

### Ejercicio 1 del modelo 5 de la opción A de sobrantes de 2001

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) [ 1'25 puntos] Determina  $m$  sabiendo que  $f$  es derivable.

(b) [ 1'25 puntos] Calcula  $\int_{-1}^1 f(x) dx$

### Solución

(a)

Como es derivable tenemos  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  y  $f'(x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -m-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como es derivable, lo es en  $x = 0$ , es decir  $f'(0) = f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-m-2x) = -m$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [1/(1-x)^2] = 1/1 = 1; \text{ por tanto } -m = 1, \text{ de donde } m = -1$$

La función es  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1+x-x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(b)

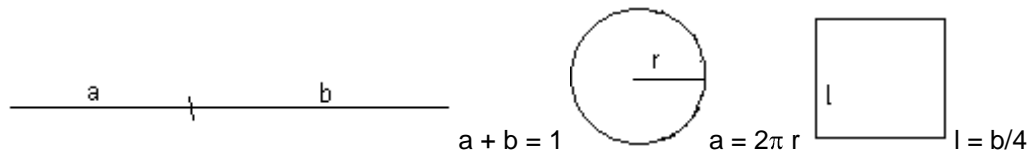
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 [1/(1-x)] dx + \int_0^1 (1+x-x^2) dx =$$

$$= [-\ln|1-x|]_{-1}^0 + [x + (x^2/2) - (x^3/3)]_0^1 = [(-\ln(1)) - (-\ln(2))] + [(1 + 1/2 - 1/3) - 0] = \ln(2) + 7/6 \text{ u.a.}$$

### Enunciado del Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 5 de 2001

[ 2'5 puntos] Un hilo de alambre de 1 m. de longitud se corta en dos trozos formando con uno una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

### Solución



Como el lado del cuadrado es doble que el radio de la circunferencia

$$l = b/4 = 2r = 2 \cdot (a/2\pi). \text{ Operando nos queda } b = (4a) / \pi$$

$$A = \text{Área total} = \text{área círculo} + \text{área cuadrado} = \pi \cdot r^2 + (b/4)^2 = \pi \cdot (a^2 / 4\pi^2) + (a^2 / \pi^2) = a^2 \cdot [ 1/(4\pi) + 1/\pi^2 ]$$

Derivando

$$A' = 2a \cdot [ 1/(4\pi) + 1/\pi^2 ]$$

$A' = 0$ , nos dá  $a = 0$  que es el posible mínimo. Veámoslo  $A'' = 2 \cdot [ 1/(4\pi) + 1/\pi^2 ] > 0$ , luego es mínimo.

### Enunciado del Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 5 de 2001

[ 2'5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial,  $AX = -AX + B$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### Solución

$AX = -AX + B$ ;  $2AX = B$ . Si existiese  $A^{-1}$ , multiplicando por la izquierda por  $A^{-1}$  obtendríamos

$$X = 1/2 \cdot A^{-1} \cdot B$$

Para que exista  $A^{-1}$  tiene que ser  $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \text{ luego existe } A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 7 & 10 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/11) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 7 & 10 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = (1/2) \cdot A^{-1} \cdot B = (1/2) \cdot (1/11) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 7 & 10 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/22) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 48 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/22 \\ 48/22 \\ -7/22 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema es  $X(x,y,z) = (-3/22, 48/22, -7/22)$

### Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 5 de 2001

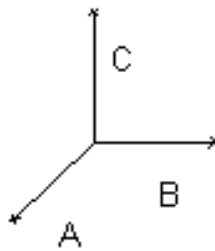
Considera el plano  $\pi \equiv 2x + y + 2z - 4 = 0$

(a) [ 1'75 puntos] Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

(b) [ 0'75 puntos] Calcula la distancia del origen al plano dado.

### Solución

(a)



El punto A se obtiene resolviendo el sistema  $\pi = 0, y = 0, z = 0$ , con lo cual  $x = 2$  y el punto es  $A(2,0,0)$

El punto B se obtiene resolviendo el sistema  $\pi = 0, x = 0, z = 0$ , con lo cual  $y = 4$  y el punto es  $B(0,4,0)$

El punto C se obtiene resolviendo el sistema  $\pi = 0, x = 0, y = 0$ , con lo cual  $z = 2$  y el punto es  $C(0,0,2)$

$$\mathbf{AB} = (-2, 4, 0) ; \mathbf{AC} = (-2, 0, 2)$$

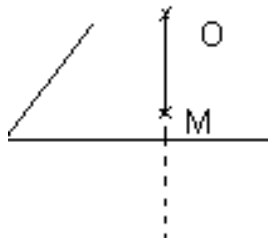
El área del triángulo es la mitad del modulo del producto vectorial de los vectores  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{AC}$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(8) - \vec{j}(-4) + \vec{k}(8) = (8, 4, 8)$$

