

## INTEGRAL DEFINIDA.

### PROBLEMAS.

1º- Calcular las siguientes integrales definidas:

$$1.1 \int_{-1}^2 \ln(x+2) dx$$

$$1.2 \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$1.3 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$$

$$1.4 \int_{-3}^1 \frac{1+|x|}{x-2} dx$$

$$1.5 \int_{-3}^2 (x-1)|x-1| dx$$

$$1.6 \int_{-2}^4 E[x] dx$$

$$1.7 \int_{-3}^3 |E[x]| dx$$

$$1.8 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| dx$$

2º- Calcular el área limitada por las gráficas de:

a)  $y=x^2+1$

$y=2x+1$

b)  $y=x^2-1$

$y=3$

$$c) y=x^2 \quad y=x+2 \quad d) y=-x^2+4x+5 \quad y=5$$

3º-Determinar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la región  $R(\ln x; e, e^2)$  alrededor del eje OX.

4º-Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar el segmento que une los puntos (0,-1) y (2,1) al girar alrededor de OX.

5º-Hallar el volumen engendrado por  $R(\sin x; 0, \pi)$  alrededor de OX

6º-¿Cuál es el valor medio de la función  $f(x) = a + b \cos x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  ?

7º-Calculer el volumen del cuerpo engendrado por rotación alrededor del eje OX del segmento de hipérbola  $y = \frac{4}{x}$  comprendido entre los puntos (1,4) y (2,2).

8º-Calculer el área limitada por la gráfica de  $y = (x+2)\ln x$ , el eje OX y las abscisas  $x=1$  y  $x=2$ .

9º-Hallar el área limitada por la gráfica de  $y = x e^x$ , el eje OX y las rectas  $x=-1$ ,  $x=0$ . Hallar también el volumen engendrado por dicha superficie al girar entorno a OX.

10º-¿Qué área encierran las parábolas  $y^2 = 4x$  y  $x^2 = 4y$  ?

11º-Hallar el área limitada por la curva  $y = x e^{-x^2}$ , el eje de abscisas, la ordenada  $x=0$  y la ordenada en el máximo.

12º-Calculer el área limitada por las gráficas  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = e^{-x}$  y la recta  $x=1$ .

13º- Calculer:

$$13.1 \int_{-1}^2 |x-2| dx$$

$$13.2 \int_{-1}^1 \frac{|x|-1}{x+2} dx$$

$$13.3 \int_{-2}^1 |x^2 - x| dx$$

14º-Calculer el volumen del sólido que se engendra al girar alrededor del eje OX la región comprendida entre dicho eje y la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

15º-Si  $f$  es una función definida en  $[-1,3]$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$  y  $P$  la partición de  $[-1,3]$  dada por  $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  calculer las sumas de Riemann de dicha función correspondiente a la partición  $P$ .

16º-Considérese la función  $f(x) = x^2 + x + 1$  y el intervalo  $[1,4]$ .

Se pide:

a) Calculer el valor medio de  $f$  en  $[1,4]$

b) Hallar  $c \in (1,4)$  que cumpla la tesis del teorema de la media.

17º-Determinar **a** y **b** para que la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{sen} \pi x & x \leq -1 \\ ax + b & -1 < x \leq 0 \\ x^2 + 2 & 0 < x \end{cases} \text{ sea continua y después calcular } \int_{-2}^2 f(x) dx$$

18º-Considérese la curva de ecuación  $y=x^3-2x^2+x$  así como su tangente en el origen. Hallar el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.

19º-Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral y aplícalo para determinar los máximos y

mínimos relativos de la función **f** definida por:  $f(x) = \int_0^x (t^3 - 4t) dt$

20º-Determina el área limitada por la curva  $y=e^x \cdot x$  su tangente en el punto **(1,e-1)** y el eje **OY**.

21º-En el intervalo **[-4,4]** se define la función **F** mediante:  $F(x) = \int_0^x \sqrt{16-t^2} dt$

- a) ¿Cuánto vale  $F'(2)$ ?
- b) ¿Cuánto vale  $F(4)$ ?

22º-Determina un polinomio de segundo grado **p** sabiendo que verifica las tres condiciones siguientes:

- a)  $p(2)=p(-2)=0$
- b) Tiene un máximo relativo en  $x=0$
- c) El área de la región encerrada por el eje **OX** y la curva  $y=p(x)$  es 32

23º-La función **f** definida por  $f(x)=x^2+bx+c$  tiene su mínimo en  $x=2$  y verifica:  $\int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx = 3 \ln 2 - 2$

- a) Halla **b** y **c**.
- b) Halla el área de la figura limitada por la gráfica de la parábola  $y=f(x)$  y el eje **OX**.

