LIMITES Y CONTINUIDAD

Contenidos

2.1 Limite de una función en un punto.

Una función f(x) tiene por límite L cuando x tiende a "a", si es posible conseguir que f(x) se aproxime tanto a L como queramos , cuando x está suficientemente próximo a "a".

a) A partir de entornos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \mid si \; x \in E^{*}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$$

b) A partir de distancias:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \mid si \quad 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Nótese que en la definición de límite sólo intervienen los valores que toma la función en la proximidad de x=a, pero no en el punto a, en el que la función puede tomar un valor cualquiera e incluso no estar definida.

2.2 Limites en el infinito. Asíntotas de una curva.

- Límites infinitos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid si \quad 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid si, \quad 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

- Límites en el infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n > 0 \mid si, x > n \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n < 0 \mid si, x < n \Rightarrow | f(x) - L' | < \varepsilon$$

- **Asíntotas de una curva.**

Se dice que una curva tiene ramas infinitas si existen puntos de la curva cuya distancia al origen de coordenadas es mayor que cualquier número prefijado.
Si una curva tiene ramas infinitas, la recta (si existe) a la cual se aproxima la curva cada vez más sin

llegar a tocarla, se llama **asíntota**. Si la curva no tiene asíntotas, se dice que la curva tiene rama parabólica.

a) Asíntota vertical o paralelas al eje OY.

Son de la forma **x=u** siendo u los valores finitos de x que hacen el siguiente límite ∞

$$\lim_{x\to u} f(x) = \pm\infty \quad (u = a, a^+, a^-)$$

Es conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota vertical, para ello se realizarán los límites laterales

b) Asíntota horizontal o paralela al eje OX.

Son de la forma **y=k** siendo k $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$

Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota, bastará hallar el signo de **f(x)-k** para x->+∞ y x->-∞.

Si **f(x)-k** es positivo la curva estará por encima de la asíntota y si es negativo estará por debajo.

c) Asíntota oblicua

Son de la forma **y=mx+n** $\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \end{cases} \quad m, n \in R$

d) Ramas parabólicas.

Se estudian solamente sí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ la curva tiene una rama parabólica en la dirección del eje OY.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ la curva tiene una rama parabólica en la dirección del eje OX.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \infty$ la curva tiene una rama parabólica en la dirección de la recta **y=mx**

2.3 Cálculo de límites.

- Propiedades de los límites:

1º- Si una función tiene límite en un punto, éste es único.

2º- Si los límites laterales de una función en un punto son distintos, entonces la función no tiene límite en él.

3º- Sea f(x) y g(x) dos funciones tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L'$

entonces:

1º- $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm L'$

2º- $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = L \times L'$

3º- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{L'} \quad L' \neq 0$

4º- $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n \quad \forall n \in \aleph - \{0\}$

5º- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \quad \forall n \in \aleph - \{0\}$

6º- $\lim\limits_{x\to a}(\log_b f(x)) = \log_b(\lim\limits_{x\to a} f(x)) \quad \forall b \in \Re^+$

7º- $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \quad \forall b \in \Re^+$ 8º- $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

- **<u>Indeterminaciones.</u>**

Las indeterminaciones que se producen en el cálculo de límites son las siguientes:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\times\infty,\quad \infty - \infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0$$

En los casos en los que se produzca indeterminación, se procede a reducir dicha indeterminación transformando la expresión del límite mediante diversas estrategias:

- **Estrategia de modificar la expresión del límite**.

Consiste en transformar la expresión del límite mediante transformaciones algebraicas de esta, por ejemplo multiplicar o dividir por una expresión, sumar y restar una expresión, simplificar la expresión...

- **Estrategia de cambio de variable**.

Consiste en poner la variable de la expresión del límite en función de otra variable, de esta forma el límite se transforma en otro más sencillo de calcular en la nueva variable.

- **Estrategia de cálculo diferencial.**

Consiste en aplicar la regla de L'Hôpital.

