Matrices

1. Escribir la matriz A de dimensiones 5 x 4 y elementos:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & si \quad i < j \\ 2i - 3j & si \quad i \geq j \end{cases}$$

2. Una fábrica de embutidos comercializa tres tipos de productos: salchichón, chorizo y morcilla. Para su fabricación se utilizan gordos de cerdo, sangre, carne magra, cebolla y especias. La siguiente matriz, da la composición en tantos por ciento de un kilo de cada uno de los productos:

La fábrica dispone de 3 plantas donde, en total, se fabrican diariamente 200 kg de salchichón, 150 de chorizo y 100 de morcilla, según indica la siguiente matriz:

	Salchichón	**Chorizo**	**Morcilla**
Gordos	20	30	40
Sangre	0	0	30
Carne	70	40	0
Cebolla	0	0	20
Especias	10	30	10

	Planta 1ª	**Planta 2ª**	**Planta 3ª**
Salchichón	60	70	70
Chorizo	50	50	50
Morcilla	70	30	0

Sabiendo que el kilo de gordos cuesta 0,80 €, el de sangre 0,70 €, el de carne magra 3 €, el de cebolla 0,20 € y el de especias 1,2 €, ¿qué dinero en materias primas gasta cada planta de fabricación en un día?

3. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ pertenecen a $\mathbf{M}_{3x4}$ y $a_{ij} = i-j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j} + 2^{j+1}$, calcular la matriz A+B.

4. Resolver la ecuación matricial X A = B + C, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. Calcular la matriz X que verifica AXB - 3A = I, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

7. Resolver la ecuación $A^{-1}XB - 2CD = B^2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

y D = (1 3).

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcular $A+A^t$ y $A-A^t$, indicando de qué tipo es cada una de ellas.
b. Descomponer la matriz A como suma de una simétrica y otra antisimétrica.
c. Demostrar que en general, dada una matriz de orden n, puede descomponerse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

9. Si A es una matriz cuadrada cualquiera, demostrar que entonces AA^t, A^tA y $A + A^t$ son matrices simétricas.

10. Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss - Jordan.

11. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ determinar el valor de **x** e **y** para que se verifique $A^2 + xA + yI_2 = 0$. Hallar después todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación anterior.

13. Una matriz cuadrada A es **idempotente** si verifica que $A^2 = A$.

a. Comprobar que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.
b. Escribir todas las matrices diagonales de orden 3 que sean idempotentes.
c. ¿Qué condiciones ha de cumplir una matriz de orden 2 para que sea idempotente?

14. Se dice que una matriz A es **nilpotente** de orden n, si verifica que $A^n = 0$. Hallar el orden de nilpotencia de la matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Encontrar la matriz A que verifique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Encontrar todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcular A^2, A^3, A^4.
b. Sea B = I + A; expresar B^2 y B^3 en función de I, A y A^2.
c. Demostrar que la inversa de B es $I-A+A^2$.

18. Una matriz A es **periódica** si $A^{n+1} = A$ para algún entero positivo n. Al menor entero positivo para el que esto ocurre se le llama **período**. Calcular el período de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz A^{100}.

19. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar A^{35}.

20. Hallar **a** y **b** de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique que $A^2 = 2A$. Para estos valores de **a** y **b**, y tomando $B = \frac{1}{2}A$ calcular A^{50} y B^{50}.

21. Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$, comprobar que A es inversible.

22. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ hallar A^{428}.

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ determinar, si es posible, un valor λ para el que

la matriz $(A - \lambda I)^2$ sea la matriz nula.

24. Hallar la potencia n-ésima de:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

25. Resolver el sistema $\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$

26. Hallar las matrices A y B que verifican el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A + B = C \\ 2A + 3B = D \end{cases}$

siendo $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

27. a) Obtener todas las matrices de orden 2 tales que $A^2 = I_2$.
b) Obtener todas las matrices de orden 2 tales que $A \neq 0$ y $A^2 = 0$.

28. Hallar el rango de las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

29. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

30. Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de **t**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$