24º-a) Halla la recta **r** que corta perpendicularmente a la curva de ecuación  $y=\operatorname{Ln}(1+x^2)$  y a la recta  $y=1+x$ .

b) Halla el área del recinto limitado por la recta **r**, la curva  $y=\operatorname{Ln}(1+x^2)$  y los ejes coordenados en el primer cuadrante.

25º-Sea **f** la función definida para  $x > -1$  por:  $f(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 2}{t + 1} dt$ .

- a) Calcula **f(1)**.
- b) ¿Es **f** derivable?. Justifica la respuesta.
- c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f**.

26º-Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$  y la recta tangente a la misma en el punto **P=(2,1)**.

27º-Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x)=|x-1|+1$

- a) Halla una primitiva de **f**

b) Calcula  $\int_0^2 xf(x)dx$

**PROBLEMAS RESUELTOS.-**

1º-Calcular el área finita comprendida entre la recta  $x=1$  y las curvas  $y = x^2$  e  $y = \frac{8}{x}$

Sol:  $A = 8 \ln 2 - \frac{7}{3}$

2º-Dada la curva  $y = \frac{2}{x} + \ln x^2$

a) Buscar el punto **M** de la curva en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.

b) Buscar el punto de inflexión **I**. Sol: a) M(1,2) b) I(2,1+ln 4)

3º-Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de un cono circular recto de radio **r** y altura **h**.

4º-a) Representar la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

b) Calcular  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

c) ¿Es aplicable la regla de Barrow para calcular  $\int_1^4 f(x)dx$ ? Razonar la respuesta.

Sol: b) ln 3/2 c) No

5º-Calcular el área encerrada por la gráfica de la función  $y = \frac{1}{4+x^2}$  el eje de abscisas y las rectas  $x=2$

y  $x = 2\sqrt{3}$ . Sol:  $A = \pi/24$

6º-Calcular el área de la parte del plano comprendida entre la curva  $y = \ln(x+5)$  y las rectas  $y=0$   $x=-9/2$

$x=1$ . Sol:  $A = 6 \ln 6 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{9}{2}$

7º-Halla el área de la figura limitada por las parábolas  $y^2=4x$  y  $x^2=4y$ .

8º-Calcular el área de la porción de plano comprendida entre la curva  $y = 3x^3 - 3x^2 + x + 6$  y su tangente en el punto de abscisa  $x=1$ . Sol:  $A=4$

9º-Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:  $f(x) = 1 + \frac{x}{3}$   $g(x) = \sqrt{x+1}$

Sol:  $A=1/6$

10º-Hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones  $y = 6x - x^2$  e  $y = -2x + x^2$ .

Sol:  $A=64/3$

11º-Sean  $f(x) = -x^2 - 4x$   $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ . Calcular el área del dominio conjunto de puntos M(x,y) tales

que :  $-2 \leq x \leq 0$        $g(x) \leq y \leq f(x)$       Sol: A= 5,005

$$12^\circ - \int_{-1}^0 \ln(x^2 + x + 1) dx \quad \text{Sol: } I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 2$$

13º-Hallar el área encerrada por las líneas cuyas ecuaciones son:  $y = xe^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$   
Sol: A=1

14º-Hallar el área limitada por las curvas  $y = \ln x$ ,  $y = 2$  y los ejes coordenados. Sol:  $A = e^2 - 1 = 6,389$

15º-Dada la función  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si, } x = 0 \\ x \ln x & \text{si, } x > 0 \end{cases}$  calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje OX, desde  $x=0$  hasta  $x=b$  siendo  $b$  la abscisa del mínimo de la función.

$$\text{Sol: } b = \frac{1}{e} \quad A = \frac{3}{4e^2}$$

16º-a) Hallar el área limitada por la función  $f(x) = 1/2 + \cos x$ , el eje de abscisas y las rectas  $x=0$  y  $x=\pi$ .  
b) Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar en torno del eje OX, la región del

apartado anterior.      Sol: a)  $A = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$       b)  $V = \frac{3\pi^2}{4}$

17º-Hallar el valor de la suma:

$$I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \dots + 100I_{100} \quad \text{siendo} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx \quad \text{Sol: } S=0$$

18º-La región del plano limitada por la recta  $y=x-3$ , la parábola  $y = (x-9)^2$  gira alrededor del eje OX.

