

## Problemas resueltos del teorema de Bolzano

### 1

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

¿Se puede afirmar que  $f(x)$  está acotada en el intervalo  $[1,4]$ ?

Por no ser continua  $f(x)$  en  $x = 1$ , la función no es continua en el intervalo cerrado  $[1,4]$ , como consecuencia **no** podemos afirmar que la función esté acotada en dicho intervalo.

### 2

Dada la función  $f(x) = x^3$ , estudiar si esta acotada superiormente e inferiormente en el intervalo  $[1, 5]$  e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.

La función es continua en el intervalo  $[1, 5]$ , como consecuencia podemos afirmar que **está acotada** en dicho intervalo.

Por ser continua en el intervalo  $[1, 5]$  se cumple el **teorema de Weierstrass**, que afirma que se **alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos** en el intervalo  $[1, 5]$ .

### 3

Sea la función  $f(x) = x^2 + 1$ . ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo  $[1,5]$ ?

$$x^2 + 1 = 1 \quad x=0$$

$$x^2 + 1 = 5 \quad x=2$$

La función es continua en toda  $\mathbb{R}$  por ser una función polinómica.

Particularmente en el intervalo  $[0,2]$  donde se verifica que  $f(0) = 1$  y  $f(2) = 5$ .

Por la **propiedad de Darboux**, la función alcanza todos los valores comprendidos en el intervalo  $[1,5]$ .

## 4

**Demuestra que la función  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  corta al eje de las abscisas en el intervalo  $[0,2]$ . ¿Se puede decir lo mismo de la función:**

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1} ?$$

La primera función es continua en toda  $\mathbb{R}$ .

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 > 0.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 < 0.$$

Como se cumple el **teorema de Bolzano**, existe al menos un  $c$  que pertenece al intervalo  $(0, 2)$  que corta al eje de abscisas.

No podemos afirmar lo mismo de la segunda función ya que no es continua en  $x = 1$ .

## 5

**Utilizando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación:  $x^3 + x - 5 = 0$ , tiene al menos una solución  $x = a$  tal que  $1 < a < 2$ .**

$f(x)$  es continua en  $[1,2]$

$$f(1) = 1^3 + 1 - 5 = -3 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2 - 5 = 5 > 0$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe  $c \in (1,2)$  tal que:

$$f(c) = 0 \quad c^3 + c - 5 = 0.$$

Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación  $x^3 + x - 5 = 0$ .

## 6

**Sea la función  $f(x) = x^3 - x^2 + x$ . ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto  $c$  en el interior del intervalo  $[1,2]$  tal que  $f(c) = 0$ ?**

$f(x)$  es continua en  $[1,2]$ .

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 > 0.$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5 > 0.$$

No puede aplicarse el **teorema de Bolzano** porque no cambia de signo.

## 7

**Justificar que la función polinómica  $f(x) = x^3 + x + 1$  tiene un cero comprendido entre  $-1$  y  $0$ .**

Por ser polinómica la función es continua en el intervalo  $[-1, 0]$ .

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1 < 0.$$

$$f(0) = 0 + 0 + 1.$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe  $c \in (-1, 0)$  tal que:

$$f(c) = 0$$

## 8

**Demostrar que la ecuación  $e^{-x} + 2 = x$  tiene al menos una solución real.**

La función es continua en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = e^0 + 2 - 0 = 3 > 0.$$

$$f(3) = e^3 + 2 - 3 = 3 < 0.$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe  $c \in (0, 3)$  tal que:

$$f(c) = 0 \quad e^{-c} + 2 = c.$$

Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación  $e^{-x} + 2 = x$ .

## 9

**Demostrar que existe algún número real  $x$  tal que  $\operatorname{sen} x = x$ .**

**Consideremos la función  $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ .**

Es continua en toda  $\mathbb{R}$ .

$$f(-\pi) = \operatorname{sen}(-\pi) - (-\pi) = 0 + \pi = \pi > 0$$

$$f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) - (\pi) = 0 - \pi = -\pi < 0$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe  $c \in (-\pi, \pi)$  tal que:

$$f(c) = 0 \quad \operatorname{sen} c = c$$

**Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación  $\operatorname{sen} x = x$ .**

## 10

**Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7 - (16)^{\frac{1}{x}}}{1 + (16)^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Demuestra que existe un punto del intervalo abierto  $(2, 4)$  en el que  $f$  toma el valor 1.**

La función exponencial es positiva para toda  $x \in \mathbb{R}$ , por tanto el denominador de la función no se puede anular.

Sólo hay duda de la continuidad en  $x = 0$ , que está fuera del intervalo a estudiar, por tanto  $f(x)$  es continua en  $[2, 4]$ .

Tomemos la función  $g$  definida por  $g(x) = f(x) - 1$ .

$g$  es continua en el intervalo  $[2, 4]$ .

$$g(2) = \frac{7 - \sqrt{16}}{1 + \sqrt{16}} - 1 = \frac{7 - 4}{1 + 4} - 1 < 0$$

$$g(4) = \frac{7 - \sqrt[3]{16}}{1 + \sqrt[3]{16}} - 1 = \frac{7 - 2}{1 + 2} - 1 > 0$$

Como se cumplen las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe  $c \in (2, 4)$  tal que:

$$g(c) = 0 \quad f(c) - 1 = 0 \quad f(c) = 1$$

## 11

**Probar que la función  $f(x) = x + \sin x - 1$  es continua para toda  $\mathbb{R}$  y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación  $x + \sin x - 1 = 0$ .**

La función es continua por ser la suma de funciones continuas.

$$f(0) = 0 + \sin 0 - 1 = -1 < 0.$$

$$f(\pi/2) = \pi/2 + \sin \pi/2 - 1 = \pi/2 > 0.$$

Por cumplirse el **teorema de Bolzano**, podemos afirmar que al menos existe un valor  $c$  que pertenece al intervalo  $(0, \pi/2)$  tal que:

$$f(c) = 0 \quad c + \sin c - 1 = 0$$

Por tanto **existe al menos una solución real** a la ecuación  $x + \sin x - 1 = 0$ .

## 12

**Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y tales que  $f(a) > g(a)$  y  $f(b) < g(b)$ . Demostrar que  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ .**

Sea la función  $h$  definida por  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

Por ser continuas  $f$  y  $g$  en  $[a, b]$ , la función  $h$  también lo es.

$$f(a) > g(a) \quad h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$f(b) < g(b) \quad h(b) = f(b) - g(b) < 0.$$

Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el teorema de Bolzano, existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$h(c) = 0 \quad f(c) - g(c) = 0 \quad \mathbf{f(c) = g(c)}$$