cm.
- Una base de:  $b = \frac{7,62 \cdot p}{5} = \frac{7,62 \cdot 24}{5} = 36,58$  cm.



Según las recomendaciones de la Asociación Nacional de Ópticos, el tamaño del televisor ha de mantener cierta relación con la distancia a la que nos debemos situar del mismo.

Una sencilla regla para calcular la distancia mínima aconsejable es multiplicar por 5 el número de pulgadas que tiene el televisor. El resultado es la distancia mínima (en centímetros) a la que nos debemos situar.



Por la forma de la habitación podemos situar el sillón a 1,40 m y 1,80 m del televisor.

**¿Cuántas pulgadas puede tener el televisor? ¿Cuánto debe medir como mínimo el largo de la mesa sobre la que va situado?**

La función que relaciona el tamaño de la pantalla y la distancia aconsejada es  $y = 5x$ .

Como máximo, la distancia al televisor es de 1,80 m.

$$1,80 \text{ m} = 180 \text{ cm} = 70,87 \text{ p}$$

$$y = 5x \rightarrow 70,87 = 5x \rightarrow x = 14,17 \text{ p}$$

El tamaño máximo del televisor debe ser de 14,17 pulgadas.

Como mínimo, la distancia al televisor es de 1,40 m.

$$1,40 \text{ m} = 140 \text{ cm} = 55,12 \text{ p}$$

$$y = 5x \rightarrow 55,12 = 5x \rightarrow x = 11,02 \text{ p}$$

El tamaño mínimo del televisor es de 11,02 pulgadas, al que le corresponde

una base de  $b = \frac{7,62 \cdot 11,02}{5} = 16,8$  cm, que será, como mínimo, el largo de la mesa.

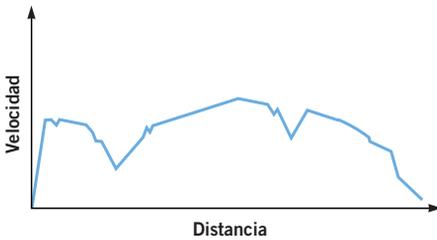
088

Este es el perfil de la 17.ª etapa de la Vuelta Ciclista a España.



Julián Ferreiras, entrenador del equipo CLIP, ha citado a sus corredores para preparar la etapa.

Ha pintado unos ejes en una pizarra y le ha pedido al capitán del equipo que represente sobre ellos la gráfica correspondiente, a la velocidad que desarrollaría a lo largo de la etapa. ¿Sabrías tú dibujarla?

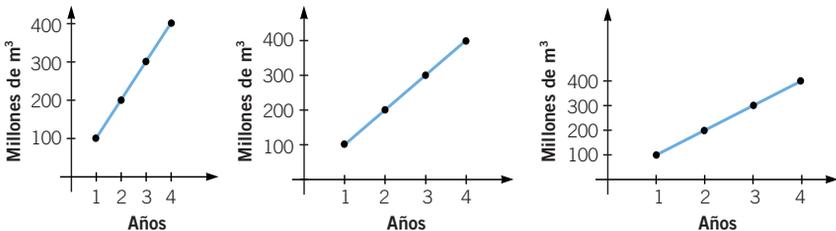


La velocidad está en relación con la pendiente; así, cuanto más pendiente hay más despacio se avanza, y al revés.



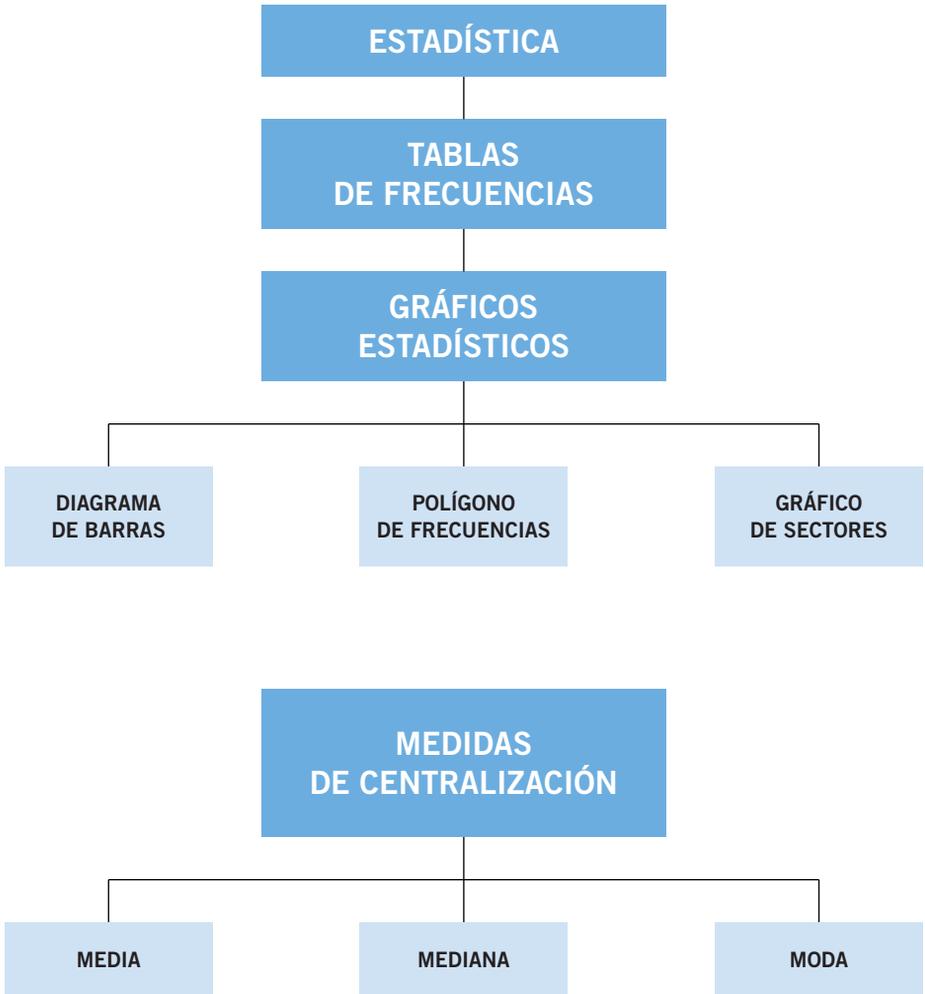
089

La principal noticia de los medios de comunicación es la constatación del incremento de gases contaminantes vertidos a la atmósfera durante los últimos 4 años. Los tres periódicos de máxima tirada la han tratado utilizando una gráfica que refleja este preocupante aumento.



