

Ejercicio 1 del modelo 2 de la opción A de sobrantes de 2002

(a) [1'5 puntos] Determina la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es -12.

(b) [1 punto] Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

Solución

$$(a) f'(x) = 2x^3 - 6x^2.$$

Los posibles máximos o mínimos son las soluciones de $f'(x) = 0$

$$2x^3 - 6x^2 = x^2(2x - 6) = 0 \rightarrow x^2 = 0, \text{ de donde } x = 0 \text{ y } 2x - 6 = 0, \text{ de donde } x = 3.$$

Como $f'(-1) < 0$, $f(x)$ decrece en $(-\infty, 0)$

Como $f'(1) < 0$, $f(x)$ decrece en $(0, 3)$

Como $f'(4) > 0$, $f(x)$ crece en $(3, +\infty)$

Por definición $x = 3$ es un mínimo, y su valor era -12 es decir $f(3) = -12$

Por el teorema fundamental del cálculo integral

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^3 - 6x^2) dx = 2 \cdot x^4/4 - 6 \cdot x^3/3 + K = 1/2 \cdot x^4 - 2x^3 + K$$

$$\text{De } f(3) = -12 \rightarrow -12 = 1/2(3)^4 - 2(3)^2 + K.$$

$$\text{Operando } K = 51/2 \text{ luego } f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 2x^3 + 51/2.$$

(b) Los puntos de inflexión son las soluciones de $f''(x) = 0$, siempre que en ellos haya cambio de curvatura.

$$f''(x) = 6x^2 - 12x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 6x(x - 2) = 0 \text{ de donde } x = 0 \text{ y } x = 2.$$

Como $f''(-1) > 0 \rightarrow f(x)$ es convexa (U) en $(-\infty, 0)$

Como $f''(1) < 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava (\cap) en $(0, 2)$

Como $f''(3) > 0 \rightarrow f(x)$ es convexa (U) en $(2, +\infty)$

Por definición $x = 0$ y $x = 2$ son puntos de inflexión.

$$\text{Recta tangente en } x = 0 \rightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 2x^3 + 51/2 \text{ y } f'(x) = 2x^3 - 6x^2.$$

$$f(0) = 51/2; f'(0) = 0$$

la recta tangente en $x = 0$ es $y - 51/2 = 0$

$$\text{Recta tangente en } x = 2 \rightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$f(x) = 1/2 \cdot x^4 - 2x^3 + 51/2 \text{ y } f'(x) = 2x^3 - 6x^2.$$

$$f(2) = 35/2; f'(2) = -8$$

la recta tangente en $x = 0$ es $y - 35/2 = -8(x - 2)$

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 2 de 2002

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 4|$

(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f .

(b) [0'75 puntos] Estudia su derivabilidad en $x = 4$.

(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

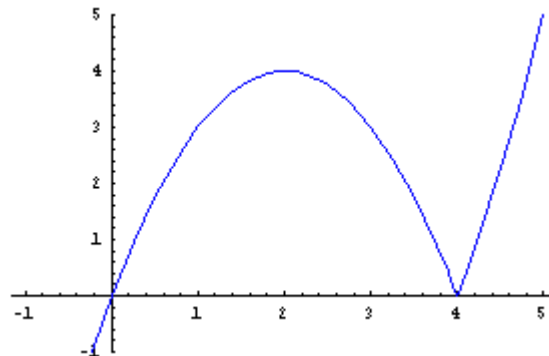
Solucion

$$f(x) = x|x - 4| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x < 4 \end{cases}, \text{ porque } |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

(a) $x^2 - 4x$ es una parábola con el vértice de abscisa $x = 2$ [$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$], luego en el punto $(2, f(2)) = (2, -4)$. Corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y las ramas hacia arriba. Solo la dibujaremos para $x \geq 4$

$-x^2 + 4x$ es una parábola con el vértice de abscisa $x = 2$ [$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$], luego en el punto $(2, f(2)) = (2, 4)$. Corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y las ramas hacia abajo. Solo la dibujaremos para $x < 4$

