

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 6 de 2001

Considera la función $f : (-\infty, 10) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} a^x & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$

- (a) [1 punto] Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).
 (b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .
 (c) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f .

Solución

$$(a) f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases} = \{\text{abrimos el valor absoluto}\}$$

$$= \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}$$

Como es continua en $x = 2$, tenemos que $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x > 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 5) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x < 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (a^x - 6) = a^2 - 6; \text{ por tanto } a^2 - 6 = 3; \text{ de donde } a^2 = 9 \text{ y } a = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$$

Como a es la base de una función exponencial tiene que ser positiva, luego $a = +3$

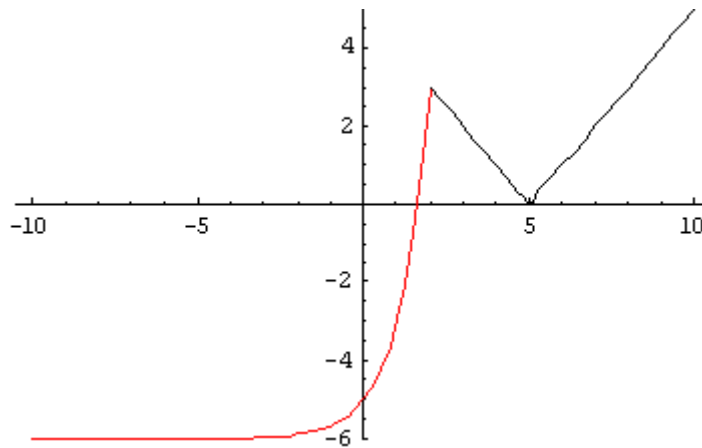
(b) la gráfica de $(3)^x - 6$ es como la de la exponencial $(3)^x$ (que es parecida a la de 2^x)

pero desplazada 6 unidades hacia abajo en ordenadas. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(3)^x - 6] = -6$, tiene una A.H. $y = -6$ en $-\infty$.

Para $x = 0$ vale -5 y para $x = 2^+$ vale 3

$x - 5$ y $-x + 5$ son recta y con dos valores se dibuja (le damos los extremos del intervalo de cada una)

La gráfica de la función pedida es



(c) A simplemente se ve que no va a ser derivable en $x = 2$ y $x = 5$. Veámoslo

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ -x + 5 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x < 10 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} 3^x \cdot \ln(3) & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 < x < 10 \end{cases}$$

Veamos la derivada en $x = 2$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3^x \cdot \ln(3)) = 9 \cdot \ln(3)$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-1) = -1. \text{ Como } f'(2^-) \neq f'(2^+), \text{ no existe } f'(2)$$

Veamos la derivada en $x = 5$

$$f'(5^-) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-1) = -1$$

$$f'(5^+) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (1) = 1. \text{ Como } f'(5^-) \neq f'(5^+), \text{ no existe } f'(5)$$

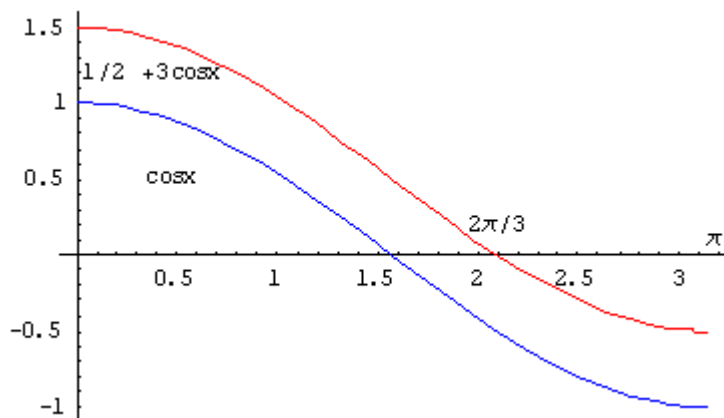
Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 6 de 2001

(a) [0'5 puntos] Determina el recinto limitado por la curva $y = 1/2 + \cos x$, los ejes coordenados y la recta $x = \pi$.

