GEOMETRÍA VECTORIAL

1.- Probar que los vectores $\vec{u} = (-1,1,1),\ \vec{v} = (1,-1,1)\ y\ \vec{w} = (1,1,-1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar las coordenadas del vector (2,4,-2) en dicha base.

2.- Determinar los valores de *a* para los cuales resultan linealmente dependientes los vectores (-2,a,a) (a,-2,a) y (a,a,-2). Obtener, en estos casos, la relación de dependencia entre los vectores.

3.- Calcular los ángulos que forma el vector $\left(\sqrt{3},0,1\right)$ con cada uno de los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

4.- Justificar que los puntos A(1,1,1), B(2,0,-1), C(5,2,1) y D(4,3,3) son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Razonar si es o no rectángulo.

5.- Calcular razonadamente un vector unitario que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u} = (0,1,5),\ \vec{v} = (1,2,3)\ y\ \vec{w} = (1,1,-2)$.

6.- Si $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son dos vectores cualesquiera del espacio, probar que el producto escalar de $\vec{u} + \vec{v}$ por $\vec{u} \times \vec{v}$ es siempre cero.

7.- Encontrar un vector de $\mathbb{R}^3$ que forme con los vectores $(0,0,1)\ y\ (sen\, t, \cos t, 0)$ una base ortonormal (*t* es un número real cualquiera).

8.- ¿Es posible que dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ verifiquen $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7,\ |\vec{u}| = 1\ y\ |\vec{v}| = 2$? ¿Por qué?

9.- Hallar todos los vectores con módulo unidad y que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (2,2,2)$ y de 45° con $\vec{v} = (1,0,1)$.

10.- Indicar para qué valores de *t* los vectores $\vec{u} = (1,1,1),\ \vec{v} = (2,2,t)\ y\ \vec{w} = (t,0,0)$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

11.- Demostrar que, dados cuatro puntos A, B, C, D cualesquiera de un plano, se verifica que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

12.- Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,3);\ \vec{v} = (1,2,2)\ y\ \vec{w} = (3,-1,1)$, calcular :

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ c) $(\vec{u} \times \vec{v})\cdot\vec{w}$ d) $(2\vec{u} - \vec{v}) \times (2\vec{u} + \vec{w})$

13.- Hallar la proyección del vector $\vec{u} = (2,1,3)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3,4,2)$, siendo la base ortonormal.

14.- Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 120°. Sabiendo que $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, calcular:

a) $(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) \cdot (\vec{u} \text{ x } \vec{v})$ b) $[(\vec{u} + 3\vec{v}) \text{ x } (3\vec{u} - \vec{v})]^2$

15.- Encontrar un vector que sea perpendicular a $\vec{u} = (3,-2,5)$ y que dependa linealmente de $\vec{v} = (1,-1,3)$ y $\vec{w} = (-2,2,1)$.

16.- Calcular un vector $\vec{u}$ que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:

a) Que sea proporcional al vector $\vec{v} = (2,-1,1)$ y además cumpla que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

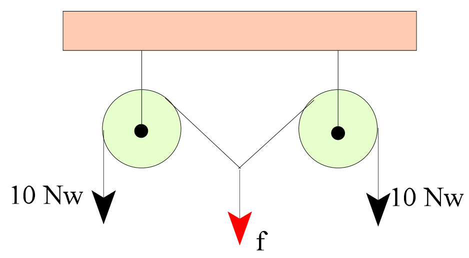
b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2,-1,1)$ y $\vec{w} = (18,-22,-5)$ y además $|\vec{u}| = 14$.

c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -4$, siendo $\vec{v} = (3,-1,5)$ y $\vec{w} = (1,2,-3)$.

17.- Hallar el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u} = (2,1,5)$ y $\vec{v} = (3,2,1)$.

18.- Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{v} = (3,2,1)$.

19.- El sistema de fuerzas de la figura está en equilibrio. Hallar el valor de la fuerza *f*.



20.- En un paralelogramo ABCD es AB = 2 cm, AD = 1 cm, y el ángulo BAD = 60°. Hallar el coseno del ángulo que forman las diagonales.

21.- Sea G es el baricentro de un triángulo de vértices A, B y C. Si $\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,0,-2)$, calcular los vectores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BG}$.