Hallar el volumen del cuerpo de revolución que se genera.      Sol:  $V = \frac{500\pi}{3}$

19º-a) Representar gráficamente la función  $y = |x| + |x-1|$ .

b) ¿En qué puntos dicha función no es diferenciable?

c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función anterior y la recta  $y=2$ .

Sol: b)  $x=0$   $x=1$     c)  $A=3/2$

20º-Sea la función  $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$  definida en el intervalo  $[-1,1]$ . Calcular el área del recinto limitado por la curva  $y=f(x)$  y las rectas  $x=-1$   $x=1$   $y=1/2$ .      Sol: A= 0'45

21º-Calcular el área del recinto comprendido entre la parábola  $y = \frac{x^2}{4}$  y la recta  $y=x$ . Calcular asimismo

el volumen generado por dicho recinto al girar  $360^\circ$  alrededor del eje OX. Sol:  $A = 8/3$        $V = \frac{128\pi}{15}$

$$22^\circ - \text{Calcular } \int_4^5 \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)} dx$$

Sol: I=0'0061

23º-a) ¿Para qué valores de  $x$  tiene sentido la expresión

$$f(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}$$

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función  $f$ .

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva  $y=f(x)$  y la recta  $y=0$ .

Sol: a)  $[-4,4]$     b)  $M(0, 4 - 2\sqrt{2})$     c)  $A = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

24º-a) Enunciar e interpretar geoméricamente el teorema de Rolle.

b) Dada la función  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  en el intervalo  $[-1,1]$ , aplicar el teorema de Rolle si es posible. En caso contrario razonar la imposibilidad.

c) Calcular el área que encierra la función dada en el apartado anterior con el eje OX. Sol: c)  $A=4/5$

25º-Calcular el área limitada por las curvas  $y=\text{sen } x$   $y=\text{sen } 2x$  entre  $x=0$  y  $x=\pi/4$ .

Sol:  $A = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 0,207$

26º-Calcular el valor de la siguiente integral:  $\int_{-63}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{1-x}}$

27º-Calcular el área del recinto determinado por la función  $f(x)=x^2-3x+2$ , el eje OX y las rectas  $x=0$  y  $x=3$ .  
Sol:  $11/6$

28º- Área del recinto limitado por la curva:  $y= 1/((x+1)(x+3))$  entre  $x=0$  y  $x=1$ . Sol:  $1/2 \ln(3/2)$

29º- Área del recinto limitado por la curva:  $y = \ln(x+3)$ , el eje OX, entre  $x=0$  y  $x=1$ . Sol:  $4 \ln 4 - 3 \ln 3 - 1$

30º- Área del recinto limitado por la gráfica de la función:  $f(x)=\text{sen}(x/2)$  y el eje OX desde  $x=0$  hasta  $x=\pi$ .  
Sol: 2

31º-Área del recinto limitado por las funciones:  $f(x)=4x-x^2$  y  $g(x)=x^2+2x$  . Sol:  $1/3$

32º-Área comprendida entre la función:  $f(x)=x^3-4x^2+3x$  y el eje OX. Sol:  $37/12$

33º-Área del recinto limitado por la gráfica de  $f(x)=\text{cos } x$ , el eje OX y las rectas  $x=0$  y  $x=\pi$ . Sol: 2

34º-Área del recinto acotado del plano, limitado por la gráfica de  $f(x)=x^2/(1+x^2)$ , el eje OX y las rectas  $x=-1$  y  $x=1$ . Nota:  $\text{tg}(-\pi/4) = -1$ ;  $\text{tg}(\pi/4) = 1$  Sol:  $2-\pi/2$

35º-Calcular el valor de "m" para que el área del recinto limitado por la curva  $y=x^2$  y la recta  $y=mx$  sea  $9/2$ .  
Sol: 3

36º-Área limitada por  $f(x)=xe^{-x}$ , el eje OY y la ordenada en el máximo. Sol:  $3/e-1$ .