- ¿Están bien hechas las gráficas?
- ¿Qué diferencias encuentras entre ellas?

Las gráficas están bien hechas, ya que representan los mismos valores, y la diferencia entre ellas es la escala elegida en cada eje.



## La Pax Augusta

El día se mostraba luminoso, como queriendo sumarse a la celebración de la victoria en la última batalla. Hacía diez años que las guerras civiles habían terminado, olvidadas ya ante una prosperidad que parecía no tener fin.

El mismo César Augusto hablaría ante el Senado. Corrillos de senadores esperaban su llegada elucubrando sobre el carácter de su discurso.

Por fin llegó Augusto y, después de saludar a los senadores, comenzó su discurso:

–Senadores del pueblo de Roma, hace ya diez años que vivimos en paz... Todos deseamos que la situación se mantenga y para ello es preciso obrar con justicia.

Tras una breve pausa, Augusto continuó:

–Necesitamos un nuevo censo de la población y de los bienes de todos los habitantes del imperio, porque conociendo esto podremos imponer los impuestos y tributos de manera justa, evitando los engaños y abusos que podrían llevarnos otra vez a una situación de guerra.

El emperador, recogiendo el manto sobre su brazo, se mostró complacido al ver el entusiasmo que su idea produjo en los senadores.

*Si en lugar de estudiar toda la población estudiamos solo una parte de ella, decimos que es una muestra. Pon un ejemplo de población y, dentro de ella, señala una muestra.*

***Imaginamos que queremos hacer un estudio sobre el tamaño del dedo meñique de los niños de 2.º ESO del colegio.***

***Población: todos los alumnos de 2.º ESO.***

***Muestra: 5 niños de cada clase de 2.º ESO.***







# Estadística

- 009** Lanza un dado 20 veces y anota los resultados. Después, haz un recuento y organiza los datos obtenidos. ¿Cuál es la variable que estás estudiando?

Por ejemplo:

<b>Cara</b>	1	2	3	4	5	6
<b>Repeticiones</b>	3	5	2	4	2	4

La variable estudiada es el número que sale al lanzar el dado.

- 010** Vuelve a realizar el experimento anterior, y clasifica los resultados en números pares o impares. ¿De qué tipo es ahora la variable?

Por ejemplo:

<b>Pares</b>	13
<b>Impares</b>	7

La variable es cualitativa.

- 011** En una clase de 24 alumnos de 2.º ESO, las calificaciones obtenidas en el último examen de Matemáticas han sido:

4 6 7 3      6 8 5 9      7 5 8 7  
5 4 7 8      4 6 5 8      7 3 10 7

Forma una tabla con el recuento de datos, y calcula las frecuencias de los valores que toma su variable.

$x_i$	Frecuencia absoluta $f_i$	Frecuencia relativa $h_i$
3	2	0,08
4	3	0,12
5	4	0,17
6	3	0,12
7	6	0,25
8	4	0,17
9	1	0,4
10	1	0,4

- 012** Anota el color del pelo de tus compañeros, y realiza una tabla de frecuencias.

$x_i$	Frecuencia absoluta $f_i$	Frecuencia relativa $h_i$
Moreno	3	0,15
Castaño	10	0,50
Rubio	5	0,25
Pelirrojo	2	0,1
	20	1

013 Completa la siguiente tabla, sabiendo que el número de suspensos es 4.

Nota	S	A	Not	Sob	Total
Frecuencia $f_i$	4	8	6	4	$\sum f_i = 22$

014 Organiza estos datos en una tabla de frecuencias.

164 168 170 170 168 170 174 170 168 172

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
164	1	1	0,1	0,1
168	3	4	0,3	0,4
170	4	8	0,4	0,8
172	1	9	0,1	0,9
174	1	10	0,1	1

015 Haz una tabla de frecuencias con las edades de los socios de un club.

19 21 24 24 24 25 24 21 26 19  
20 22 29 23 28 27 22 23 24 19

¿Qué porcentaje tiene menos de 20 años?

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
19	3	3	0,15	0,15
20	1	4	0,05	0,2
21	2	6	0,1	0,3
22	2	8	0,1	0,4
23	2	10	0,1	0,5
24	5	15	0,25	0,75
25	1	16	0,05	0,8
26	1	17	0,05	0,85
27	1	18	0,05	0,9
28	1	19	0,05	0,95
29	1	20	0,05	1

Los socios menores de 20 años son los que tienen 19 años, es decir, el 15 % del total.

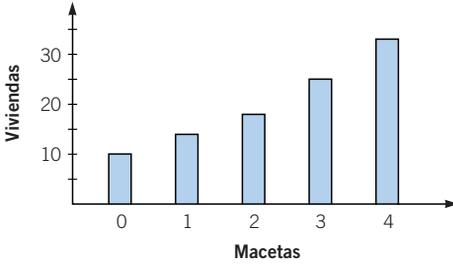
016 Completa la siguiente tabla de frecuencias. Construye también una tabla de frecuencias acumuladas.

Datos	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
1	3	3	0,15	0,15
2	4	7	0,20	0,35
3	2	9	0,10	0,45
4	6	15	0,30	0,75
5	5	20	0,25	1

# Estadística

**017** Realiza un diagrama de barras con el número de macetas que tienen 100 viviendas de una ciudad.

N.º de macetas	0	1	2	3	4
N.º de viviendas	10	14	18	25	33

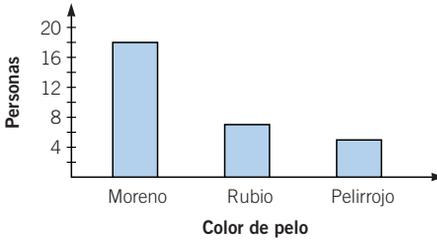


**018** El color de pelo de 30 personas es:

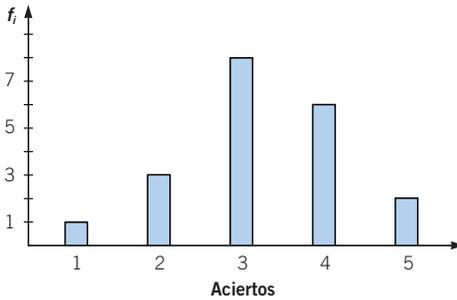
M = moreno      R = rubio      P = pelirrojo

M R P M M      M M R R P      P M M M M  
M M P R R      R P M M M      M R M M M

Organiza los datos en un diagrama de barras.