Luego la gráfica es



$$(b) f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x > 4 \\ -2x + 4 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Veamos si $f'(4^+) = f'(4^-)$

$$f'(4^+) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 4) = 4$$

$$f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-2x + 4) = -4$$

Como $f'(4^+) \neq f'(4^-)$, no existe $f'(4)$

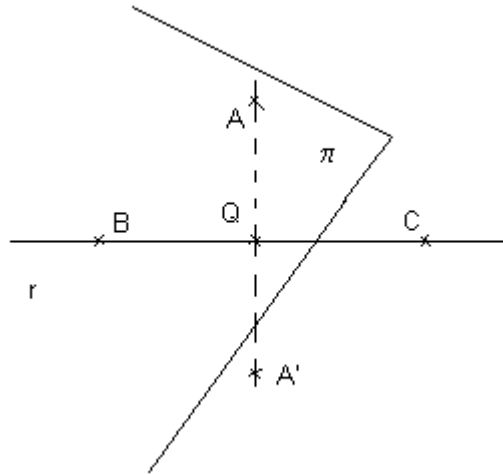
$$(c) \text{Área} = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = [-x^3/3 + 4x^2/2]_0^4 = (-4^3/3 + 4^3/2) = 32/3 \text{ u.a.}$$

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 2 de 2002

[2'5 puntos] Considera los puntos $A(1,-1,2)$, $B(1,3,0)$ y $C(0,0,1)$. Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C .

Solución

$A(1,-1,2)$, $B(1,3,0)$ y $C(0,0,1)$.



Calculamos el plano π que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r (determinada por B y C), por tanto su vector normal \mathbf{n} es el director de la recta $\mathbf{v} = \mathbf{BC} = (-1,-3,1)$

Después determinamos el punto Q como intersección de la recta r y el plano π

Por último A' es el simétrico de A respecto al punto Q

$r \equiv$ Tiene como punto $B(1,3,0)$ y como vector director $\mathbf{v} = \mathbf{BC} = (-1,-3,1)$ luego su ecuación sería

$$r \equiv \{x = 1 - \lambda, y = 3 - 3\lambda, z = \lambda\}$$

$$\pi \equiv \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = (-1)(x-1) + (-3)(y+1) + (1)(z-2) = -x - 3y + z - 4 = 0 \equiv \pi$$

$$Q = r \cap \pi$$

$$-(1-\lambda) - 3(3 - 3\lambda) + (\lambda) = 0 \rightarrow 11\lambda = 14 \rightarrow \lambda = 14/11$$

$$Q(1 - 14/11, 3 - 3(14/11), 14/11) = Q(-3/11, -9/11, 14/11)$$

$Q(-3/11, -9/11, 14/11)$ es el punto medio de $A(1,-1,2)$ y $A'(x,y,z)$, luego

$$-3/11 = (x+1)/2, \text{ de donde } x = -17/11$$

$$-9/11 = (y-1)/2, \text{ de donde } y = -7/11$$

$$14/11 = (z+2)/2, \text{ de donde } z = 6/11$$

El simétrico buscado es $A'(x,y,z) = A'(-17/11, -7/11, 6/11)$

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 2 de 2002

[2'5 puntos] Sean $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Determina α , si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$$AX = b, BX = c$$

Tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

Solución

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para que $AX = b$ tenga infinitas soluciones por el Teorema de Rouché $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) < 3$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}, y M^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1-\alpha & 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ con lo cual tiene que ser } \det(M) = |M| = 0.$$

Calculamos el determinante de M

$$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_1 + C_3(-\alpha) \\ C_1 + C_2(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1-2\alpha & 1 & 2 \\ 2-3\alpha & -1-2\alpha & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} =$$

$$= (-1 - 2\alpha)(-2 - \alpha) - (2 - 3\alpha) = 2\alpha^2 + 8\alpha$$

De $|M| = 0$, tenemos $2\alpha^2 + 8\alpha = 0$, por tanto $\alpha(2\alpha + 8) = 0$, de donde $\alpha = 0$ y $\alpha = -4$

$$\text{Si } \alpha = 0 \text{ en } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(M) = 2$$

$$\text{En } M^* \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \{ (2^a C + 3^a C) \} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-4+4) = 0, \text{ rango}(M^*) = 2$$

Por tanto como $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas el sistema tiene infinitas soluciones

$$\text{Si } \alpha = -4 \text{ en } M = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ rango}(M) = 2$$

$$\text{En } M^* \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_1+C_3 \\ C_2+C_3 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (-1)(-12 + 24) \neq 0, \text{ rango}(M^*) = 3$$

Por tanto como $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(M^*) = 3$, el sistema es incompatible.