37º-Obtener el área comprendida entre la función  $y=e^x$  y la tangente a la curva en  $x=1$ . Sol:  $e/2 - 1$

38º-Area del recinto limitado por la curva  $y=xe^x$ , el eje OY y la ordenada correspondiente al punto mínimo de la curva. Sol:  $1-1/e$

39º-Area limitada por las curvas:  $y=-x^2-2x+3$  y la recta  $y=3$ . Sol:  $4/3$

40º-Area de la región del plano delimitada por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función  $f(x)=(x-1)e^{-x}$ . Sol:  $1/e$

41º-Hallar el área de la región del plano limitada por la curva  $y = (x-1) e^{-x}$ , el eje de abscisas desde el punto de corte hasta la abscisa en el máximo. Sol:  $1/e-2/e^2$

42º-Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas  $y = \ln x$ ,  $y = 3$  y los ejes de coordenadas. Sol:  $e^3-1$

43º-Hallar el área comprendida entre la curva  $y = \ln x$  desde el punto de corte con el eje OX hasta el punto de abscisa  $x = e$ . Sol:  $1$

44º-Hallar el valor de "a" para que el área de la región limitada por la curva  $y = -x^2+a$  y el eje OX sea igual a 36. Sol:  $a = 9$

45º-Calcular el área de las regiones del plano limitadas por las curvas:

a)  $y = x^2-3x$  y el eje OX      b)  $y = |x^2-5x+4|$  y el eje OX

c)  $y = x(x-1)(x-3)$  y el eje OX      d)  $y = x^3-6x^2+8x$  y el eje OX

Sol: a)  $9/2$ ; b)  $9/2$ ; c)  $37/12$ ; d)  $8$

46º- Calcular el área comprendida entre la función  $y=\ln x$ , el eje OX y la tangente a la función en el punto  $x=e$ . Sol:  $e/2 - 1$

47º- Halla el área determinada por las curvas  $y=x^2$ ,  $y=1/x$  y la recta  $x=2$ . Sol:  $7/3 - \ln 2$

48º-Halla el área determinada por  $y=x^2+1$ , su recta tangente en  $x=1$  y el eje OY. Sol:  $1/3$

49º-Halla el área determinada por  $y=x^2+1$ , su recta normal en  $x=1$  y los ejes. Sol:  $16/3.-$

50º-Halla el área comprendida entre las curvas  $y=x$ ,  $y=1/x$ ,  $y=-7/8 x + 15/4$ , siendo  $x \geq 1$ . Sol:  $21/4 - \ln 4$

51º-Halla el área encerrada entre las curvas  $y=x^4-4x^2$ ,  $y=x^2-4$ . Sol:  $8$

52º-Halla el área comprendida entre las curvas  $y=x^3-x$ ,  $y=3x$ . Sol:  $8$

53º-Halla el área comprendida entre las gráficas de las curvas:  $y=-x^4+2x^2$  e  $y=1$ . Sol:  $16/15$

54º-Área comprendida entre  $y=x^3-x^2$  y el eje OX. Sol:  $1/12$

55º-Área comprendida entre la curva  $y=x/(x^2-5x+4)$  y las rectas  $x=5$  y  $x=7$ . Sol:  $4/3 \ln 3 + 1/3 \ln 4 - 1/3 \ln 6$

56º-Área encerrada entre la curva  $x^2/(2x-2)$  y las rectas  $x=3$  e  $y=2$ . Sol:  $3/4 + 1/2 \ln 2$ .

57º-Área comprendida entre la curva  $y=\ln(x^2+1)$  y la curva  $y=\ln 5$ . Nota:  $\arctg(-\alpha)=-\arctg(\alpha)$ . Sol:  $-8 + 4 \arctg(2)$

58º-Área comprendida entre la curva  $y=|x-1|$  e  $y=2$ . Sol: 4

59º-Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones:  $y=-x^2+2x$  e  $y=x^3(x-2)$ . Sol: 44/15

60º-Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones:  $y=x^2-2x$  e  $y=x^3(x-2)$ . Sol: 4/15

61º-Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones:  $y=-x^4+2x^2$ ,  $y=x+2$  e  $y=-x+2$ . Sol: 31/15

62º-Halla el área comprendida entre la gráfica de la función  $y=\text{tg}(x)$ , el eje OX y la recta  $x=\pi/4$ . Sol:  $\ln(2)$

63º-Halla el área comprendida entre la gráfica de las funciones:  $y=2-x^2$  e  $y=|x|$ . Sol: 7/3

64º-Halla el área determinada por las curvas  $y=x^2$ ,  $y=1/x$  y la recta  $y=2$ .  
Sol:  $42/3-2/3+\ln(1/2)$