(b) [2 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a) La gráfica de $y = 1/2 + \cos x$ es la misma que la de $y = \cos x$ pero desplazada $1/2$ hacia arriba en ordenadas. El recinto limitado (en rojo) es



Veamos el punto de corte con abscisas

$$1/2 + \cos x = 0; \cos x = -1/2; x = \arccos(-1/2) = 120^\circ = (2\pi)/3$$

$$(b) \text{ \u00c1rea} = \int_0^{2\pi/3} (1/2 + \cos x) dx - \int_{2\pi/3}^{\pi} (1/2 + \cos x) dx = [x/2 + \text{sen}x]_0^{2\pi/3} - [x/2 + \text{sen}x]_{2\pi/3}^{\pi} =$$

$$= [(\pi/3 + \text{sen}((2\pi)/3)) - 0] - [(\pi/2 + \text{sen}(\pi)) - ((\pi/3 + \text{sen}((2\pi)/3)))] = \pi/3 + \sqrt{3}/2 - (\pi/2 - \pi/3 - \sqrt{3}/2) = \pi/6 + \sqrt{3} \text{ u.a.}$$

Ejercicio n\u00b0 3 de la opci\u00f3n A del modelo 6 de 2001

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$$

[2'5 puntos] Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A =$ verifica

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \text{rango}(A) = 2.$$

Soluci\u00f3n

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7+2a \\ -1+2b+3c \end{pmatrix}$$

$$\text{Igualando tenemos } \begin{cases} 9 = 7 + 2a \\ 4 = -1 + 2b + 3c \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} a=1 \\ 2b+3c=5 \end{cases}$$

$$\text{Tenemos } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}. \text{ Como } \text{rango}(A) = 2 \text{ tenemos que } |A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1-b & 1 & c-2b \end{vmatrix} = -4(c-2b) + 1(-1-b) = -4c+7b-1 = 0$$

Resolvemos el sistema por Cramer $\begin{cases} 2b+3c=5 \\ 7b-4c=1 \end{cases}$; $b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{23}{29}$; $c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{33}{29}$;

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 6 de 2001

[2'5 puntos] Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv x+y+z = 1$; $\pi_2 \equiv x-y+z = 2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z = 5$. ¿Se cortan π_1 y π_2 ?, ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

Solución

$\pi_1 \equiv x+y+z = 1$; $\pi_2 \equiv x-y+z = 2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z = 5$, con vectores normales $\mathbf{n}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{n}_2 = (1,-1,1)$ y

$\mathbf{n}_3 = (3,1,3)$

Para que π_1 corte a π_2 los vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 no pueden ser proporcionales, pero $1/1 \neq 1/-1$, por tanto no son proporcionales y los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Para que los tres planos se corten en un punto el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser distinto de cero, es decir $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \neq 0$, pero $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2,$

$\mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ porque la columna 1ª y 3ª son iguales, por tanto los tres planos no se cortan en un punto.

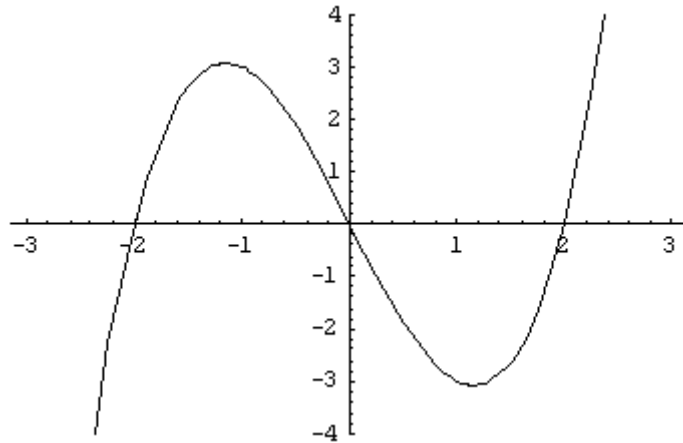
Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 6 de 2001

[2'5 puntos] Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas

Solución

Calculamos los cortes con abscisas $x^3 - 4x = 0 = x(x^2 - 4) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = \pm 2$

$y = x^3 - 4x$ es una cúbica con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Aunque no la piden la gráfica es



El área pedida es Área = $\int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = [x^4/4 + 2x^2]_{-2}^0 + [x^4/4 + 2x^2]_0^2$

= $[(0 - (4 - 8)) - [(4 - 8) - 0]] = 8$ u.a.

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 6 de 2001

[2'5 puntos] Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} + \alpha x)/(x - \text{sen}x)$. Calcula dicho límite.

