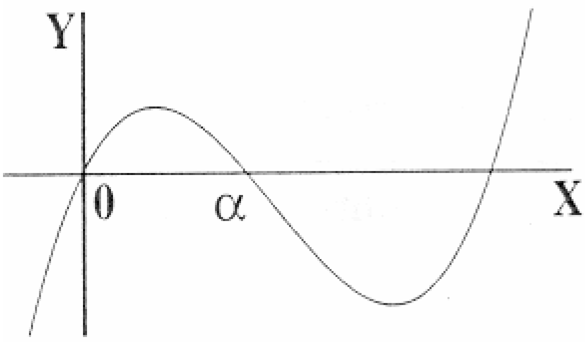
Ejercicio 1 del modelo 3 de la opción A de sobrantes de 2002

Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
(a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:
i) $F(\alpha) = 0$.
ii) $F'(\alpha) = 0$.
iii) F es creciente en $(0,\alpha)$.
(b) [1 punto] Calcula F(1) siendo f(t) = 1/[√)1+τ(]



Solución

(a) $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)\,dt \neq 0$ porque nos daría el área encerrada por la función f(x), el eje OX entre $x = 0$ y $x = \alpha$

$F'(x) = [\int_0^x f(t)\,dt]' = f(x)$, según el teorema fundamental del calculo integral, luego $F'(\alpha) = f(\alpha)$ y según la gráfica se observa que $f(\alpha) = 0$.

F es creciente en $(0, \alpha)$ si y solo si $F'(x) > 0$ en $(0, \alpha)$, pero $F'(x) = f(x)$ que es mayor que cero en $(0, \alpha)$, luego F(x) es creciente en dicho intervalo.

(b) $F(1) = \int_0^1$ 1/[√)1+τ(] dt = [2√])1+τ($^1{}_0$ = (2√)2() - (2√)1() = 2(√)2(- 1)

Cambio $t + 1 = x^2$

$dt = 2x\,dx$

∫ 1/[√])1+τ(dt = 2 ∫/ξ[√ξ(^{2})] dx =∫ 2x/x dx =∫ 2 dx = 2x =(quito cambio) =2√)1+τ(

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 3 de 2002

Considera la función f definida por $f(x) = (x^2 - 2x + 2)/(x - 1)$ para $x \neq 1$
(a) [1 '5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1 punto] Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Solución

Como $\lim_{x\to 1^+} (x^2 - 2x + 2)/(x - 1) = 1/0^+ = +\infty$, $x = 1$ es una A.V. de f

$\lim_{x\to 1^-} (x^2 - 2x + 2)/(x - 1) = 1/0^- = -\infty$

Tiene una A.O. y = mx + n porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$m = \lim_{x\to\infty} f(x) / x = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 2x + 2)/(x^2 - x) = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} [(x^2 - 2x + 2)/(x - 1) - x] =$

$= \lim_{x\to\infty} [((x^2 - 2x + 2 - x^2 + x)/(x - 1)] = \lim_{x\to\infty} (-x+2)/(x-1) = 1$. luego la A.O. es y = mx + n = 2x + 2. Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador

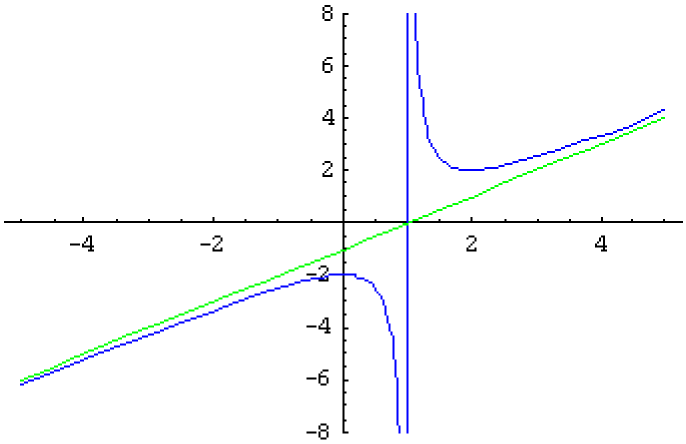
x^2-2x+2	x - 1
- x^2 +x	x - 1
- x+2 +x - 1	
1	