**019** Este gráfico representa las frecuencias absolutas de un examen de 5 preguntas.



a) ¿Qué tipo de variable estamos estudiando?

b) Construye la tabla correspondiente a partir del gráfico.

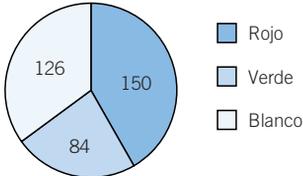
a) Variable cuantitativa discreta.

b)

N.º de aciertos	1	2	3	4	5
N.º de alumnos	1	3	8	6	2

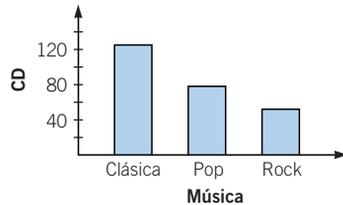
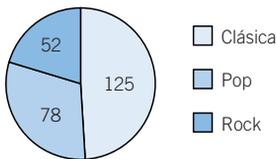
**020** Haz un diagrama de sectores con estos datos.

Color	Rojo	Verde	Blanco
N.º de coches	150	84	126



**021** Dibuja un diagrama de barras y otro de sectores con los siguientes datos.  
¿Cuál de las dos representaciones te parece más adecuada? ¿Por qué?

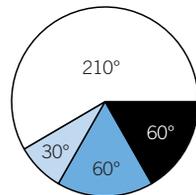
Música	Clásica	Pop	Rock
N.º de CD	125	78	52



El diagrama de sectores representa mejor el porcentaje de CD que hay de cada tipo de música.

**022** Este diagrama de sectores muestra las respuestas de un grupo de personas sobre el color de vehículo que prefieren.

- a) ¿Cuál es el color que prefiere la mayoría?  
b) Si hemos entrevistado a 720 personas, ¿cuántas prefieren cada color?



- a) El color preferido es el blanco.  
b) Blanco: 420. Negro: 120. Azul: 120. Rojo: 60.

**023** La nota de la evaluación es la media de los cinco exámenes realizados en el trimestre:

4, 5, 8, 7 y 7

¿Cuál es la nota media de la evaluación?

La nota media es 6,2.

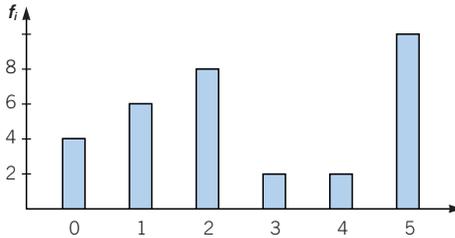
# Estadística

**024** En la tabla aparece el número de ordenadores que tienen los trabajadores de una empresa. Completa la tabla y halla la media.

$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$
0	2	0
1	25	25
2	65	130
3	8	24
$N=100$		179

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 8}{100} = 1,79 \text{ ordenadores}$$

**025** Observa este diagrama de barras y calcula la media aritmética de los datos.



Realiza la tabla de frecuencias y complétala para calcular la media aritmética.

$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$
0	4	0
1	6	6
2	8	16
3	2	6
4	2	8
5	10	50
$N = 32$		179

$$\bar{x} = \frac{86}{32} = 2,6875$$

**026** Las edades de un grupo de 8 amigas son: 16, 15, 17, 15, 17, 14, 15 y 16 años, respectivamente. Calcula la media de edad y la mediana.

14, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17

$$\bar{x} = \frac{14 + 15 + 15 + 15 + 16 + 16 + 17 + 17}{8} = 15,625 \text{ años}$$

$$Me = \frac{15 + 16}{2} = 15,5 \text{ años}$$

**027** Las temperaturas diarias (en °C) obtenidas en una ciudad, durante el mes de septiembre, son:

18, 19, 22, 16, 21, 20, 19, 18, 17, 22, 21, 23, 25, 19, 20,  
19, 22, 21, 20, 24, 23, 21, 19, 14, 23, 19, 18, 19, 20, 21

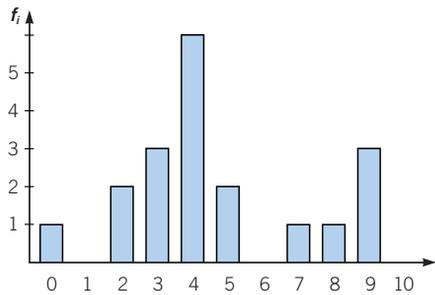
Compara la temperatura media y la mediana del mes.

14, 16, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 20,  $\widehat{20, 20}$ , 20, 21, 21,  
21, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 23, 23, 24, 25

$$\bar{x} = \frac{603}{30} = 20,1 \text{ °C} \qquad Me = \frac{20 + 20}{2} = 20 \text{ °C}$$

La media es ligeramente mayor que la mediana.

**028** Los datos sobre los libros leídos por un grupo de personas en el último año se representan en este diagrama de barras.  
¿Cuál es la mediana? ¿Y la media?



0, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4,  $\widehat{4}$ , 4, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 9, 9

$$\bar{x} = \frac{89}{19} = 4,68 \text{ libros} \qquad Me = 4 \text{ libros}$$

**029** Halla la moda de los datos que se presentan en esta tabla de frecuencias.

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i$	2	1	5	4	2	1	2	2	1	1

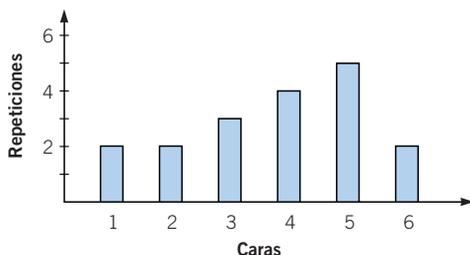
$Mo = 3$ , que se repite 5 veces.

**030** Se ha lanzado 18 veces un dado de parchís, obteniéndose estos resultados.

1 4 5 5 6 2 3 5 2 3 4 4 5 6 3 1 5 4

Representa gráficamente los datos y calcula la moda.