- **Estrategia de infinitésimos equivalentes.**

Consiste en sustituir una función por otra función que cumple unas ciertas propiedades.

<u>* Indeterminación</u> $\frac{\infty}{\infty}$: En este caso, generalmente, se resuelven estos límites dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia.

Para hacer un límite en el que $x \to -\infty$ se cambian de signo todos los términos del límite y x pasa a tender a $+\infty$.

<u>* Indeterminación</u> $\infty - \infty$: Si aparecen raíces, el límite se hace aplicando el método de la conjugada. Si no aparecen raíces, primero se opera y después hacemos el límite que queda, que generalmente es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

<u>Ejemplo.-</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x} = -\infty$$

<u>* Indeterminación</u> $\frac{0}{0}$: Se resuelven descomponiendo en factores numerador y denominador. Hay casos en los que aparecen raíces y en ellos aplicamos también la conjugada.

<u>Ejemplo.-</u>

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x\to-1}\frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-5}{(0)}$$ Hallamos los límites laterales:

$$\underset{x\to -1^-}{lím}\ \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = -\infty\ ; \qquad \underset{x\to -1^+}{lím}\ \frac{3x-2}{(x+1)(x-1)} = +\infty$$

* **Indeterminación** 1^∞ : Sí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$$

Ejemplo.-

$$\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{2x-2}{3+2x}-1\right)\cdot(x+1)} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{2x-2-3-2x}{3+2x}\right)\cdot(x+1)} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{\frac{-5}{2}}$$

* **Regla de L'HOPITAL.**

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ siendo $g(x) \neq 0$ en un entorno de **a**.

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

La eliminación de este tipo de indeterminación exige un teorema análogo a la regla de L'Hôpital.

Ejemplos.-

a) $\underset{x\to 0}{lím}\frac{x^2+sen\,x}{x^2-sen\,x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \underset{x\to 0}{lím}\frac{2x+cos\,x}{2x-\cos x} = \frac{1}{-1} = -1$

b) $\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{ln\,x}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{lím}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)}} = \underset{x\to+\infty}{lím}\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{x} = \underset{x\to+\infty}{lím}\ 3x^{\frac{-1}{3}} = \underset{x\to+\infty}{lím}\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$

- Infinitésimos equivalentes.

Si en una expresión figura como **factor o divisor** una función, el límite de la expresión no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

Tabla de infinitésimos.

- $senkx \approx kx, \quad si,\ kx \to 0$
- $e^{kx} - 1 \approx kx \quad ,si,\ x \to 0$

* $tagkx \approx kx, \quad si,\ kx \to 0$

* $a^{kx} - 1 \approx kx\cdot lna, \quad si,\ x \to 0$

- $1 - \cos kx \approx \frac{(kx)^2}{2}, \quad si, x \to 0$
- $\ln(1+kx) \approx kx, \quad si, x \to 0$
- $(1+x)^m - 1 \approx mx, \quad si, x \to 0$
- $arctagkx \approx kx, \quad si, x \to 0$

* $\sqrt[n]{a} - 1 \approx \frac{1}{n} \cdot lna, \quad si, n \to \infty$
* $cotgkx \approx \frac{\pi}{2} - kx, \quad si, x \to \frac{\pi}{2}$
* $arcsenkx \approx kx, \quad si, x \to 0$

- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ f(x) y g(x) son infinitésimos equivalentes y se representan $f(x) \approx g(x)$.

<u>* Límites que convienen conocer:</u>

$\lim_{x\to\infty} senx = no\exists$	$\lim_{x\to\infty} \cos x = no\exists$	$\lim_{x\to\infty} tgx = no\exists$
$\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x} = no\exists$	$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} = no\exists$	$\lim_{x\to 0} tg\frac{1}{x} = no\exists$
$\lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty$	$\lim_{x\to +\infty} lnx = \infty$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{a^x} = 0, \ si, \ a > 1$