Veamos la posición relativa

$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (x-1) = 0^+$, luego f(x) está por encima de la A.O: en + ∞

$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - (x-1) = 0^-$, luego f(x) está por debajo de la A.O: en + ∞

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 3 de 2002

[2'5 puntos] Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calcula los valores de *t* para los que el determinante de *A* es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Solución

|A| = 2(2) - t(t - 3) + 0 = - t^2 + 3t + 4, que es una función cuadrática. Es decir |A| = f(t) = - t^2 + 3t + 4

t^2 - 3t - 4 = 0; t = [(3 ± √2/])61+9(3(= ± 2/)5 , luego las soluciones son t = -1 y t = 4, es decir la función dada es

- f(t) si - ∞ < t < - 1 , puesto que f(-2) = -6 < 0

+ f(t) si - 1 < t < 4 , puesto que f(0) = 4 > 0

- f(t) si 4 < t < + ∞ , puesto que f(5) = - 36 < 0

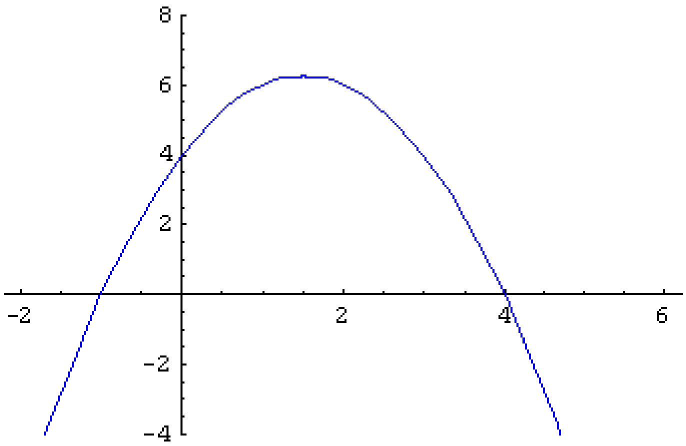
Por tanto el determinante es positivo si t ∈ (- 1,4)

|A| = f(t) = - t^2 + 3t + 4 tiene por gráfica una parábola con las ramas hacia abajo, por tanto su máximo anula la 1ª derivada y hace negativa la 2ª derivada. Veámoslo

f '(x) = -2t + 3; f '(x) = 0 nos da -2t +3 = 0 de donde x = 3/2 = 1'5

f ''(x) = -2 < 0, luego x = 1'5 es un máximo que vale f(1'5) = -$(1'5)^2$ + 3(1'5) + 4 = 6'25 = 25/4

Aunque no la piden la gráfica es

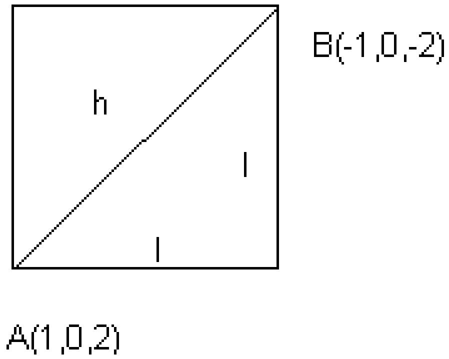


Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 3 de 2002

Los puntos A(1,0,2) y B(-1,0,-2) son vértices opuestos de un cuadrado.
(a) [1 punto] Calcula el área del cuadrado.
(b) [1'5 puntos] Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos *A* y *B* que pasa por su punto medio

Solución

(a)