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = (1/2) \cdot \sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = (1/2) \cdot \sqrt{144} = (1/2) \cdot 12 = 6 \text{ u.a.}$$

(b)

$d(0, \pi) = d(O, M)$ , siendo M el punto de corte de la recta r perpendicular al plano  $\pi$  por el origen O. Dicha recta tiene como vector director  $\mathbf{v}$  el normal del plano  $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$



$$\text{la recta es } r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi$$

$$2(2\lambda) + \lambda + 2(2\lambda) - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 9\lambda = 4, \text{ de donde } \lambda = 4/9 \text{ y el punto es } M(2(4/9), (4/9), 2(4/9)), \text{ luego}$$

$$d(0, \pi) = d(O, M) = \|\mathbf{OM}\| = \sqrt{(8/9)^2 + (4/9)^2 + (8/9)^2} = \sqrt{(144/18)} = 12/9 \text{ u.l.}$$

### Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 5 de 2001

Considera la función  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4-x & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

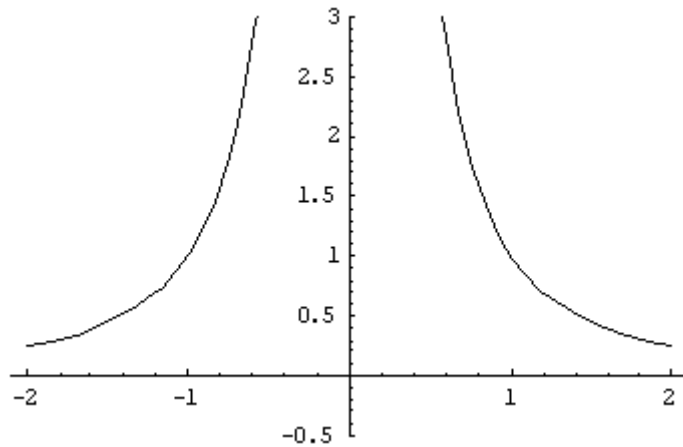
(a) [ 1 punto] Determina la gráfica de f.

(b) [ 1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

### Solución

(a)

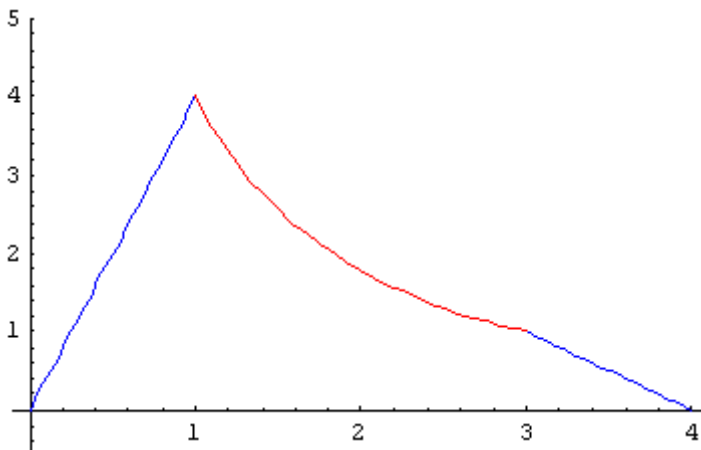
La gráfica de  $1/x^2$  es conocida



La gráfica de  $16 / (x + 1)^2$  es parecida a la de  $1/x^2$  pero desplazada una unidad hacia la izquierda en abscisas, está dibujada en rojo mas abajo.

Las gráficas de  $4x$  y de  $4 - x$  son rectas, luego sencillas de dibujar.

La gráfica global es



(b)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx + \int_3^4 f(x) \, dx = \int_0^1 (4x) \, dx + \int_1^3 \frac{16}{(x+1)^2} \, dx + \int_3^4 (4-x) \, dx \\ &= [2x^2]_0^1 + [-16/(x+1)]_1^3 + [(4x - x^2)/2]_3^4 = [(2) - 0] + [(-16/4) - (-16/2)] + [(16 - 8) - (12 - 9/2)] = 13/2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