<u>2.4 Función continua en un punto y en un intervalo.</u>

La idea intuitiva de continuidad implica una variación suave de la función, sin saltos bruscos que rompan la gráfica de la misma.
Una función real de variable real es **continua en un punto** "a" sí y solo sí :

- existe el valor de la función para x=a.
- existe el límite de f(x) cuando $x \to a$.
- $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

- Definición **métrica** de continuidad:

f(x) es continua en x=a <=> $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid si, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- Continuidad en un **intervalo.**

Una función es **continua en un intervalo abierto** (a,b) cuando es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.
Una función es **continua en un intervalo cerrado** [a,b] si lo es en todos y cada uno de los puntos de (a,b) y además es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

- Continuidad **lateral**:

Una función es **continua por la derecha** en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

f(x) es continua en $a^+ \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Una función es **continua por la izquierda** en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

f(x) es continua en $a^- \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto es continua en él.

2.5 Operaciones con funciones continuas.

Las operaciones con funciones continuas definidas en el mismo intervalo da como resultado otra función continua en él, siempre que tenga sentido la operación.

- Teorema I.- La suma, diferencia y producto de funciones continuas es una función continua; el cociente de funciones continuas también es una función continua, excepto para los valores de x, que anulen el denominador.

- Teorema II.- Si f(x) es una función continua en x=a y g(x) es continua en f(a) entonces la composición de estas dos funciones (g o f)(x) es una función continua.

2.6 Discontinuidades.

Una función es **discontinua** en punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo. Para la clasificación de las discontinuidades en un punto tendremos en cuenta la existencia o no de los límites laterales en el mismo.

a) Discontinuidad **evitable.**

Una función es discontinua evitable en x=a cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama verdadero valor de la función en el mismo.

b) Discontinuidad de **primera especie.**

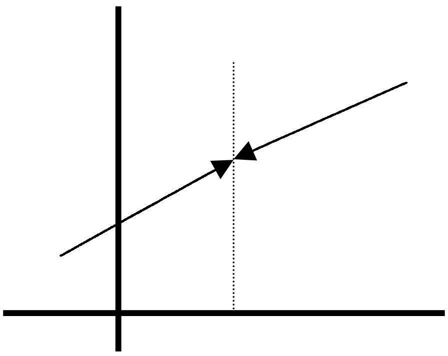
* **Finita** : se produce cuando los dos límites laterales son finitos y distintos. En este caso, se puede calcular el salto. $S = |\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)|$

* **Infinita** : se produce cuando alguno o los dos límites laterales son infinitos. También se le llama asintótica.

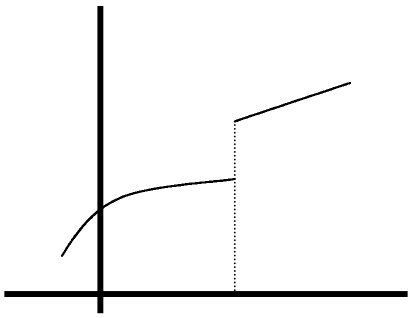
c) Discontinuidad de **segunda especie.**

Se produce cuando no existe algún límite lateral.

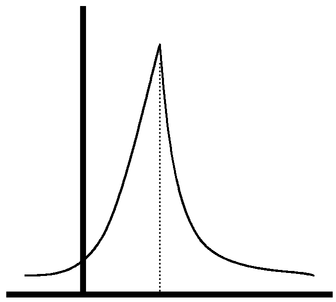
En las tres gráficas que a continuación se presentan se dan los tipos de discontinuidad más importantes.



D. evitable



D. de 1º especie



D. asintótica.

Ejemplo

Calcula el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3a+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

- Dominio = **R**
- Si $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2-2x+1\right)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3a+\ln x\right)=3a \\ f(1)=a-1 \end{array}\right\}$$

Para que f (x) sea continua en x = 1, ha de ser:

$$a-1=3a \quad \rightarrow \quad 2a=-1 \quad \rightarrow \quad a=-\frac{1}{2}$$

2.7 El teorema del valor intermedio de **BOLZANO** y el teorema de existencia de extremos absolutos de **WEIESTRASS.**

- **Teorema del signo (positivo).**

Si f(x) es una función continua en un punto x=a siendo f(a)>0, entonces existe un entorno de a en el que para todo valor de x que pertenezca al entorno, f(x) es positiva.

