Ejercicio 1 del modelo 4 (junio) de la opción A de sobrantes de 2002

Considera la función $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = e^{(2x)/(x.x + 1)}$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f

(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

(a) Asíntotas

$\lim_{x\to\infty} e^{(2x)/(x.x + 1)} = e^0 = 1$, luego y = 1 es una A.H. en + ∞

$\lim_{x\to -\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{(-2x)/(x.x + 1)} = \lim_{x\to\infty} e^{(x.x + 1)/(2x)} = 1/e^0 = 1/1 = 1$, luego y = 1 es una A.H. en - ∞

(b) Monotonía. Estudio de f '(x)

$f '(x) = [e^{(2x)/(x.x + 1)}]\cdot [(2(x^2 + 1) -2x.2x)/(x^2 + 1)^2] =$

$= [e^{(2x)/(x.x + 1)}]\cdot [(-2x^2 + 2)/(x^2 + 1)^2]$

$f '(x) = 0 \rightarrow -2x^2+2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$, que serán los posibles máximos o mínimos

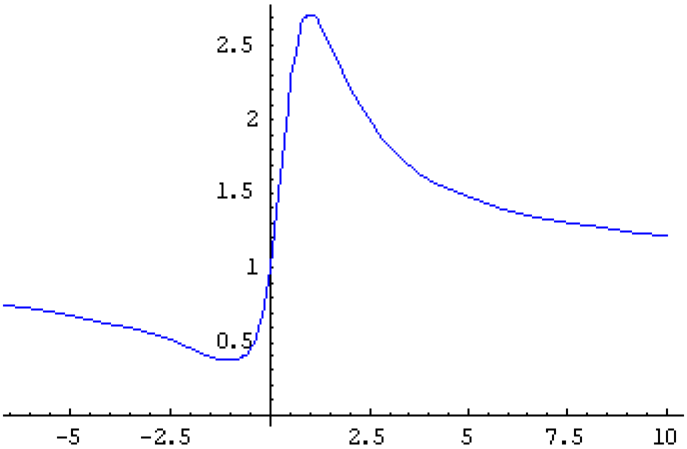
Como f '(-2) < 0, f(x) decrece en (- ∞ , -1)

Como $f '(0) = e^0(2) > 0$, f(x) crece en (- 1, +1)

Como f '(2) < 0, f(x) decrece en (+1, + ∞)

Por definición x = - 1 es un mínimo con valor $f(1) = e^1 = e$, y x = 1 es un máximo valor $f(-1) = e^{-1} = 1/e$.

La gráfica de la función aunque no la piden es:



Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 4 (junio) de 2002

[1'5 puntos] Determina un polinomio P(x) de segundo grado sabiendo que P(0) = P(2) = 1 y $\int_0^2 [P(x)\, dx = 1/3$.

Solución

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(0) = 1 = c$, luego $c = 1$

$P(2) = 1 = 4a + 2b + 1$, luego $4a + 2b = 0$; de donde $b = -2a$

$\int_0^2 (ax^2 + bx + c)\, dx = 1/3 = [ax^3/3 + bx^2/2 + cx]_0^2 = (8/3)a + 2b + 2c = 1/3$

Sustituyendo $b = -2a$, tenemos $(8/3)a + 2(-2a) + 2c = 1/3$ y operando obtenemos $a = 5/4$ y $b = -10/4$, luego el polinomio pedido es $P(x) = (5/4)x^2 - (10/4)x + 1$

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 4 (junio) de 2002

[2'5 puntos] Determina luna matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que Det(A) = - 7

y $A\cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

Como A es una matriz simétrica tiene que ser cuadrada y de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

$|A| = -7$, es decir $\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix} = xz - y^2 = -7$

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Operando

$\begin{pmatrix} 2x - y & 6x - 3y \\ 2y - z & 6y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de donde obtenemos $2x-y = -4$; $2y - z=1$; $6x-3y = -12$, $6y -3z = 3$. Si observamos de las cuatro ecuaciones dos son iguales por tanto el sistema a resolver es el siguiente:

$2x - y = - 4$

$2x - z = 1$

$x.z - y^2 = -7$

De $2x - y = -4$ tenemos $x =(y-4)/2$

De $2y - z = 1$ tenemos $z = 2y - 1$. Entrando con esta x y z en la ecuación $xz - y^2 = -7$ tenemos

$[(y-4)/2]\cdot (2y -1) - y^2 = -7$.

