Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 6 de 2002

[2'5 puntos] De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

Solución

$y = mx$ es una recta que pasa por el origen (0, 0)

Parábola $f(x) = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$

Si la recta $y = mx$ es tangente a $f(x) = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$, tienen que coincidir por tanto las igualamos

$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx$

Por otro lado como es recta tangente su pendiente $y' = m$ coincide con la pendiente de la recta tangente de un punto genérico que es $f'(x) = 1/2x + 4$. Igualándolo tenemos

$m = 1/2x + 4$

Resolvemos el sistema

$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx$

$m = 1/2x + 4$. Sustituyendo en la 1ª

$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx = (1/2x + 4)x = 1/2x^2 + 4x$. De donde $1/4x^2 - 1/2x^2 + 4 = 0$. Operando nos queda

$x^2 = 16$, de donde $x = \pm 4$.

Para $x = 4$ la pendiente es $m = 4/2 + 4 = 6$. La recta es $y = 6x$ y la ordenada es $6(4) = 24$. Punto (4,24)

Para $x = -4$ la pendiente es $m = -4/2 + 4 = 2$. La recta es $y = 2x$ y la ordenada es $2(-4) = -8$. Punto (-4,-8)

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 6 de 2002

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{2}\cdot e^{(x/2)}$

(a) [1 punto] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(b) [1'5 puntos] Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

$f(x) = x^{2}\cdot e^{(x/2)}$

(a)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{2}\cdot e^{(x/2)} = (+\infty)(e^{+\infty}) = (+\infty)(+\infty) = (+\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{2\cdot} e^{(x/2)} = \lim_{x \to \infty} (-x)^{2\cdot} e^{(-x/2)} = \lim_{x \to \infty} (x)^2/ e^{(x/2)} =$

$= (+\infty)/(+\infty)$ y le aplicamos la Regla de L'Hopital

$\lim_{x \to \infty} (x)^2/ e^{(x/2)} = \lim_{x \to \infty} 2x / [(1/2).e^{(x/2)}] = \lim_{x \to \infty} 4x / [e^{(x/2)}] = (+\infty)/(+\infty)$ le volvemos a aplicar la Regla de L'Hopital

$\lim_{x \to \infty} 4x / [e^{(x/2)}] = \lim_{x \to \infty} 4 / [(1/2).e^{(x/2)}] = \lim_{x \to \infty} 8 / [e^{(x/2)}] = (+ 8)/(+\infty) = 0$, por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$ de la función $f(x) = x^{2\cdot} e^{(x/2)}$

(b)

Para la monotonía realizamos el estudio de $f'(x)$

$f(x) = x^{2\cdot} e^{(x/2)}$

$f'(x) = 2x\cdot e^{(x/2)} + x^2 e^{(x/2)}(1/2) = e^{(x/2)}(2x + x^2/2)$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad (2x + x^2/2) = 0$ puesto que la exponencial no se anula nunca

$(2x + x^2/2) = 0 = x(2 + x/2)$, de donde $x = 0$ y $x = -4$

Como $f'(-5) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4)$

Como $f'(-2) < 0$, $f(x)$ es decreciente en $(-4, 0)$

Como $f'(1) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$

Por definición $x = -4$ es un máximo y vale $f(-4) = 16\cdot e^{-2} = 16/e^2$

Por definición $x = 0$ es un mínimo y vale $f(0) = 0$

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 6 de 2002

Considera el sistema de ecuaciones:

$$x - my + z = 1$$
$$x + y + z = m + 2$$
$$x + y + mz = 4$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro m.
(b) [2 puntos] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

Solución

$$x - my + z = 1$$
$$x + y + z = m + 2$$
$$x + y + mz = 4$$

Matriz de los coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $M^* =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ = { (2ªF-1ªF y 3ªF-1ªF) } = $\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1+m & 0 \\ 0 & 1+m & m-1 \end{vmatrix}$ =

= (1)· $\begin{vmatrix} 1+m & 0 \\ 1+m & -1+m \end{vmatrix}$ = (1+m)(-1+m)

|M| = 0 si (1+m)(-1+m) = 0 de donde m = 1 y m = -1

Si m ≠ 1 y m ≠ -1

rango(M) = rango(M^*) = 3 = nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

Si m = -1

En M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = - 2 ≠ 0, rango(M) = 2

En M^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ = 0, rango(M^*) = 2

Como rango(M) = rango(M^*) = 2 < nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones). Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

x+y+z = 1

x+y-z = 4

restando -2z = 3, de donde z = -3/2

Tomo y = λ , luego x+y = 4; x = 4 - λ

La solución es (x,y,z) = (4-λ , λ , -4/3) con λ ∈ R

Si m = 1

En M = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 2 ≠ 0, rango(M) = 2

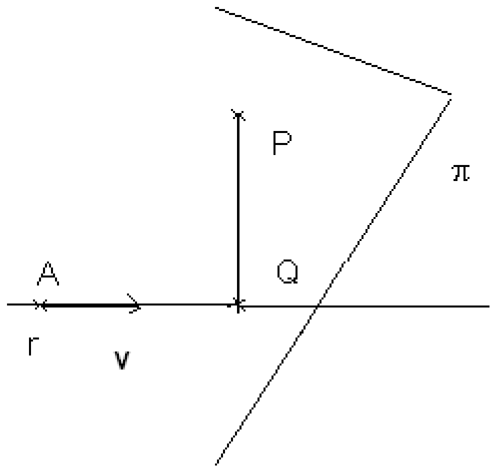
En M *= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 10, rango(M *) = 3

Como rango(M) ≠ rango(M *) ,por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible.