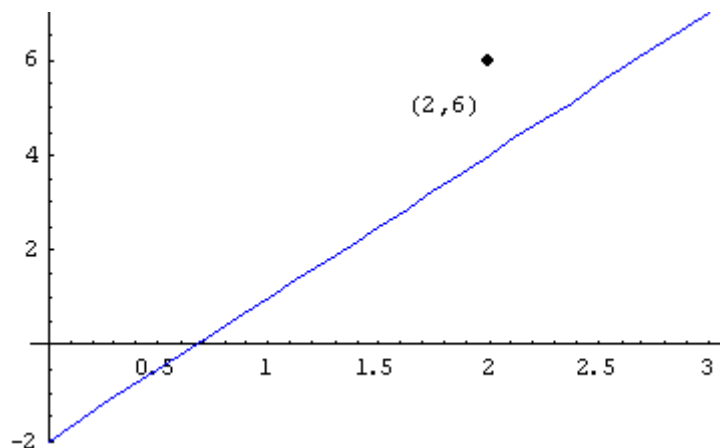
### Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 5 de 2001

[ 2'5 puntos] Considera la función  $f : [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3x - 2$ . Calcula el punto de la gráfica de  $f$  mas cercano al punto  $(2,6)$  y calcula también el mas alejado.

### Solución

Para calcular el punto mas cercano de  $f$  al punto  $A(2,6)$  tenemos que minimizar la función  $d(A,X)$ , siendo  $X$  un punto genérico del segmento

Veámoslo gráficamente antes



$$X(x,y) = X(x, 3x-2)$$

$$\mathbf{AX} = (x-2, 3x-2-6) = (x-2, 3x-8)$$

$$d(A,X) = \|\mathbf{AX}\| = \sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2} = d(x)$$

Derivamos para calcular los extremos relativos

$$d'(x) = \frac{2(x-1) + 2(3x-8) \cdot 3}{2\sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2}} = \frac{10x-25}{\sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2}}$$

$d'(x) = 0$ ;  $10x - 25 = 0$ , de donde  $x = 25/10 = 5/2$ . El punto sería  $X(5/2, 3(5/2)-2) = X(5/2, 11/2)$ .

Veamos si es máximo o mínimo, para lo cual entramos en la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{10 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2} - (10x-25) \cdot \frac{10x-25}{\sqrt{(x-2)^2 + (3x-8)^2}}}{(x-2)^2 + (3x-8)^2}$$

$$d''(5/2) = \frac{10 \cdot \sqrt{(5/2-2)^2 + (3(5/2)-8)^2} - 0}{\text{positivo}} > 0, \text{ luego es un mínimo}$$

Para calcular el punto más alejado del segmento al punto A(2,6), si nos fijamos en la gráfica el punto tiene que ser uno de los extremos del segmento, es decir el (0, -2) o el (3,7). Calcularíamos la distancia a ambos puntos y veríamos que el más alejado, que es el que lo hace máximo, es el (0,-2)

### Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 5 de 2001

[ 2'5 puntos] Determina todos los puntos del plano  $2x - y + 2z - 1 = 0$  que equidistan de los puntos A(3,0,-2) y B(1,2,0). ¿Qué representa geoméricamente?

**Solución**

Tomamos un punto genérico de dicho plano  $X(x,y,z)$

$d(A,X) = d(B,X)$ , es decir  $\| \mathbf{AX} \| = \| \mathbf{BX} \|$ ;  $\mathbf{AX} = (x-3, y, z+2)$ ;  $\mathbf{BX} = (x-1, y-2, z)$

$$\| \mathbf{AX} \| = \sqrt{(x-3)^2 + (y)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z)^2} = \| \mathbf{BX} \|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando nos queda  $-4x + 4y + 4z + 8 = 0$

Como el punto  $X$  es del plano, verifica la ecuación de dicho plano  $2x - y + 2z - 1 = 0$ . Por

tanto los puntos pedidos verifican a la vez  $\begin{cases} -x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ , que es la ecuación de una recta dada en su forma implícita.

### Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 5 de 2001

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz  $A =$

- (a) [ 1 punto] Determina para que valores del parámetro  $\lambda$  la matriz  $A$  no tiene inversa.  
(b) [ 1'5 puntos] Calcula, si es posible, la matriz inversa de  $A$  para  $\lambda = -2$ .

### Solución

(a) Para que  $A$  no tenga inversa tiene que ser  $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1(1-\lambda^2) - \lambda(\lambda) + 1(\lambda^2) = 1-\lambda^2 = 0; \text{ de donde } \lambda^2 = 1, \text{ y las soluciones son } \lambda = \pm 1. \text{ Por tanto si}$$

$\lambda = 1$  o  $\lambda = -1$  entonces no existe  $A^{-1}$ .

(b)

Calculemos  $A^{-1}$  para  $\lambda = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 1 - (-2)^2 = 1 - 4 = -3$$

La matriz inversa es  $A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t)$ ;  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ;  $\text{Adj}(A^t)$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$A^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-3) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$