Operando se van los términos en y^2 y nos queda $y = 2$, luego $x =(y-4)/2 = = - 1$ y $z = 2y -$

1 = 3, de donde la matriz pedida es A = $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 4 (junio) de 2002

[2'5 puntos] Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano π ≡ x+y-z+6=0 con la recta s ≡ x/3 = y-2 = z+1 y es paralela a la recta r ≡

$$\begin{cases} 3x + y - 4 & = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 & = 0 \end{cases}$$

Solución

P = s ∩ π ;

s ≡ x/3 = y-2 = z+1 la ponemos en paramétrica s ≡ { x = 3λ, + 2 = ψ λ, + 1− = ζ }λ

εδ ρολαϖ λε σομενετβο ψ οναλπ λε νε ατχερ αλ σομιυτιτσυΣ λ .Π οτνυπ λε {ηα εδ ψ

3λ + (2+λ) - (-1+λ) + 6 = 0, de donde λ = - 3 y tenemos P(3(-3), 2-3, -1-3) = P(-9, -1, -4)

El vector director es **v**= $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1) - **j**(3) + **k**(-9-4) = (1,-3,-13)

La recta pedida es (x+9)/1 = (y+1)/(-3) = (z+4)/(-13)

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 4 (junio) de 2002

Sea f la función f(x) = (9x-3)/(x^2 -2x) para x ≠ 0 y x ≠ 2.
(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'5 puntos] Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f .

Solución

(a) Asíntotas

Como $\lim_{x\to 0^+}$ [(9x-3)/(x^2 -2x)] = (-3)/(0^-) = + ∞ ; la recta x = 0 es una asíntota vertical (A.V.)

$\lim_{x\to 0^-}$ [(9x-3)/(x^2 -2x)] = (-3)/(0+) = - ∞; para la posición relativa

Como $\lim_{x\to 2^+}$ [(9x-3)/(x^2 -2x)] = (15)/(0^+) = + ∞ ; la recta x = 2 es una asíntota vertical (A.V.)

$\lim_{x\to 2^-}$ [(9x-3)/(x^2 -2x)] = (15)7(0^-) = - ∞ ; para la posición relativa

Como $\lim_{x\to \infty}$ [(9x-3)/(x^2 -2x)] =0; la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) en ± ∞ de f(x).

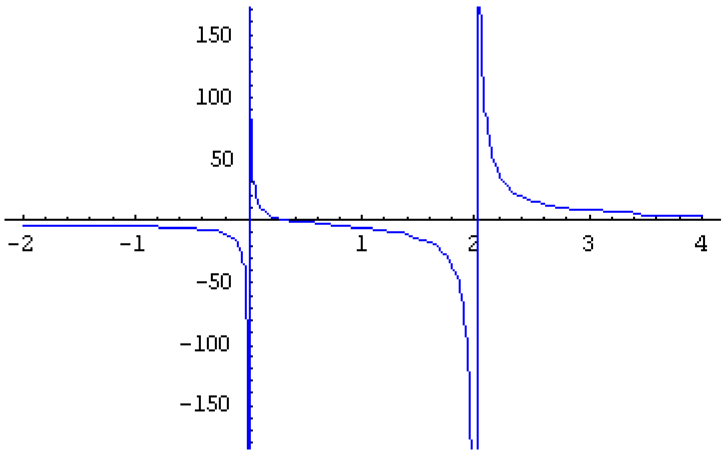
(b) Monotonía. Estudio de f '(x)

f '(x) = $[9(x^2 -2x) - (9x-3)(2x-2)] / (x^2 -2x)^2 = [-9x^2 + 6x - 6] / (x^2 -2x)^2$

f '(x) = 0; $-9x^2 +6x - 6 = 0$ o bien $3x^2 - 2x + 2 = 0$, de donde x = [2 ± √6/])42–4(que no tiene soluciones reales, por tanto la función siempre es creciente o decreciente para lo cual sustituiremos un nº cualquiera en la primera derivada. Si nos da positivo la función es creciente y si nos da negativo la función es decreciente siempre.