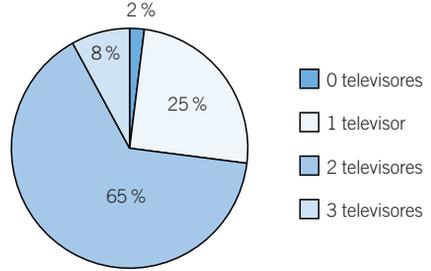
$x_i$	$f_i$
1	2
2	2
3	3
4	4
5	5
6	2



$Mo = 5$

**031** El siguiente diagrama de sectores muestra el número de televisores que hay en cada una de las 100 viviendas de una urbanización.

Calcula las medidas de centralización.



$x_i$	$f_i$	$f_i \cdot x_i$	$F_i$
0	2	0	2
1	25	25	27
2	65	130	92
3	8	24	100
	$N = 100$	179	

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 8}{100} = 1,79 \text{ televisores}$$

$$Me = 4 \text{ televisores} \quad Mo = 2 \text{ televisores}$$

## ACTIVIDADES

**032** Se quiere realizar un estudio estadístico de la altura de los alumnos de 2.º ESO de un instituto, y para ello se mide a los alumnos de 2.º A. Determina.

- a) La población. c) Los individuos.
- b) La muestra. d) La variable estadística.

¿Cómo es el tipo de variable que se estudia?

- a) Los alumnos de 2.º ESO.
- b) Los alumnos de 2.º A.
- c) Cada uno de los alumnos de 2.º A.
- d) La altura de los alumnos de 2.º ESO.

La variable es cuantitativa continua.

**033** Di cómo harías un estudio sobre el color de ojos de tus vecinos.

Especifica cuál sería la población, la muestra, el tamaño de la muestra y algunos valores que puede tomar la variable estudiada.

La población es la totalidad de los vecinos, por lo que la muestra sería toda la población, siendo el tamaño de 45 vecinos. Algunos valores posibles son: ojos azules, marrones, negros y verdes.



**034** Indica el tipo de variable: cualitativa o cuantitativa.

- a) Número de hermanos.                      d) Número de calzado.
  - b) Sexo.    e) Edad.
  - c) Nacionalidad.
- a) Cuantitativa.                                      d) Cuantitativa.
- b) Cualitativa.                                        e) Cuantitativa.
- c) Cualitativa.

**035** Clasifica las siguientes variables en discretas o continuas.

- a) Número de hermanos.                      d) Ingresos diarios en una frutería.
  - b) Número de calzado.                        e) Peso de un grupo de alumnos.
  - c) Edad.
- a) Discreta.    d) Discreta.
- b) Discreta.    e) Continua.
- c) Discreta.

**036** Una variable estadística toma estos valores.

- 3, 5, 4, 2, 6, 1, 2, 3
- a) Realiza un recuento.
- b) Calcula las frecuencias absolutas.
- c) Halla las frecuencias relativas.
- d) Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
1	1	1	0,125	0,125
2	2	3	0,25	0,375
3	2	5	0,25	0,625
4	1	6	0,125	0,75
5	1	7	0,125	0,875
6	1	8	0,125	1

**037** Las notas que se obtienen en un examen, de 0 a 5, son las siguientes.

- 0, 1, 0, 5, 4      5, 4, 2, 5, 3
- a) Realiza un recuento.
- b) Calcula todas las frecuencias que puedas.
- c) Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	2	2	0,2	0,2
1	1	3	0,1	0,3
2	1	4	0,1	0,4
3	1	5	0,1	0,5
4	2	7	0,2	0,7
5	3	10	0,3	1

# Estadística

**038** Las temperaturas máximas (en °C) que se han registrado en los últimos quince días del mes de agosto han sido:

40 39 41 39 40 38 37 40  
40 41 42 39 40 39 39

- Realiza un recuento de estas temperaturas.
- Calcula todas las frecuencias.
- Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

$x_i$	Recuento	$f_i$	$h_i$	%
37	/	1	0,07	7
38	/	1	0,07	7
39	////	5	0,33	33
40	////	5	0,33	33
41	//	2	0,14	14
42	/	1	0,07	7

**039** Tiramos 10 veces un dado, con cuatro caras numeradas del 1 al 4, y anotamos los resultados.

1, 4, 3, 1, 2      4, 1, 3, 2, 4



- ¿Cuántas veces se han repetido los resultados? Realiza un recuento.
- Calcula las frecuencias acumuladas.
- Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
1	3	3	0,3	0,3
2	2	5	0,2	0,5
3	2	7	0,2	0,7
4	3	10	0,3	1

**040** Estos son los nombres de 10 alumnos de una clase de 2.º ESO.

Carlos      Rosa      Eduardo      Fernando  
Julia      Lola      Fátima      Consuelo  
Paco      Isabel

Considerando la variable *sexo del alumno* (niño/niña), realiza una tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$h_i$
Niño	4	0,4
Niña	6	0,6

041 El número de hermanos de 20 alumnos es:

2 1 2 1 1 0 2 1 3 1  
2 1 1 2 1 0 3 1 0 4

Efectúa el recuento y obtén todas las frecuencias que puedas.  
Organiza los resultados obtenidos en una tabla.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	3	3	0,15	0,15
1	9	12	0,45	0,6
2	5	17	0,25	0,85
3	2	19	0,1	0,95
4	1	20	0,05	1

042 El número de horas diarias que ven la televisión los 30 jugadores de un equipo de fútbol es:

0 1 2 2 3 1 2 3 4 2 3 1 1 0 2  
1 1 0 2 1 1 3 0 1 4 2 1 3 0 0

Efectúa el recuento de datos y obtén las frecuencias absolutas y relativas.  
Anota también las frecuencias acumuladas.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	6	6	0,2	0,2
1	10	16	0,33	0,53
2	7	23	0,23	0,76
3	5	28	0,17	0,93
4	2	30	0,07	1

043 Los siguientes datos corresponden al número de empleados de una cadena de tiendas.

4 7 5 2 4 5 6 4 7 3 7 4 3 4 4  
3 4 3 2 4 4 1 1 2 5 3 2 2 5 3  
3 8 2 3 2 2 5 4 1 5 8 6 6 1 3

a) Indica cuál es la variable y de qué tipo es.

b) Efectúa el recuento de datos y realiza una tabla de frecuencias.

a) La variable es el número de empleados, que es cuantitativa y discreta.