Repetimos el proceso

Para que $BX = c$ tenga infinitas soluciones por el Teorema de Rouché $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) < 3$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con lo cual tiene que ser } \det(M) = |M| = 0.$$

Calculamos el determinante de M

$$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = (-\alpha)(-1) \begin{vmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha(2\alpha - 1)$$

$$|M| = 0 \rightarrow \alpha(2\alpha - 1) = 0, \text{ de donde } \alpha = 0 \text{ y } \alpha = 1/2$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \text{ en } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(M) = 2$$

$$\text{En } M^* \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener una fila de ceros, } \text{rango}(M^*) = 2$$

Por tanto como $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas el sistema tiene infinitas

soluciones

$$\text{Si } \alpha = 1/2 \text{ en } M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ rango}(M) = 2$$

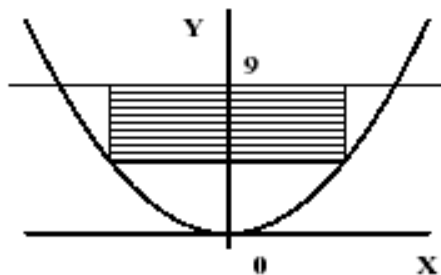
$$\text{En } M^* \text{ como } \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1/2)(-5+4) \neq 0, \text{ rango}(M^*) = 3$$

Por tanto como $\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(M^*) = 3$, el sistema es incompatible.

En ambos casos los sistemas tienen infinitas soluciones solo cuando $\alpha = 0$.

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 2 de 2002

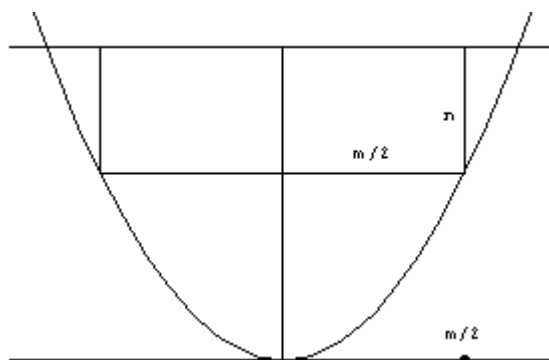
[2'5 puntos] Considera el recinto limitado por la curva $y = 1/3 x^2$ y la recta $y = 9$.



De entre todos los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.

Solución

Tomamos como lados del rectángulo m y n , luego la mitad de la base es $m/2$



Hay que optimizar Área = $A = m \cdot n$

La relación es $n = \text{ordenada recta} - \text{ordenada parábola en } (m/2) = 9 - 1/3(m/2)^2 = (108 - m^2)/12$

Luego $A = m \cdot n = m \cdot (108 - m^2)/12 = (108m - m^3)/12$

Calculamos A' y la igualamos a cero para ver el posible máximo

$$A' = (108 - 3m^2)/12 \rightarrow A' = 0 \rightarrow (108 - 3m^2)/12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3m^2 = 108 \rightarrow m^2 = 36 \rightarrow m = \pm 6.$$

Solo tomamos la solución positiva porque es una distancia, luego $m = 6$ y por tanto

$$n = (108 - m^2)/12 = (108 - 36)/12 = 6$$

Luego el rectángulo es un cuadrado de lado 6

Veamos que efectivamente es un máximo comprobando que la 2ª derivada es menor que cero.

$$A' = (108 - 3m^2)/12$$

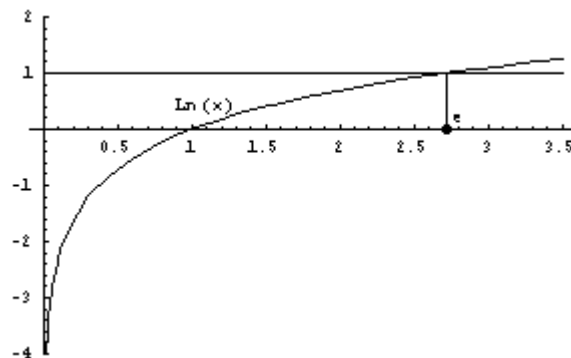
$$A'' = (-6m)/12 \rightarrow A''(6) = (-36)/12 = -3 < 0, \text{ luego es un máximo.}$$

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 2 de 2002

[2'5 puntos] Sea $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x . Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \text{Ln}(x)$. Calcula su área.

