<u>**Geometría (Selectividad)**</u>

1. Dados los puntos A(1,3,5) y B(-2,4,1), hallar las coordenadas del punto C, perteneciente al plano OXY de forma que A, B y C estén alineados. **Sol:** $C\left(\frac{19}{4},\frac{17}{4},0\right)$

2. Considera la recta de ecuaciones $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$. Di si el punto (6,2,2) se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen. **Sol: No**

3. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por (1,2,3) y es paralela a $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$.

   Sol: $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{-5}$.

4. Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a los planos $\alpha \equiv 3x+y-2z-2=0$, $\alpha' \equiv -2x+z=10$, y que pase por el origen de coordenadas.

   Sol: $\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ -2x+z=0 \end{cases}$.

5. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,2,-1), es paralela al plano $2x+y-z=3$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases}$. **Sol:** $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+1}{3}$

6. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,-1,2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1,0,1), (3,2,1) y (2,-1,0). Expresarla como intersección de planos. **Sol:** $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1,-1,2) y contiene la recta definida por los planos $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-3y+z=1 \end{cases}$. **Sol:** $11x-13y-4z-16=0$.

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y pasa por el punto (3,2,1). **Sol:** $y+z-3=0$.

9. Dados los puntos A(1,0,2), B(0,-2,1), C(2,1,0) y la recta $s: \frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{0}$, calcula:

a. El plano definido por los puntos A, B y C. **Sol:** $5x - 3y + z - 7 = 0$.
b. El plano determinado por el punto A y la recta *s*. **Sol: z - 2 = 0.**
c. El plano perpendicular a *s* y que pasa por el punto A. **Sol: x + y - 1 = 0.**

10. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(5,0,1), B(4,1,0) y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$. **Sol: 2x + y + z = 11.**

11. Calcula el valor de *a* para que los cuatros puntos estén alineados en un mismo plano: (*a*,0,1), (0,1,2), (1,2,3), (7,2,1). Calcula también la ecuación del plano que los contiene.
Sol: ***a*** **= -1; x - 4y + 3z - 2 = 0.**

12. Estudiar la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x + z = 8 \\ y + z = 4 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$. **Sol: Se cruzan**

13. Determinar la posición relativa de los planos $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$.

Sol: El segundo y tercer plano son paralelos y el primero corta a los otros dos.

14. Estudiar para los diferentes valores de *m* la posición relativa de los planos:

a. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

Sol: $m \neq 1$ y $m \neq -2$, los tres planos se cortan en un punto.
$m = -2$, los tres planos se cortan dos a dos.
$m = 1$, las tres ecuaciones describen un mismo plano

b. $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - my + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

Sol: $m \neq 0$ y $m \neq -1$, los tres planos se cortan en un punto.
$m = 0$, los tres planos se cortan dos a dos.
$m = -1$, los tres planos se cortan en una recta.

15. De una matriz A cuadrada de orden 3 se sabe los siguiente:
a. $A \cdot (1,0,0)^t = (1,0,2)^t$; $A \cdot (1,1,0)^t = (0,2,-2)^t$
b. La primera fila de A es el producto vectorial $(1,-1,-1) \wedge (1,1,0)$
c. El sistema $Ax = (6,0,12)^t$ es compatible indeterminado
d. $A \cdot (0,0,1)^t$ es ortogonal al vector $(1,1,-1)^t$.
Hallar la matriz A.

¿Cuál de las condiciones anteriores garantiza por sí misma que el determinante de a vale cero?

16. Determinar razonadamente la distancia del punto P(2,1,2) a la recta dada por la intersección de los planos 4x - y = 12 *y* z - x = 2. Hallar después el área del triángulo cuyos vértices son el punto P anterior, el punto de la recta r anterior más cercano a P y el punto (1,0,-1).

17. Determinar, según los valores de α y β, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv \alpha x + z = \beta$ $\pi_2 \equiv x + 3y - 2z = 7$ y $\pi_3 \equiv x + 2y - \alpha z = 5$.

18. Hallar el punto simétrico de P(1,2,-1) respecto del plano 2x - y + z = 5.

19. ¿Para qué valor, o valores, de α son linealmente dependientes los vectores (2,-3,1), (α,1,2) y (-4,6,-2)? Justifica la respuesta.
    Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P(1,2,0) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$.

20. Hallar razonadamente un punto P del plano determinado por los puntos A(2,0,0), B(0,4,0) y C(0,0,6) que esté a igual distancia de los tres.