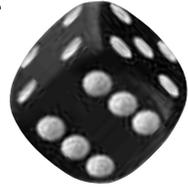
b)

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
1	4	4	0,09	0,09
2	8	12	0,18	0,27
3	9	21	0,20	0,47
4	10	31	0,22	0,69
5	6	37	0,13	0,82
6	3	40	0,07	0,89
7	3	43	0,07	0,96
8	2	45	0,04	1

# Estadística

**044** Lanzamos un dado 48 veces, obteniéndose estos resultados.

3	4	5	1	6	2	2	3
4	2	6	5	1	4	2	3
1	4	5	3	2	1	4	6
4	4	3	2	1	6	2	5
6	2	3	1	5	4	1	6
3	2	4	6	6	2	1	2



Efectúa el recuento de datos, y obtén una tabla con todas las frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
1	8	8	0,17	0,17
2	11	19	0,23	0,40
3	7	26	0,15	0,54
4	9	35	0,19	0,73
5	5	40	0,10	0,83
6	8	48	0,17	1

**045** Se ha preguntado a 50 alumnos por su deporte favorito: 16 han escogido fútbol, 12 baloncesto, 6 balonmano, 10 equitación y 6 ciclismo. Considerando estos datos:

- Calcula las frecuencias absolutas.
- ¿Qué frecuencia absoluta representa el 20 %?
- Obtén las frecuencias relativas.
- ¿Qué frecuencia relativa representa el 32 %?



a) y c)

$x_i$	$f_i$	$h_i$
Fútbol	16	0,32
Baloncesto	12	0,24
Balonmano	6	0,12
Equitación	10	0,2
Ciclismo	6	0,12

- b) La equitación representa el 20 %, con una frecuencia absoluta de 10.  
 d) El fútbol representa el 32 %, con una frecuencia relativa de 0,32.

046 Completa los datos de la siguiente tabla de frecuencias.

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2	4	0,2
4	3	0,15
6	5	0,25
8	2	0,1
10	6	0,3

047 Completa la tabla, sabiendo que hay el doble de suspensos que de notables.

Notas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Suspenseo	20	0,4
Aprobado	15	0,3
Notable	10	0,2
Sobresaliente	5	0,1

$$h_4 = \frac{x^4}{N} \rightarrow 0,1 = \frac{5}{N} \rightarrow N = 50$$

$$\text{Aprobados: } \frac{x_2}{50} = 0,3 \rightarrow x_2 = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \xrightarrow{x_1 = 2x_3} 3x_3 + 15 + 5 = 50 \rightarrow x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 20$$

048 Las edades de los socios de un club son:

19 21 24 24 24      25 24 21 26 19  
 20 22 29 23 28      27 22 23 24 19

- a) Forma una tabla de frecuencias en la que figuren sus porcentajes.
- b) ¿Qué porcentaje de socios tienen más de 25 años?

a)

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
19	3	3	0,15	0,15
20	1	4	0,05	0,2
21	2	6	0,10	0,3
22	2	8	0,10	0,4
23	2	10	0,10	0,5
24	5	15	0,25	0,75
25	1	16	0,05	0,8
26	1	17	0,05	0,85
27	1	18	0,05	0,9
28	1	19	0,05	0,95
29	1	20	0,05	1

- b) Tienen más de 25 años los socios que tienen de 26 a 29 años, que son el 20 % del total.

# Estadística

049



Para estudiar cómo influye trasnochar en el rendimiento académico, se ha preguntado a los alumnos de un centro universitario cuántos días salen de fiesta por semana, obteniéndose los siguientes resultados.

0 2 3 2 1      1 1 4 0 1  
1 2 2 1 3      1 3 0 1 2

Efectúa el recuento de datos y obtén la tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	3	3	0,15	0,15
1	8	11	0,4	0,55
2	5	16	0,25	0,8
3	3	19	0,15	0,95
4	1	20	0,05	1



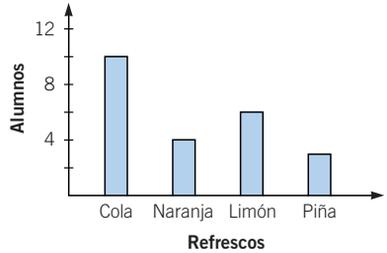
050



En una clase de 2.º ESO se pregunta a los alumnos por sus refrescos preferidos.

Representa estos datos en un diagrama de barras.

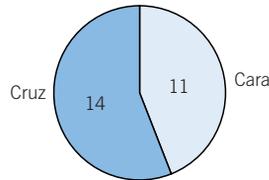
Refrescos	N.º de alumnos
Cola	10
Naranja	4
Limón	6
Piña	3



051



Los resultados obtenidos al lanzar una moneda 25 veces son 11 caras y 14 cruces. Representálos en un gráfico de sectores.



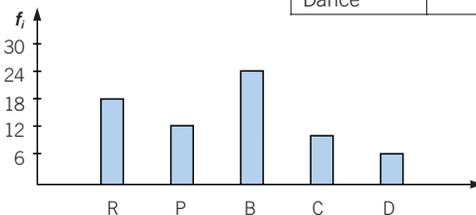
052



La música preferida por los alumnos de 2.º ESO, según una encuesta realizada, es:

Representa estos datos en un diagrama de barras.

Música	N.º de alumnos
Rock	18
Pop	12
Bacalao	24
Clásica	10
Dance	6



**053** En un edificio de 24 viviendas, el número de personas que habitan en cada una es:

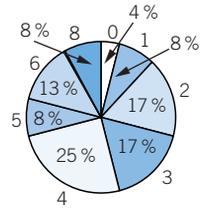
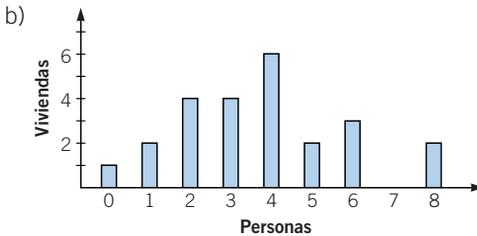
3 4 2 5      6 4 2 0      1 2 3 4  
 6 8 4 3      5 4 6 2      8 4 1 3



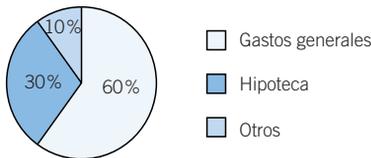
- a) Forma una tabla de frecuencias absolutas y relativas.
- b) Representa los datos con un diagrama de barras y un diagrama de sectores.

a)

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
0	1	1	0,04	0,04
1	2	3	0,08	0,12
2	4	7	0,17	0,29
3	4	11	0,17	0,46
4	6	17	0,25	0,71
5	2	19	0,08	0,79
6	3	22	0,13	0,92
7	0	22	0	0,92
8	2	24	0,08	1



**054** Una familia gasta mensualmente 1.800 €. El siguiente gráfico muestra lo que destina a cada concepto.



¿Cuánto dinero gasta en cada concepto?