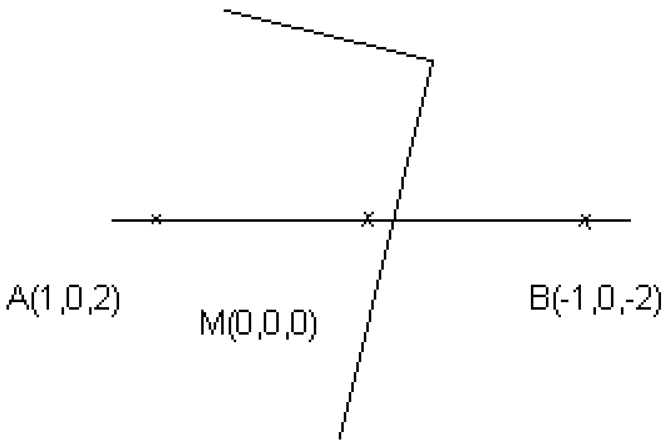


AB=(-2,0,-4)

$h^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$ =||**AB**|| = √2(2 0 +2 4 +2 =) √)02(

Área = $l^2 = h^2/2$ = [√])02(2 2/ = 10 unidades de área (u.a.)

(b)



El plano que me piden pasa por el punto medio del segmento M(0,0,0) y tiene como vector normal **n** =**AB** = (-2,0,-4)

El plano pedido es π ≡ (-2)(x - 0) + (0)(y - 0) + (-4)(z - 0) = 0. Operando queda π ≡ x + 2z = 0

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 3 de 2002

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función

f : (0,+ ∞) → R definida por f(x) = $\begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & si \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$. Calcula su derivada

Solución

$3 + x^2$ siempre es positivo luego √ξ+3(2) siempre tiene sentido y la podemos derivar en (0,1)

1/x no existe para x = 0, pero podemos derivarla en (1, + ∞).

Nos faltaría después estudiar la derivada en x = 1.

Si f(x) es derivable en x = 1, f(x) es continua en x = 1 pero para ello tiene que pasar

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x), \text{ pero}$$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1}(\sqrt{\xi+3(^2)}\ \xi\ -) = \sqrt{1+3(^2)}\ - 1$ = 2 – 1 = 1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1}(1/x + x^2/4)$ = 1/1 + 1/4 = 5/4

Como $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 5/4 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, la función no es continua en x = 1 y por tanto no es derivable en x =1.

La función es derivable en (0, + ∞) – {1}

La derivada de $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & si \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$, en (0, + ∞) – {1} es

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{2\sqrt{3+x^2}} - 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{2x}{4} & si \quad x > 1 \end{cases}$.

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 3 de 2002

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 (3x^3 + 1)/(x^2 - x - 2)\, dx$

Solución

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador tenemos que efectuar la división

$3x^3 + 1$	$x^2 - x - 2$
$-3x^3 + 3x^2 + 6x$	$3x + 3$
$3x^2+6x+1$ $-3x^2+3x+6$	
$9x+7$	

I = ∫ $(3x^3 + 1)/(x^2 - x - 2)$ dx =∫ $[3x + 3 + (9x +7)/(x^2 - x - 2)]$ dx =

= $3x^2 /2 + 3x$ + ∫ $(9x +7)/(x^2 - x - 2)$ dx = $3x^2 /2 + 3x + I_1$.

I_1 = ∫ $(9x +7)/(x^2 - x - 2)$ dx = ∫)2–ξ(/A dx +∫)1+ξ(/B dx = (25/3).Ln|x - 2| + (2/3).Ln|x + 2|

$x^2 - x - 2 = 0$. Se resuelve y sale x = 2 y x = -1, por tanto $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

$(9x +7)/(x^2 - x - 2) = (9x +7)/[(x -2)(x+1)]$ =)2–ξ(/A +)1+ξ(/B =

= [A(x+1) + B(x-2)]/[(x - 2)(x+1)]. Igualando numeradores

(9x +7) = A(x+1) + B(x-2), con lo cual:

Para x = -1 → - 2 = B(- 3) → B = 2/3

Para x = 2 → 25 = A(3) → A = 25/3

Luego $\int_0^1$ $(3x^3 + 1)/(x^2 - x - 2)$ dx = $[3x^2 /2 + 3x + I_1]_0^1$ =

= $[3x^2 /2 + 3x + (25/3).Ln|x-2| + (2/3)Ln|x+1|]_0^1$ =

= (3/2 + 3 + 25/3Ln(1) + 2/3Ln(2)) - (0 + 0 + 25/3Ln(2) + 2/3Ln(1)) =

= 3/2 + 3 + 2/3Ln(2) - 25/3Ln(2) = 9/2 - 23/3Ln(2)

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 3 de 2002

Considera el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ 2x + my + z &= m \\ 3x + 5y + mz &= 5 \end{aligned}$$

(a) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.
(b) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.
(c) [0'5 puntos] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

Solución

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ 2x + my + z &= m \\ 3x + 5y + mz &= 5 \end{aligned}$$

Matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & m & 1 & m \\ 3 & 5 & m & 5 \end{pmatrix}$

$|A| = 1(m^2 - 5) - 3(2m - 3) + 1(10 - 3m) = m^2 - 9m +14$.

Resolvemos $m^2 - 9m +14 = 0$ y sus soluciones son m = 2 y m = 7.

Si m ≠ 2 y m ≠ 7 , rango(A) = rango(A^*) = 3 y el sistema es compatible y determinado, es decir tiene solución única.

Si m = 2

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = - 4 ≠ 0, tenemos que rango(A) = 2

En A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos columnas iguales resulta que rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

Si m = 7

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ = - 1 ≠ 0, tenemos que rango(A) = 2

En A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos columnas iguales resulta que rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones, en particular tiene dos.

No hay ningún valor de m para que el sistema no tenga solución

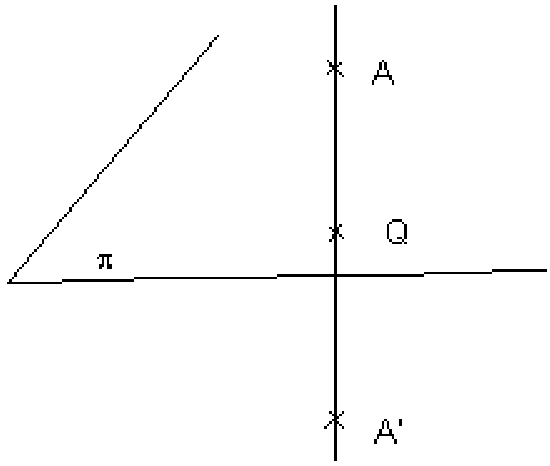
Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 3 de 2002

Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto A(-1, -4,2)

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.

(b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto de π .

Solución



$\pi \equiv x - y + 2z = 3$, su vector normal es $\mathbf{n} = (1,-1,2)$

La recta que pasa por A y es perpendicular a π , tiene por punto A(-1,-4,2) y como vector director **v** el normal **n** = (1,-1,2)

La recta es $r \equiv \{x = -1 + \lambda, y = -4 - \lambda, z = 2 + 2\lambda\}$

(b)

Para calcular el simétrico del A se obtiene el punto Q intersección de la recta r con el plano π . El punto Q es el punto medio del segmento AA', siendo A' el simétrico buscado.

$Q = r \cap \pi$

$(- 1 +\lambda) - (- 4 - \lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 3$. Operando $6\lambda = - 4$, de donde $\lambda = -2/3$

Q(-1 -2/3, -4+2/3, 2 - 4/3) = Q(-5/3, -10/3, 2/3)

Q es el punto medio del segmento AA' luego (-5/3, -10/3, 2/3) =[(x-1)/2, (y-4)/2, (z+2)/2]. Igualando tenemos

(x-1)/2 = -5/3 de donde x = -7/3

(y-4)/2 = -10/3 de donde y = -8/3

(z+2)/2 = 2/3 de donde z = -2/3

El simétrico A' (-7/3, -8/3, -2/3)