21. Discútase y resuélvase el siguiente sistema según los distintos valores del parámetro α

$$\left.\begin{array}{l} 2y - z = \alpha \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = \alpha \end{array}\right\}$$

22. Desde el origen de coordenadas pueden trazarse dos rectas tangentes a la circunferencia que tiene su centro en el punto (3,0) y cuyo radio vale $3/\sqrt{2}$. ¿Cuáles son las ecuaciones de dichas rectas tangentes?

23. Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto (3,2) y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones $r \equiv 2x + 3y - 7 = 0$ $s \equiv x - 3y + 4 = 0$
    Hallar la ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.
24. Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto (1+t, 3+t, 6+2t).
    a. ¿Es esta trayectoria una línea recta?
    b. Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación $x - 2y + z - 7 = 0$
    c. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto (1,1,0).

25. Considera los puntos A(2,-1,-2) y B(-1,-1,2).
    a. Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales.
    b. Encuentra un punto C sobre la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

26. ¿Es posible determinar una circunferencia conociendo las coordenadas de dos puntos diametralmente opuestos? En caso afirmativo, describe un procedimiento. Calcula la ecuación de una circunferencia sabiendo que los puntos A(1,2) y B(3,4) son diametralmente opuestos.

27. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera el plano π_λ de ecuación
    $\pi_\lambda \equiv (1+2\lambda)x + (1-\lambda)y + (1+3\lambda)z + (2\lambda - 1) = 0$.
    a. Probar que todos los planos π_λ pasan por una misma recta r.
    b. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s, siendo s la recta dada por
       $s \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$
    c. Describir un procedimiento para hallar la distancia entre ambas rectas.

28. Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$.
    a. Represéntala indicando su centro y su radio.
    b. Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes:
       i. la recta tangente a la circunferencia en el punto A(3,2),
       ii. la recta normal a la circunferencia en el punto A,
       iii. el eje de abscisas.

29. Halla el punto Q simétrico del punto P = (2,0,1) respecto de la recta *r* que pasa por el punto A = (0,3,2) y es paralela a la recta *s* de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

30. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C = (3,2) y una de cuyas tangentes tiene de ecuación 4x - 3y - 5 = 0. Determina también si el punto X = (3,3) es interior, es exterior o está en la circunferencia.

31. Prueba que todos los planos de la familia $(3+\lambda)x + (3-\lambda)y + (5-2\lambda)z = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

32. Halla el punto del plano de ecuación x - z = 3 que está más cerca del punto P = (3,1,4) así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

33. Calcula un punto R de la recta $s \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - z - 7 = 0 \end{cases}$ que equidiste de los puntos P(2,1,1) y Q(1,0,-1). Calcula también el área del triángulo determinado por P, Q y R.

34. Sean los vectores $\vec{u} = (-1,2,3)$, $\vec{v} = (2,5,-2)$, $\vec{x} = (4,1,3)$ y $\vec{z} = (4,1,-8)$.
   a. ¿Se puede expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
   b. ¿Se puede expresar $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.
   c. ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ linealmente independientes? Justifica la respuesta.

35. ¿Cuál es el punto P de la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$ que está más cerca de A = (2,3,-1)?

    Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B = (1,0,0).

36. Sea π el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,1) y (1,1,1). Sea A el punto (1,2,3) y sea B el simétrico de A respecto del plano π.
   a. Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.
   b. Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2,2,2).

37. Sea A la matriz dada por $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$. Halla *a*, *b*, *c*, y *d* sabiendo que:
   a. El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector (1,-1,1).
   b. El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son las de la tercera columna de A por el vector (1,0,1) es el vector (-2,3,2).
   c. El rango de la matriz A es 2.

38. Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector $\vec{v} = (1,2,-1)$. En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto A = (2,1,2).
   a. Calcula los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.
   b. Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.
   c. ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano OXY?

39. Considera el plano $\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$.
   a. Halla los valores de *a* y *b* para los que *r* está contenida en π.
   b. ¿Existen algún valor de *a* y algún valor de *b* para los que la recta dada *r* es perpendicular al plano π?

40. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P = (1,0,2) y corta a las rectas $r \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$.

41. Los puntos A = (1,2) y B = (5,6) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.
   a. Calcula la ecuación de la circunferencia.

b. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

42. Un paralelogramo cuyo centro es $M = \left(\frac{3}{2}, 3, 4\right)$ tiene por vértices los puntos A = (1,2,3) y B = (3,2,5).