Gastos generales: 60 % de 1.800 = 1.080 €  
 Hipoteca: 30 % de 1.800 = 540 €  
 Otros: 10 % de 1.800 = 180 €

# Estadística

055



Preguntados los alumnos de una clase sobre su deporte favorito, este ha sido el resultado.

**Fútbol: 32**

**Baloncesto: 16**

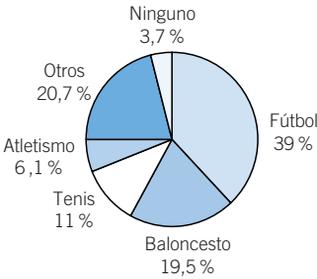
**Tenis: 9**

**Atletismo: 5**

**Otros: 17**

**Ninguno: 3**

Representa, en un gráfico de sectores, estos resultados, e indica el porcentaje de cada sector.



$$\text{Fútbol} \rightarrow \frac{32}{82} \cdot 360 = 140^\circ$$

$$\text{Baloncesto} \rightarrow 70^\circ$$

$$\text{Tenis} \rightarrow 40^\circ$$

$$\text{Atletismo} \rightarrow 22^\circ$$

$$\text{Otros} \rightarrow 75^\circ$$

$$\text{Ninguno} \rightarrow 3^\circ$$

056



En una encuesta realizada a 2.500 personas, sobre el funcionamiento de los autobuses urbanos, se han obtenido los siguientes datos.

**Muy bien 30,7%**

**Bien 48%**

**Regular 10,9%**

**Mal 1%**

**Muy mal 0,4%**

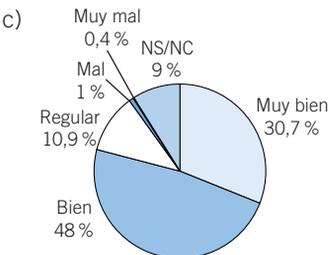
**NS/NC 9%**

- Forma una tabla de frecuencias.
- ¿Cuántas personas responden Bien o Muy bien?
- Representa los datos en un gráfico de sectores.

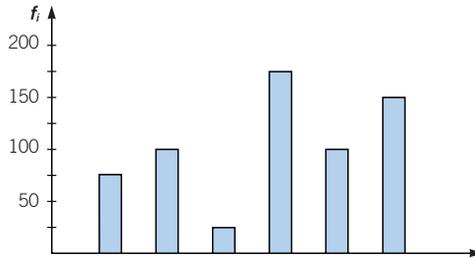
a)

$x_i$	$f_i$	$F_i$	$h_i$	$H_i$
Muy bien	767	767	0,307	0,307
Bien	1.200	1.967	0,48	0,787
Regular	273	2.240	0,109	0,896
Mal	25	2.265	0,01	0,906
Muy mal	10	2.275	0,004	0,91
NS/NC	225	2.500	0,09	1

b)  $769 + 1.200 = 1.967$  personas responden: Bien o Muy bien.



057 Observa el diagrama de barras.



Describe una situación según los datos que se representan.  
 Pon un título para el eje horizontal y otro para el eje vertical.

Por ejemplo, se puede hacer un estudio sobre los postres más solicitados de un restaurante, obteniendo los siguientes datos.

Flan: 75  
 Fruta del tiempo: 25  
 Natillas: 100  
 Tarta de chocolate: 100  
 Helado: 175  
 Cuajada: 150

Título del eje horizontal: postres del restaurante.

Título del eje vertical: n.º de clientes que eligen cada postre.

058 Un frutero tiene sacos de cebollas de 2 kg, 5 kg y 10 kg. Durante un día ha vendido 10 sacos de 2 kg, 5 sacos de 5 kg y 2 sacos de 10 kg.

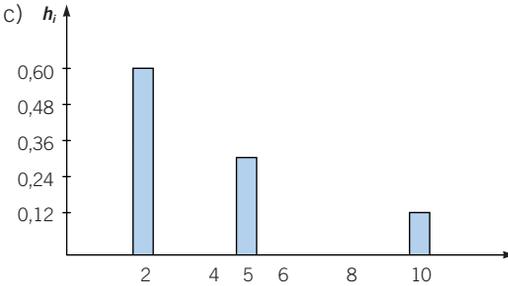
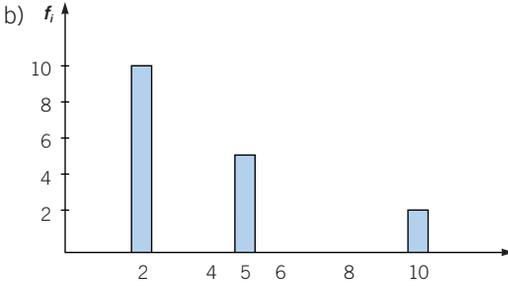


- Organiza estos datos mediante una tabla de frecuencias.
- Representa, en un diagrama de barras, las frecuencias absolutas.
- Dibuja un diagrama de barras donde representes las frecuencias relativas.
- ¿Cuál es el número medio de kilogramos de cebollas que ha vendido?
- ¿Qué saco de cebollas ha sido el más vendido?
- ¿Qué nombre reciben estos dos últimos números en Estadística?

a)

$x_i$	Recuento	$f_i$	$h_i$	%
2		10	0,59	59
5		5	0,29	29
10		2	0,12	12

# Estadística



d)  $\bar{x} = \frac{\text{suma de todos los datos}}{\text{número de datos}} = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 10 \cdot 2}{17} = \frac{65}{17} = 3,82 \text{ kg}$

e) El saco de 2 kg.