Simbólicamente:

f(x) continua en x=a, f(a)>0 $\Rightarrow \exists E(a,\delta) \,|\, \forall x \in E(a,\delta),\ f(x)>0$

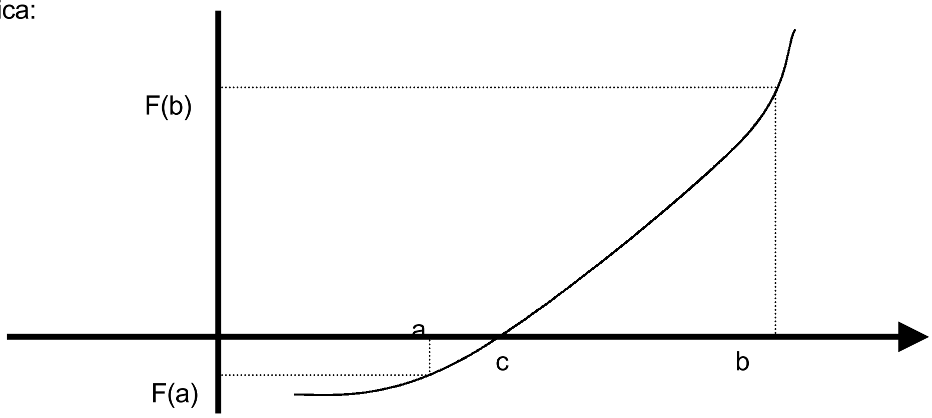
- **Teorema del signo (negativo).**

Si f(x) es una función continua en un punto x=a siendo f(a)<0, entonces existe un entorno de a en el que todos sus elementos tienen imagen negativa.

- **Teorema de BOLZANO** (1781-1848).

Si una función es continua en un intervalo [a,b] y toma valores de distinto signo en los extremos, entonces existe al menos un punto interior "c" del intervalo en el que f(c)=0.

Interpretación geométrica:

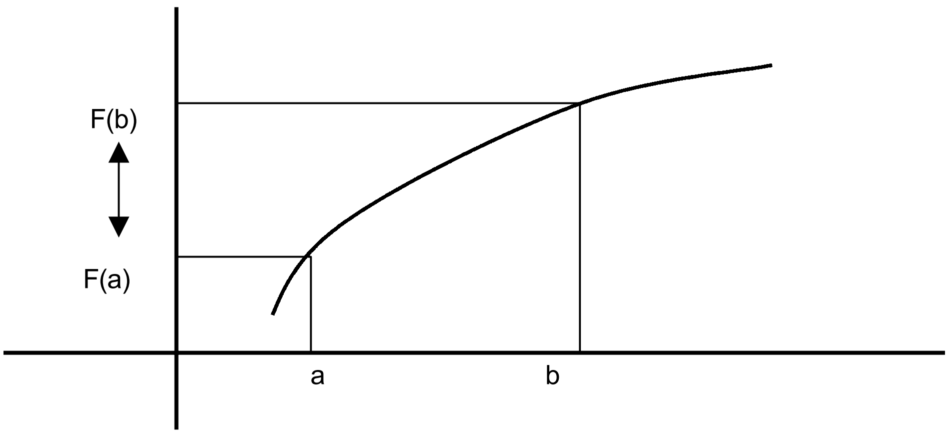


Intuitivamente significa que la gráfica de la función corta el eje **X** ya que pasa de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra encima, o recíprocamente.

Ejemplo
Demuestra que la ecuación $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo [0, 1].

- Consideramos la función $f(x) = e^{-3x} + 4x - 2$, continua en **R**, pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en [0, 1].
- Por otra parte, tenemos que:
  $$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e^{-3} + 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(0) \neq \text{ signo de } f(1)$$
- Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.
  La raíz de la ecuación es c.