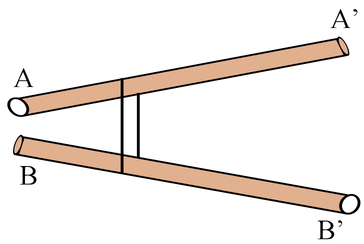
a. Halla las coordenadas de los otros dos vértices.
b. Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.
c. Calcula el área del paralelogramo.

43. Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos P(x,y) del plano que verifican la siguiente propiedad: El triángulo PAB cuyos vértices son P, A(2,0) y B(-2,0) es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P.

44. ¿Cuál es el punto P de la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - 4z = 1 \end{cases}$ que está más cerca del punto A(2,3,-1)?
Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B = (1,0,0)

45. Un foco luminoso se encuentra en el punto P(3,3,1) y una varilla ocupa la posición de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$. La varilla arroja una sombra sobre el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Hallar el punto de esta sombra que está en el plano z = 0.

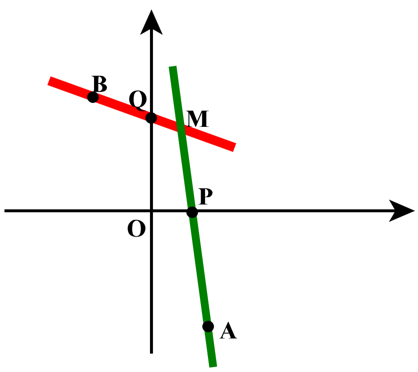
46. Dos varillas AA' y BB', de espesor despreciable, están entrelazadas por una goma elástica (del modo indicado en la figura adjunta).
La goma, que está tensa, puede deslizarse libremente por las varillas (sin rozamiento). Se sabe que las varillas ocupan las posiciones (en ejes cartesianos rectangulares XYZ):



$$AA' \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{y-5}{2}$$

$$BB' \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ z = 4 \end{cases}.$$

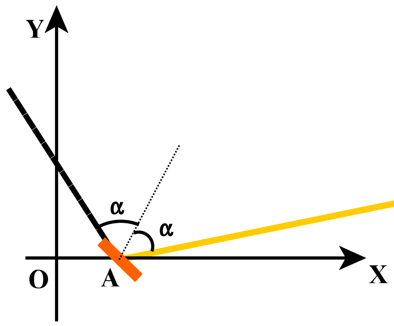
a. ¿Qué posiciones relativas tienen las rectas AA' y BB'?
b. Hallar la longitud total de la goma elástica en su posición de equilibrio.



47. Se consideran dos puntos fijos A(1,-2) y B(-1,2) y otros dos puntos P y Q sobre los ejes coordenados, que varían de manera que $\overline{OQ} = 2\overline{OP}$. Hallar el lugar geométrico que describe el punto M, en el que se cortan las rectas

variables AP y BQ.

48. Los rayos del Sol descienden según la dirección y el sentido del vector (-5,-1), en el plano XOY. En el punto A(1,0) se sitúa un pequeño espejo plano de manera que el rayo del Sol que llega a A, tras reflejarse en el espejo, pasa por el punto B(0,3). Hallar la ecuación de la recta sobre la que se asienta el espejo.



49. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 5y + z = -10 \end{cases}$ y al punto P(0,1,1).

50. Se considera la varilla vertical de extremos A(-1,2,9) y A'(-1,2,0). En dos momentos determinados de un mismo día, las sombras que proyecta A sobre el plano OXY son los puntos $S_1(4,-3,0)$ y $S_2(1,6,0)$. Se pide:
   a. La recta que describe la sombra de A a lo largo del día.
   b. La sombra S_0 de A en el momento en que la sombra de AA' es más corta.
   c. La sombra S_3 de A en el otro momento del día en que la sombra de AA' tiene la misma longitud que la sombra S_1A'.

51. En un vértice de un cubo se aplican tres fuerzas dirigidas según las diagonales de las tres caras que pasan por dichos vértices. Los módulos o magnitudes de estas fuerzas son 1, 2 y 3. Hallar el módulo de la fuerza resultante de aquellas tres.

52. Una conducción de agua ocupa la posición de $r \equiv \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+10}{-4}$. En un punto P de esta conducción se produce una fuga de agua; el correspondiente goteo cae sobre un punto Q de la recta $s \equiv \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-5}{2}$. Hallar los puntos P y Q y la distancia entre ellos.