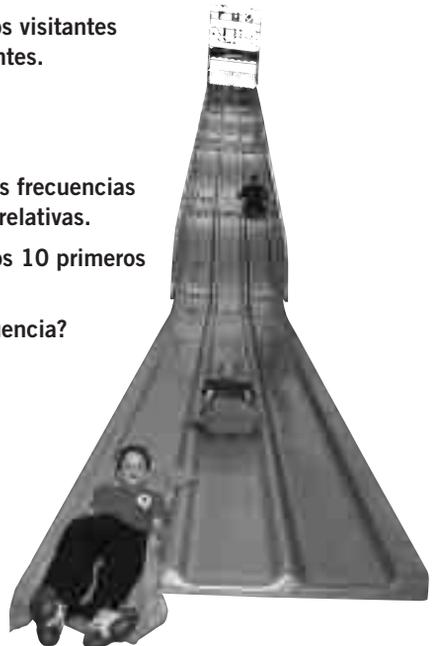
f) El número del apartado e) es la media aritmética y el de f) es la moda.

**059** Las edades (en años) de los 10 primeros visitantes al parque de atracciones son las siguientes.

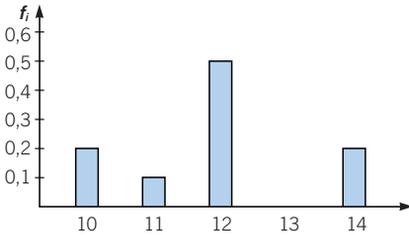
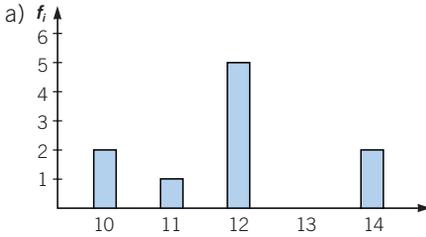


12 10 14 12 14  
10 11 12 12 12

- Dibuja un diagrama de barras con las frecuencias absolutas y otro con las frecuencias relativas.
- Calcula la media de las edades de los 10 primeros visitantes.
- ¿Qué edad se repite con mayor frecuencia?



$x_i$	$f_i$	$h_i$
10	2	0,2
11	1	0,1
12	5	0,5
13	0	0
14	2	0,2



b)  $\bar{x} = \frac{12 + 10 + 14 + 12 + 14 + 10 + 11 + 12 + 12 + 12}{10} = 11,9$  años

c) La edad que más se repite es 12 años.

**060 HAZLO ASÍ**

**¿CÓMO SE CALCULA E INTERPRETA LA MODA?**

**Calcula la moda de las notas obtenidas en Lengua por nueve estudiantes.**

**7 8 4 3 4 5 7 9 6**

Notas	$f_i$
3	1
4	2
5	1
6	1
7	2
8	1
9	1

**PRIMERO.** Se organizan los datos en una tabla de frecuencias.

**SEGUNDO.** Se estudia la columna de las frecuencias obtenidas y se elige el número o los números mayores.

En este caso, es el 2.

Hay dos modas, que son las notas 4 y 7.

**TERCERO.** Se interpretan los resultados.

Lo más frecuente en este grupo es encontrar alumnos que han obtenido un 4 o un 7.

# Estadística

061



En el servicio de urgencias de un hospital han ingresado 26 pacientes de estas edades.



87 14 52 65 74 43 28 9 12 17 25 93 42  
31 18 10 21 28 49 53 64 75 34 41 18 3

a) ¿Cuál es la edad media de los pacientes?

b) ¿Cuál es la mediana? ¿Y la moda?

3, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 18, 21, 25, 28, 28, 31, 34, 41, 42, 43, 49, 52, 53, 64, 65, 74, 75, 87, 93

$$a) \bar{x} = \frac{1.006}{26} = 38,7 \text{ años}$$

$$b) Me = \frac{31 + 34}{2} = 32,5 \text{ años}$$

En este caso hay dos modas: 18 y 28, que aparecen dos veces.

062



Esta es la tabla que resume un estudio sobre el número de hijos de las familias de una ciudad.

N.º de hijos	Porcentaje
0	12,5 %
1	30 %
2	30 %
3	15 %
4	12,5 %

Sabiendo que se preguntó a un número de familias comprendido entre 620 y 650, ¿puedes deducir a cuántas familias se entrevistó?

Todos los porcentajes deben corresponder a un número entero de respuestas.

Si el 12,5 % del total es un número entero, esto significa que, al multiplicar por 0,125, el resultado es un número entero o será múltiplo de 8, por lo que puede ser 624, 632, 640 o 648.

Y si el 30 % del total es un número entero, esto significa que, al multiplicar por 0,3, el resultado es un número entero, por lo que debe ser múltiplo de 10.

Por tanto, la única solución posible es 640 familias.

063

El peso medio de 6 amigas es 62 kg. Si los pesos de 5 de ellas son: 58, 65, 59, 65 y 72 kg, ¿cuánto pesa la sexta amiga?



Si el peso medio es 62 kg, la suma de los pesos es:  $62 \cdot 6 = 372$  kg, por lo que el peso de la sexta amiga es:

$$310 - (58 + 65 + 59 + 65 + 72) = 372 - 319 = 53 \text{ kg}$$

064

Si en una tabla conocemos las frecuencias relativas, ¿podrías calcular las frecuencias absolutas?

Para conocer las frecuencias absolutas necesitamos, además de las frecuencias relativas, el tamaño de la muestra o alguna de las frecuencias absolutas.

065

¿Puede existir una serie de datos que no tenga media? ¿Y que no tenga mediana? ¿Y moda? Razona tu respuesta.

Si los datos corresponden a una variable cualitativa no tendrá media ni mediana, ya que los valores de la variable no son numéricos.

La moda existe siempre, aunque puede no ser única.

066

Si a todos los datos obtenidos en un estudio estadístico:

- Les sumamos una cierta cantidad.
- Los multiplicamos por un mismo número.

¿Qué le sucede a la media de la nueva serie?

**Sugerencia:** elige un ejemplo con pocos datos y calcula la media.

Realiza las operaciones que se indican y vuelve a calcular la media.

Después, compara las dos medias obtenidas y generaliza el resultado.

- La media resultante es la media original más la cantidad sumada.