- **Teorema de DARBOUX** o del valor intermedio (1842-1917)
Si una función es continua en [a,b], entonces la función toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).
Interpretación geométrica:



- **Teoremas de ACOTACIÓN**:
a) En un punto.- Si una función es continua en un punto x=a entonces está acotada en un entorno de este punto.
b) En un intervalo.- Si una función es continua en [a,b], entonces esta función está acotada en dicho intervalo.

- **Teorema de WEIERSTRASS** (1815-1897).
Si una función es continua en [a,b], entonces la función tiene máximo absoluto y mínimo absoluto en [a,b].
Intuitivamente, esto significa que la gráfica de la función debe tener un punto más alto o igual que los demás y otro más bajo o igual que los restantes. Este teorema implica evidentemente que la función continua definida en el intervalo [a,b] está acotada

PROBLEMAS.

1º- Probar que $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ y $g(x) = \dfrac{x}{2}$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$

2º- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+1}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{3}{x-3}$

c) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x-4}$ d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

e) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+8}{x^2-2}$

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{x^2-1}$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

i) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ j) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

3º- Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\frac{6}{4+e^{-\frac{1}{x}}}$

4º- Hallar los límites laterales de $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{x}}$ cuando $x\to 0$

5º- Hallar las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

6º- Calcular los siguientes límites:

6.1 $\lim_{x\to 0}\frac{sen3x\cdot sen5x}{(x-x^2)^3}$ 6.2 $\lim_{x\to 1}\frac{sen(x-1)}{x^2-x}$ 6.3 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{1-cosx}$

6.4 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{x\,\mathrm{cotgx}}$ 6.5 $\lim_{x\to\infty}xsen\frac{1}{x}$ 6.6 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x^2+x}$

6.7 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{sen2x}$ 6.8 $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{e^{2x}-1}$

7º- Calcular el valor de **n** para que el límite siguiente

$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x^n}$ sea un número finito.

8º-Calcular los siguientes límites:

8.1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{2senx}$ 8.2 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+2x-8}$ 8.3 $\lim_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4+2x^2-1})$

8.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{senx}$ 8.5 $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x-2}{x+2}\right]^{\frac{1}{x-2}}$ 8.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{1-\sqrt{1+2x}}$

8.7 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$ 8.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2}}\right]^{\frac{ax^2+1}{x}}$

9º- Estudiar si existen o no los límites en **x=2** y **x=3** de la función $f:\Re-\{2,3\}\to\Re$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

10º- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x-3}{x^2-1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen2x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Lnx}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot arctg\frac{x}{2}}{(sen2x)^3\cdot cosx}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}5cotg\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{1-cosx}$

11º- Hallar el dominio y las asíntotas de:

11.1 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 11.2 $y=\sqrt{x^2-4}$ 11.3 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+9}$ 11.4 $y=\ln(x^2-5x+4)$

11.5 $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

12º-Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tagnx- ntagx}}{\text{nsenx- sennx}}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\,\text{arctagx})\cdot(\text{lnx})$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\,\text{lnx- x}+1}{(\text{x-}1)\,\text{lnx}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{\text{sen}\,4\,\text{x}}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\_\text{arctagx- x}}{2\,\text{x- arcsenx}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}^3 3\,\text{x}}{\text{sen}^2 2\,\text{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\text{cotagx})^{\text{x}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{cosx})\cdot(\text{cotagx})$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{1}{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)^{x^2}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\text{senx}}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\dfrac{2^x+3^x}{2}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\,\text{sen}\frac{1}{\text{x}}}{\text{senx}}$ 14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\text{cosax})}{\ln(\text{cosbx})}$

16. $\lim_{x\to 0}(\text{arcsenx}\cdot\text{cotagx})$ 17. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\text{senx}}{\text{x- senx}}$ 18. $\lim_{x\to\infty}(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

13º-Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, estudiando a la vez el comportamiento en los puntos de la posible discontinuidad:

1. $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ 2. $f(x)=\frac{1}{1-cosx}$ 3. $f(x)=x^2-E(x)$

4. $f(x)=\frac{1-x}{1-|x|}$ 5. $f(x)=\begin{cases} e^x & si,\quad x>0 \\ 1 & si,\quad x=0 \\ 1+x+\frac{x^2}{2} & si,\quad x<0 \end{cases}$

14º- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -3senx & si,\quad x\le -\frac{\pi}{2} \\ Asenx+B & si,\quad -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2} \\ \cos x & si,\quad \frac{\pi}{2}<x \end{cases}$ hallar A y B para que la función sea continua en todos sus puntos.

15º- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\frac{2-cosx}{4+3senx}$.

16º- Sea la función $f(x)=\begin{cases} x & x\le 1 \\ 3 & 1<x<3 \\ x^2-1 & x\ge 3 \end{cases}$

a) Representar la función
b) Estudiar la continuidad de f(x)

17º- Representar la función siguiente: $f(x)=\begin{cases} x & x\le -1 \\ 1-x^2 & -1<x\le 2 \\ -3 & 2<x \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f(x) y clasificar las discontinuidades si existen.

18º-Dada la función $f(x)=\frac{(1+x)^n-1}{x}$ con **n** perteneciente a **N** estudiar su continuidad. Calcular f(0) de modo que f(x) sea continua para todo x real.

19º-Dada la función $f(x):\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} kx-2 & x\leq 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$ determina los valores de **k** para que sea continua en x=1.

20º-Dada la función $f(x)=(x-1)|x-1|$ estudiar su continuidad.

21º-Representa gráficamente y estudia los puntos de discontinuidad de $f(x)=x-E(x)$ para x perteneciente a $\Re$

22º-Probar que existe x perteneciente a $\Re$ tal que $1+senx+sen^2x+sen^3x=sen^4x$

23º-¿Es aplicable el teorema de Bolzano a $f(x)=\dfrac{x^2+1}{cosx}$ en el intervalo $[0,\pi]$?

24º-Sea f(x) y g(x) dos funciones continuas en el intervalo [a,b] tales que f(a)>g(a) y f(b)<g(b). Probar que en estas condiciones existe **c** perteneciente a (a,b) tal que f(c)=g(c). Interpreta geométricamente el resultado.

25º-Demostrar que la ecuación $x^3-3x+1=0$ posee al menos una raíz real y calcularla con dos cifras decimales exactas.

26º-Calcular a y b para que la función f(x) sea continua en todos los reales.

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{x^2}, & si, \quad x\leq 0 \\ ax+b, & si, \quad 0<x<1 \\ 1+xlnx & ,si, \quad x\geq 1 \end{cases}$$

27º-Sea f(x) la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,si, \quad x<0 \\ ax+b, & si, \quad 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & ,si, \quad 3<x \end{cases}$$

Calcular a y b para que sea continua en su dominio.

PROBLEMAS RESUELTOS.-

1º- Calcular: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$ Sol: 3

2º- Determinar **a** para que se verifique $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$ Sol: a=4

3º- Calcular: $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$. Sol: a/2

4º- Calcular el límite de la función $f(x)=\dfrac{1-cosx}{x^2}$ al tender x respectivamente hacia 0, 1 y $+\infty$.

Sol: 1/2, 1-cos 1 , 0.

5º-Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$. Sol: e^2

6º-Calcular el valor de la constante c para que el límite de la función: $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{cx}$ sea **e** al tender x hacia $+\infty$. Sol: c=1/3.

7º-Calcula: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1+tgx}{1+senx}\right)^{\frac{1}{senx}}$ Sol: 1.

8º-Enuncia el teorema de Bolzano. Usando este teorema, demostrar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución x_0 tal que $1<x_0<2$

9º-De dos funciones F(x) y G(x) se sabe que son continuas en el intervalo [a,b] que F(a)>G(a) y que G(b)>F(b). ¿Se puede demostrar que existe algún punto t de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones ?