Solución

La gráfica de $\text{Ln}(x)$ es conocida (recíproca de la exponencial e^x , luego simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante $y = x$)



$$\text{Ln}(x) = 1, \text{ por definición } x = e^1 = e$$

$$\text{Area} = \int_{+0}^{+1} (1) dx + \int_{+1}^{+e} (1 - \text{Ln}(x)) dx$$

Calculamos $\int \text{Ln}(x) dx =$ que es una integral por partes

$$u = \text{Ln}(x) \rightarrow du = (1/x) dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = \int dx = x,$$

$$\text{luego } \int \text{Ln}(x) dx = x\text{Ln}(x) - \int x(1/x) dx = x\text{Ln}(x) - \int dx = x\text{Ln}(x) - x$$

$$\text{Area} = \int_{+0}^{+1} (1) dx + \int_{+1}^{+e} (1 - \text{Ln}(x)) dx =$$

$$= [x]_0^1 + [x - \text{Ln}|x| - x]_1^e = (1 - 0) + (e\text{Ln}(e) - 1\text{Ln}(1)) = (1 + e) \text{ unidades de área (u.a.)}$$

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 2 de 2002

Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$,

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.

(b) [1'5 puntos] Halla la ecuación del plano π_2 que es perpendicular a ambos que contienen a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

Solución

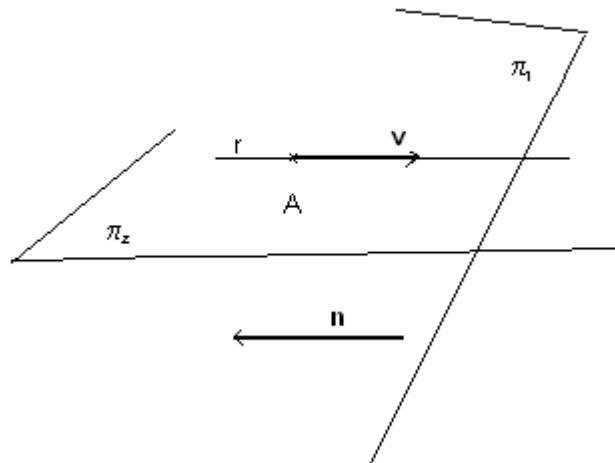
(a)

$\pi \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0$. Como π_1 es paralelo a π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$, π_1 es de la forma

$3x - y + 2z = k$, por ser paralelo a π . Ahora le imponemos la condición de que pasa por el punto P para calcular la constante k

$$3(1) - (-2) + 2(2) = k \rightarrow k = 9, \text{ luego el plano pedido es } \pi_1 \equiv 3x - y + 2z = 9$$

(b)



π_2 contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$ por tanto tiene una punto A de la recta r y uno de sus vectores paralelos es el vector director v de r . Además como π_2 es perpendicular a π_1 el vector normal $n = (3, -1, 2)$ de π_1 es paralelo al plano π_2 luego el plano π_2 está determinado por el punto A y los vectores independientes v y n , es decir tendrá de ecuación $\det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$.

Calculamos A y v

Para el punto A tomamos $z = 1$ en la recta r luego de $x - y + z = 1$ tenemos $x = y$. Entrando en la otra ecuación de r nos queda $2x + x - 4 = 1$, de donde $x = 1$ e $y = 1$. El punto es $A(1, 1, 1)$

Como la recta la dan como intersección de dos planos calculamos su vector director

como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(-6) + \mathbf{k}(3) = (3, 6, 3)$$

$$\text{El plano pedido es } \pi_2 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(15) - (y-1)(-3) + (z-1)(-21) = 15x + 3y - 21z + 3 = 0.$$

$$\text{Simplificando } \pi_2 \equiv 5x + y - 7z + 1 = 0$$

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 2 de 2002

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A =$

(a) [1 punto] Halla los valores de a para que la matriz $3A$ tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la inversa de A^2 para $a = 0$.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $3 \cdot A$ admita matriz inversa tenemos que ver que $\det(3 \cdot A) = |3 \cdot A| \neq 0$, pero $|3 \cdot A| = 3^3 \cdot |A|$ puesto que A es de orden 3×3 , y sale un 3 multiplicando de cada una de las filas de A . Por tanto tenemos que ver que $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 - a^2$$

Igualando a cero vemos que $a^2 = -1$ lo cual nos dá $a = \pm \sqrt{-1}$ (y no tiene soluciones reales, es decir $|A| \neq 0$ independientemente del valor de a , por tanto la matriz A siempre admite inversa.

(b)

$$\text{Para } a = 0, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = |A| \cdot |A| = (-1)(-1) = 1$$

$$(A^2)^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^2)^t$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } (A^2)^{-1} = 1/|A| \cdot \text{Adj}(A^2)^t = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$