Aplicaciones de las derivadas

1. Determinar a, b y c para que la representación gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto (0,1) y tenga un máximo en el punto (1,3). Representar gráficamente la función.

2. Un fabricante de cajas de cartón abiertas (sin tapas) debe fabricar éstas cortando trozos cuadrados en las esquinas de una plancha de 3 x 2 metros.
   a. ¿Cuál es la longitud del lado de los cuadrados que deben suprimirse para que resulte una caja de volumen máximo?
   b. ¿Cuánto vale dicho volumen?

3. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 12 € y el de tramo vertical 18 €. Calcular:
   a. Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. **(3m x 2m)**
   b. El coste del marco. **(72 €)**

4. De la función f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, se sabe que la gráfica de su derivada f' es la recta que pasa por los puntos (2,-1) y (-2,1). También se sabe que el máximo de f es 1. Determinar a, b y c.

5. La función f, definida por la expresión $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, verifica que su gráfica pasa por el punto (-1,0) y tiene tangente paralela al eje OX en el punto (0,4).
   a. Determinar la función f .
   b. Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 3.
   c. Calcular el punto de inflexión de f.

6. Se dispone de una chapa metálica cuadrada de m metros de lado. Se cortan cuadrados de igual dimensión en cada esquina para, doblando los márgenes laterales, formar un depósito sin tapa.
   a. Determinar la longitud del lado del cuadrado que se tiene para suprimir para que el depósito resultante tenga la mayor capacidad posible.
   b. Determinar también la capacidad máxima.

7. Determinar el dominio y la expresión de la función derivada de cada una de las siguientes funciones:
   a. $f: \Re \longrightarrow \Re$ es la función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos P(0,5) y Q(5,0).
   b. $g: \Re \longrightarrow \Re$ dada por $g(x) = |x + 1|x$
   c. $h: \Re \longrightarrow \Re$ dada por $h(x) = x|x|$.

8. Sea f' la función derivada de una función derivable $f: \Re \longrightarrow \Re$. Se sabe que f' es continua y que:
   * f'(0) = 0, f'(2) = 1, f'(3) = 0, f'(4) = -1 y f'(5) = 0;
   * f' es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, +\infty)$;

* f' es estrictamente decreciente en el intervalo (2,4);
* La recta de ecuación y = 2x + 3 es una asíntota oblicua de f' cuando $x \to +\infty$.

a. Esbozar la gráfica de f'.
b. ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?

9. Hallar el punto P de la gráfica de la función f, definida para $x \geq -3$ por $f(x) = \sqrt{2x+6}$ que está más próximo al origen de coordenadas y determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en P.

10. Se toma una cuerda de 5 m de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcular, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área.

11. Sea $f:[-4,2] \longrightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = x^2 e^x$.
    a. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
    b. Hallar los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

12. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$.

13. Sea f la función definida para cada $x \in \Re$, $x \neq -2$ por $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$.
    a. Determinar si existen y, en cada caso, el valor de los límites
    $$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ y } \lim_{x\to 2} f(x) .$$
    b. Representar gráficamente la función f.

14. De la función polinómica f se sabe que su función derivada tiene como representación gráfica la recta de ecuación 3x - 2y + 1 = 0.
    a. ¿Tiene f algún extremo local? Si la respuesta es afirmativa, indica si se trata de un máximo o de un mínimo y en qué valor de x lo alcanza.
    b. Si es f(0) = 1, encontrar la expresión analítica de f.

15. Determinar los números reales m y n para los que la función $f:(0,\infty) \longrightarrow \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{m}{\sqrt{x}} + n\sqrt{x}$ tiene en el punto (1,4) un punto de inflexión.

16. Estudiar, según los valores de b, la derivabilidad de la función f definida por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

17. Se considera la función $f:[0,4] \longrightarrow \Re$ dada por $f(x) = (x+1)e^{-x}$.
    a. Hallar el máximo y el mínimo de la función en ese intervalo y los puntos en los que se alcanzan esos valores.

18. Se quiere construir un depósito cilíndrico de $3m^3$ de capacidad. La chapa para hacer la base cuesta 3 €/m^2 y la chapa para la pared lateral cuesta 2 €/m^2.Calcular las dimensiones más económicas y el coste. **(R = 0,86; h = 1,29; C = 27,88 €)**