10º-Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x} & si,\quad x\neq 1\\ 1 \quad si, & x=1\end{cases}$ estudiar la continuidad en el punto x=1.

Sol: no continua.

11º-Probar que la función **f** definida por $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ no es continua en x=1. Indicar que tipo de discontinuidad se presenta en dicho punto.

12º-Estudiar la continuidad de la función **f: R->R** definidas por **f(x)=x-E(x),** E(x) designa la parte entera de x, esto es, el mayor entero menor o igual que x.

13º-Estudiar en el campo real la continuidad de la función **f** definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x+1}, & para,\quad x\leq 0\\ x^2+1, & para,\quad x>0\end{cases}$$

Sol: cont. en **R-{0}**

14º-Determinar los números reales **a y b** para que la función definida en **R** por:

$$f(x)=a\,e^{\frac{sen^2x}{x}}+bcosx,\quad si,\quad x<0.$$

f(0)=6

$$f(x)=3a\frac{senx}{x}+b(x-1),\quad si,\quad x>0$$

sea continua en toda la recta real. Sol: a=3 ; b=3.

15º-Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación: $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución **c** tal que **1<c<2.**

16º-¿Puede existir una función f acotada en [1,3] con f(1)<0, f(3)>0, y tal que no exista cε]1,3[con f(c)=0?.

17º-Probar que las gráficas de **f(x)=ln x** y **g(x)=e^{-x}** se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.

18º-Probar que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene siempre alguna solución real. ¿Es también esto cierto para $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?.

19º-Prueba que la ecuación **x²=18·ln x** posee una única solución en el intervalo [1,e]

20º-Estudia la continuidad de la función definida por: **f(x)=|2x-|3-2x||**

21º-Calcular $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ Sol: $L = e^{-6}$

22º-Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2}$ Sol: 1/2

23º-Enunciar las condiciones que deben de cumplir dos funciones para poderse aplicar la regla de L'Hôpital. Calcular:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9} \qquad \text{Sol: } 3$$

24º-Determina las asíntotas de la función **f** definida por: **f(x)=x·e$^{1/x}$**.

25º-Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^{senx} - x - 1}{2x^2 - x^3}$ Sol: 1/4

26º-Calcular el límite $\lim_{x\to 0} cotanx - \frac{1}{x}$ Sol: 0

27º-Calcular $\lim_{x\to 0} x^{senx}$ Sol: $e^0 = 1$

28º- Comprueba los siguientes límites:

1.- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$

2.- $\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)\,tg(\frac{\pi}{2}x) = \frac{-4}{\pi}$

3.- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = -\frac{1}{2}$

4.- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{cotg\ x} = 0$

5.- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

6.- $\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

7.- $\lim_{x \to 0} \operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} = 0$

8.- $\lim_{x \to 1} \frac{sen(x - 1)}{x^2 - 3x + 2} = -1$

9.- $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tgx - 3}{secx + 1} = 1$

10.- $\lim_{x \to 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \frac{1}{3}$

11.- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{senx}}{x^3} = \frac{1}{6}$

12.- $\lim_{x \to \pi/2} (senx)^{tgx} = 1$

13.- $\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)^{\frac{1}{x}} = 1$

14.- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^2$

15.- $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\ 3x}{tg\ 5x} = \frac{5}{3}$

16.- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx} = 2$

17.- $\lim_{x \to 0} (senx)^x = 1$

18.- $\lim_{x \to 0^+} (tg\, x \ .\ \ln x) = 0$

19.- $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} \right)^{x + 2} = e^2$

20.- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{senx} \right) = 0$

21.- $\lim_{x \to 0^+} [\ x\ (\ln x)^n] = 0$

22.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln^4 x}{x^2} + 1 = 1$

23.- $\lim_{x \to 0} (senx + cosx)^{cotgx} = e$

24.- $\lim_{x \to \infty} \left(x \ln \frac{1 + x}{x} \right) = 1$

15.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

26.- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{2}$

27.- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

28.- $\lim_{x \to \infty} x\ (5^{\frac{1}{x}} - 1) = \ln 5$

29 $\lim_{x \to 0} x^x = 1$

30.- $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}} = \frac{1}{e}$

31.- $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{lnx} \right) = \frac{1}{2}$