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} + \alpha x)/(x - \text{sen}x) = (e^0 - e^0 + 0)/(0-0) = (0/0)$ {L'Hôpital}

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} + \alpha x)/(x - \text{sen}x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} + \alpha)/(1 - \text{cos}x) = (1+1+\alpha)/(1-1) = (2 + \alpha)/(0)$

Como el problema dice que existe límite tiene que ser $2 + \alpha = 0$, de donde $\alpha = -2$

Seguimos ya con el límite

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \text{cos}x) = (1 - 1)/(1 - 1) = (0/0)$ {L'Hôpital}

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2)/(1 - \text{cos}x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x})/(\text{sen}x) = (1 - 1)/(0) = (0/0)$ {L'Hôpital}

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x})/(\text{sen}x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x})/(\text{cos}x) = (1+1)/(1) = 2$

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 6 de 2001

(a) [1'5 puntos] Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x + my & = 0 \\ x + mz & = m \\ x + y + 3z & = 1 \end{cases}$$

(b) [1 punto] Resuelve el sistema anterior para $m = 6$

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) La matriz de los coeficientes es $A =$ y la matriz ampliada A^*

$$= \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & m \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el $\det(A)$ y aplicamos el teorema de Rouché

$$\det(a) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-m) - m(3-m) = -5m + m^2 = m(-5 + m)$$

$|A| = 0$ implica que $m(-5 + m) = 0$ de donde $m = 0$ y $m = 5$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 5$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. Sistema compatible y determinado, solución única.

Si $m = 0$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(0 - 0) = 0, \text{ rango}(A^*) = 2.$$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$ el sistema es compatible e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales luego depende de un parámetro y tiene infinitas soluciones.

Si $m = 5$

$$\text{En } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5) - 5(-4) = +20 \neq 0, \text{ rango}(A^*) = 3.$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b) Lo resolvemos para $m = 6$

El sistema es
$$\begin{cases} 2x+6y &= 0 \\ x+6z &= 6 \\ x+y+3z &= 1 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada A^*

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por Cramer. $|A| = m(1 - m) = 6(1 - 6) = -30$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = (-6(17)) / (-30) = 17/5; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = (2(12)) / (-30) = -4/5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = (-12 + 30) / (-30) = -3/5$$

La solución del sistema es $(x,y,z) = (17/5, -4/5, -3/5)$

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 6 de 2001

[2'5 puntos] Considera los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,0,2)$. Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A , B y C .

Solución

$\mathbf{AB} = (2,0,-2)$; $\mathbf{AC} = (1,-2,-1)$. El plano pedido π pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es paralelo a los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC}

$$\pi \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)(-4) - (y-2)(0) + (z-3)(-4) = -4x - 4z + 16 = 0.$$

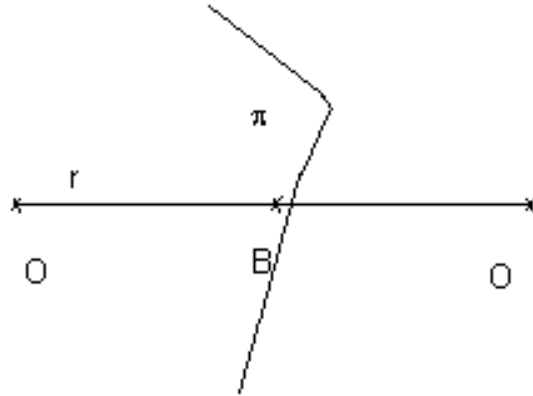
Simplificando tenemos

$$\pi \equiv x + z - 4 = 0$$

El simétrico de O respecto al plano π es el simétrico de O respecto del punto B , siendo $B = r \cap \pi$ con r la recta perpendicular a π por O , por tanto el director de r es el vector vector

normal de π ; $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (1,0,1)$

La recta r en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.



$$B = r \cap \pi$$

$(\lambda) + (\lambda) - 4 = 0$. Operando $2\lambda = 4$, de donde $\lambda = 2$.

El punto B es $B(2,0,2)$

B es el punto medio del segmento OO' , siendo O' el simétrico del punto O pedido, luego

$(2,0,2) = ((0+x)/2, (0+y)/2, (0+z)/2)$. Igualando nos queda $x = 4$, $y = 0$ y $z = 4$, luego el simétrico es

$O'(4,0,4)$