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \dots + (x_N + a)}{N} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N + a \cdot N}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} + a = \bar{x}_1 + a$$

- La media resultante es la media original multiplicada por la cantidad.

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(x_1 \cdot a) + (x_2 \cdot a) + \dots + (x_N \cdot a)}{N} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N) \cdot a}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \cdot a = \bar{x}_1 \cdot a$$

# Estadística

067

Inventa una situación con seis datos en la que se cumpla que:

$$\bar{x} = 6 \quad Me = 4 \quad Mo = 5$$

Como  $Me = 4$  y es una cantidad par de datos, la suma de los dos datos intermedios será 8.

Teniendo en cuenta que hay un 5, los dos datos son 3 y 5, y habrá dos números por encima y otros dos por debajo.

La suma de los 6 datos será 36 porque la media es 6.

Además, como 5 aparece 3 veces, serán los tres números mayores, por lo que la media no es 6.

Por ser  $Mo = 5$ , tenemos que 5 es el dato que más se repite.

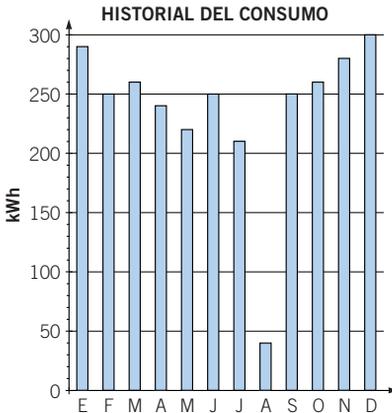
Si 5 aparece 2 veces, la suma de los 3 datos desconocidos será 23, los números menores que 3 serán 1 y 2 (ya que no se pueden repetir, por ser la moda 5), y el número mayor será 20.

Solución: 1, 2, 3, 5, 5, 20.

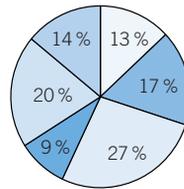
## EN LA VIDA COTIDIANA

068

Estos son algunos de los datos de la última factura de electricidad.



### ESTIMACIÓN DEL GASTO POR EQUIPAMIENTO



- Frigorífico
- Iluminación
- Lavadora
- Televisor
- Cocina
- Otros

En la factura hay dos conceptos que son fijos:

### ELECTRICIDAD DEL OESTE

#### FACTURA

Potencia y alquiler de equipo .....	8 €
Impuesto de consumo (por kWh) .....	0,11 €

a) Si en el mes de diciembre se pagaron 72 €, ¿cuál es el precio del kWh?

b) ¿Cuál ha sido el consumo medio mensual de electricidad?

c) ¿Y el gasto medio anual en iluminación?

a) El coste de la factura de diciembre es:

$$72 = 8 + 0,11 \cdot 300 + x \cdot 300 \rightarrow x = \frac{31}{300} = 0,103 \text{ €/kW}$$

b)  $\bar{x} = \frac{2.850}{12} = 237,5 \text{ kW}$

c) El gasto medio es:  $8 + 237,5 \cdot (0,11 + 0,103) = 58,67 \text{ €}$ .



069

En Matemáticas, a lo largo de la evaluación, hemos realizado dos trabajos, un examen parcial y un examen global. Todas las pruebas han sido calificadas con notas del 1 al 10.

En la nota final, los dos trabajos tienen el mismo valor, pero el examen parcial vale el doble que cada uno de los trabajos y el examen final vale cuatro veces más que los trabajos. Esto es lo que el profesor llama *media ponderada*.

Me gustaría que mi nota final fuese al menos un 7...



¿Qué nota final tendrá Irene? ¿Qué nota debe sacar Iván en el examen final?

$$\text{Media ponderada} = \frac{\text{Trabajo 1} + \text{Trabajo 2} + 2 \cdot \text{Parcial} + 4 \cdot \text{Final}}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{8,5 + 6,5 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 8,25}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

Irene tendrá un 8 como nota final.

$$7 = \frac{6,5 + 5,5 + 2 \cdot 5,5 + 4x}{8} = 56 = 23 + 4x \rightarrow 4x = 33 \rightarrow x = 8,25$$

Para sacar un 7 de media, Iván necesita sacar, al menos, un 8,25 en el examen final.

070

Estas son las puntuaciones, en los seis últimos partidos, de dos jugadores de baloncesto de la Selección española.

¿Qué media de puntos tiene cada jugador?

En los últimos minutos de un partido, ambos jugadores están en el banquillo. Si España pierde por bastantes puntos, ¿a cuál de ellos sacarías a jugar si fueras el entrenador?

Media del jugador 1:

$$\bar{x} = \frac{10 + 12 + 11 + 13 + 11 + 9}{6} = \frac{66}{6} = 11 \text{ puntos}$$

Media del jugador 2:

$$\bar{x} = \frac{2 + 14 + 7 + 22 + 4 + 17}{6} = \frac{66}{6} = 11 \text{ puntos}$$

Sería preferible sacar a jugar al segundo jugador, ya que aunque las medias coinciden, los resultados son más extremos y puede ser un revulsivo para el equipo.

10	12	11
13	11	9



2	14	7
22	4	17



Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:

Portada: **CARRIÓ/SÁNCHEZ/LACASTA**

Interiores: **Rosa María Barriga**

Ilustración: **Lincel, Enrique Cordero, Ignacio Galilea, José María Valera**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**

Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**

Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**

Desarrollo gráfico: **José Luis García, Raúl de Andrés**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Félix Rotella**

Confección y montaje: **Fernando Calonge, Luis González, Lourdes Román**

Corrección: **Marta Rubio, Gerardo Z. García**

Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

**Fotografías:** A. Toril; D. López; GARCÍA-PELAYO/Juancho/CSIC/INSTITUTO DE FILOLOGÍA; GOYENCHEA; J. Jaime; J. L. G. Grande; Krauel; S. Enríquez; A. G. E. FOTOSTOCK; COMSTOCK; DIGITALVISION; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. Preysler; PHOTODISC; STOCK PHOTOS; MATTON-BILD; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; ARCHIVO SANTILLANA

© 2007 by Santillana Educación, S. L.

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid

PRINTED IN SPAIN

Impreso en España por

ISBN: 978-84-294-0718-1

CP: 829496

Depósito legal:

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (artículos 270 y siguientes del Código Penal).