32.- $\lim_{x \to \pi/2} cosx\ \ln(tgx) = 0$

33- $\lim\limits_{x \to \pi/4} tgx^{\frac{1}{\cos 2x}} = \frac{1}{e}$

34.- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \; lnx = 0$

35.- $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} = 1$

36.- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3^x}{x^3} = \infty$

37.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - sen\, x}{x^3} = -\frac{1}{3}$

38.- $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$

39.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{7x} = e^{35}$

40.- $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) \ln(x-1) = 0$

41.- $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x^2}} = 1$

42.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 2x^2 - 1}{3x^2} = -\frac{5}{6}$

43.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{tg\, x - sen\, x} = \frac{1}{3}$

44.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x + sen\, x} = \frac{1}{2}$

45.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 \; sen\, x}{(1 - \cos x)^2} = 4$

46.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, x}{tg\, x} = 1$

47.- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x \; tg\, x = 0$

48.- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0$

49.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$

50.- $\lim\limits_{x \to \infty} x \; sen \frac{a}{x} = a$

51.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x - sen\, x}{x^3} = \frac{1}{2}$

52.- $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{cotg^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$

53.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(sen\, x + tg\, x)^2} = \frac{1}{4}$

54.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - sen\, 2x}{x + sen\, 3x} = -\frac{1}{4}$

55.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcotg\, x - x}{x - sen\, x} = -2$

56.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcotg\, x - x - \frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{2}{3}$

57.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = -1$

58.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = a\,.\,b$

59.- $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{tg\, x} = 1$

60.- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = 0$

61.- $\lim\limits_{x \to 0} x\,.\, \ln x = 0$

62.- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \dfrac{1}{2}$

63.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right) = \dfrac{1}{2}$

64.- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x} = 1$

65.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - 2}{(26 + x)^{1/3} - 3} = 54$

66.- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^{1/3}}{1 + x^{1/5}} = \dfrac{5}{3}$

67.- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

68.- $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{2x} = 1$

69.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x + 1)} \right) = -\dfrac{1}{2}$

70.- $\lim\limits_{x \to 0} x^{sen\, x} = 1$

71.- $\lim\limits_{x \to 1} \left(tg\left(\dfrac{\pi}{4} x \right) \right)^{tg\left(\frac{\pi}{2} x \right)} = \dfrac{1}{e}$

72.- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tg \dfrac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \pi/2}} = 1$

73.- $\lim\limits_{x \to \infty} x^{sen \frac{1}{x}} = 1$

74.- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{tg\, x} = \dfrac{1}{e}$

75.- $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(\dfrac{x - a}{x + a} \right) = -2a$

76.- $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)\; tg \dfrac{\pi\, x}{2} = \dfrac{2}{\pi}$

77.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 - x)\, e^x - (2 + x)}{x^2} = 0$

78.- $\lim\limits_{x \to 0} x\,.\, sen \dfrac{1}{x} = 0$

79.- $\lim\limits_{x \to \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} = e^2$

80.- $\lim\limits_{x \to \pi} (x - \pi)\; tg\left(\dfrac{x}{2} \right) = -2$

81.- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + sen\, x)^{\operatorname{cosec}(x/2)} = e^2$

82.- $\lim\limits_{x \to 0} (cotg\, x)^x = 1$

82.- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - e^{-x} \right)^{e^x} = \frac{1}{e}$

84.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(sen\ x \right)^{tg\ x} = 1$

85.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - sen\ 2x}{x + sen\ 4x} = -\frac{1}{5}$

86.- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{tg\ x - x}{x - sen\ x} = 0$

87.- $\lim\limits_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{cotg\ x} = 1$

88.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x^3} = \frac{1}{6}$