Probamos el 1, f '(1) = -9/1 = -9 < 0, luego la función siempre es decreciente.

Aunque no la piden la gráfica es



Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 4 (junio) de 2002

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva y = f(x), los ejes coordenados y la recta x = -1. Calcula su área.

Solución

$f(x) = x\cdot e^{-x} = x/(e^x)$

$\lim_{x\to\infty} x/(e^x) = \{\infty/\infty\} = \{\text{L´Hôpital}\} = \lim_{x\to\infty} 1/(e^x) = \{/1\infty\} = 0$, luego y = 0 es una A. H. en + ∞

$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-x)\cdot e^{-(-x)} = \lim_{x\to\infty} (-x)\cdot e^{x} = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$

Estudiemos f '(x) para ver su monotonía

$f'(x) = 1.e^{-x} + x.e^{-x}.(-1) = e^{-x}(1 - x)$

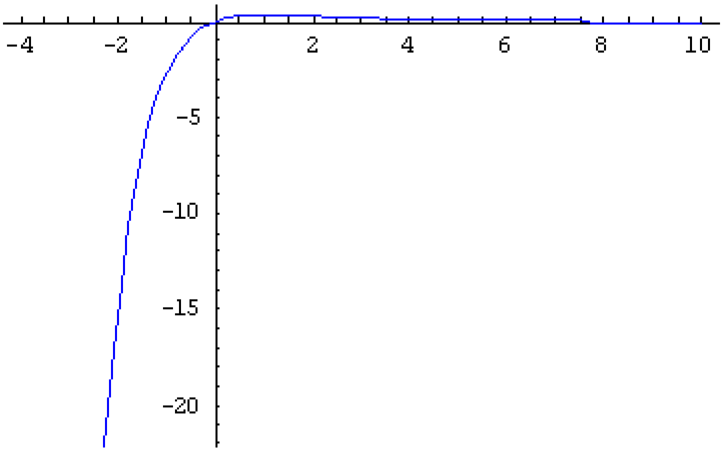
f '(x) = 0; 1 - x = 0 de donde x = 1 que será el posible máximo o mínimo

Como f '(0) > 0, f(x) crece en (- ∞ , 1)

Como f '(2) < 0, f(x) decrece en (1, +∞)

Por definición x = 1 es un máximo con valor $f(1)= e^{-1}$.

Su gráfica es



Área = $\left|\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx\right|$ = | [-e^{-x} (x+1)]$^{0}_{-1}$ | = | [(-1(1)) - (-e(0))] | = | - 1 | = 1 u.a.

I = ∫ xe^{-x} dx = -xe^{-x} - ∫ -e^{-x} dx = -xe^{-x} + ∫ e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}

u = x ;   du = dx

dv = e^{-x} ; v =∫ e^{-x} dx = - e^{-x}

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 4 (junio) de 2002

[2'5 puntos] Determina una matriz X que verifique la ecuación AX = X - B siendo

A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

AX = X - B; AX - X = - B; (A - I)· X = - B

A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; A - I = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Como |A - I| = -1(1) - 0 + 1(-1) = -2 ≠ 0, existe (A - I)$^{-1}$ y por tanto X = -(A - I)$^{-1}$· B

(A - I)$^{-1}$ = 1/(|A - I|) · Adj(A - I)^{t}

(A - I)^{t} = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; Adj(A - I)^{t} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (A - I)$^{-1}$ = 1/(-2) · $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = -(A - I)^{-1} \cdot B = -(1/(-2)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1/(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 4 (junio) de 2002

[2'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)

Solución

El área es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que forman el triángulo

Area Δ = 1/2||**AB** x **AC**|| = $(1/2).\sqrt{(12)^2}$ = (1/2).(12) = 6 unidades de área (u.a.)

AB = (0,-1,-3) ; **AC**= (0,-4,0) ; **AB** x **AC** = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(-12) - **j**(0) + **k**(0) = (-12,0,0)