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 6 de 2002

[2'5 puntos] Halla el punto de la recta r ≡ $\begin{cases} x+3y+z & =1 \\ y+z & = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto P(1,-1,0).

Solución



El punto más cercano de la recta r al punto P es el punto Q que está en la proyección ortogonal de P sobre r. Para determinarlo tenemos que calcular el plano π perpendicular a la recta r por el punto P

Como π es perpendicular a r el vector normal **n** del plano coincide con el vector director **v** de r

v = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(2) - **j**(1) +**k**(1) = (2, -1, 1) = **n**

π ≡ **n**•(**x** - **p**) = (2)(x-1) + (-1)(y+1) + (1)(z-0) = 2x - y + z - 3 = 0

Un punto A de r sería. Tomando z = 1, tenemos y = -1 - z = -2   y   x = 1-3y-z = 1-3(-2) -1 = 6. El punto A es A(6,-2,1)

La recta r en paramétricas conocido el punto A(6,-2,1) y el vector **v** = (2, -1, 1) es

$x = 6+2\lambda$

$y = -2-\lambda$

$z = 1+\lambda$

El punto Q es la intersección de la recta r con el plano π , para lo cual sustituimos la ecuación de la recta en el plano

$2(6+2\lambda) - (-2-\lambda) + (1+\lambda) - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 6\lambda + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2$

El punto pedido es Q(6+2(-2), -2-(-2), 1+(-2)) = Q(2, 0, -1)

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 6 de 2002

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función f :R → R definida por f(x)

$$= \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Solución

Si x > 0, f(x) = senx/x, luego $f'(x) = [\cos(x).x - \text{sen}(x)]/x^2$

Si x < 0, f(x) = 0 , luego f '(x) = 0

Veamos si existe f '(0) calculando $f'(0^+)$, $f'(0^-)$ y viendo si son iguales.

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} [\cos(x).x - \text{sen}(x)]/x^2 = [\cos(0).0 - \text{sen}(0)]/0^2 = 0/0$. Le aplicamos la regla de L`Hopital

$\lim_{x\to 0} [\cos(x).x - \text{sen}(x)]/x^2 = \lim_{x\to 0} [-\text{sen}(x).x+\cos(x) - \cos(x)]/2x =$

$= \lim_{x\to 0} [-\text{se}(x)]/2 = 0/2 = 0$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (0) = 0$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, existe f ' (0) = 0 por tanto

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos(x)-\text{sen}(x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 6 de 2002

[2'5 puntos] Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$ y enuncia las propiedades que hayas utilizado.

Solución

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = \{ 2^aF+1^a(-2) \text{ y } 3^aF+1^a(-3) \} = \begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 0 & y-2x & ay-2ax \\ 0 & z-3x & az-3ax \end{vmatrix} =$$

$$= k\cdot \begin{vmatrix} y-2x & a(y-2x) \\ z-3x & a(z-3x) \end{vmatrix} = k\cdot a\cdot \begin{vmatrix} y-2x & y-2x \\ z-3x & z-3x \end{vmatrix} = k\cdot a\cdot 0 = 0$$

Propiedades utilizadas

Sumarle a una fila otra multiplicada por un número

Desarrollar por el adjunto de un elemento cuando el resto de los elementos son nulos

Si todos los miembros de una fila o columna están multiplicados por un número dicho número puede salir fuera del determinante multiplicando

Un determinante con dos filas o columnas iguales es cero

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 6 de 2002

Considera la recta r y el plano π siguientes: $r \equiv \begin{cases} x+z-a = 0 \\ y-az-1 = 0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x - y = b$.

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que está contenida en π .

(b) [1 punto] Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π .

Solución

Como la recta r está contenida en el plano π el sistema de ecuaciones formado por la recta y el plano

$x + z = a$

$y - az = 1$

$2x - y = b$

es compatible e indeterminado con rango(M) = rango(M^*) = 2, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ la matriz de los coeficientes y

$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 2 & -1 & 0 & b \end{pmatrix}$ la matriz ampliada

Como rango(M) = 2 entonces |M| = 0 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = {2ªF+3ªF} = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix}$ =

= 1· $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix}$ = -a - 2 = 0, de donde a = -2

Como rango(M^*) = 2 entonces $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix}$ =0= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix}$ = {2ªF+3ªF}
= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & b+1 \end{vmatrix}$ =

= 1· $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & b+1 \end{vmatrix}$ = b+1+4 = 5, de donde b = -5

Por tanto para que la recta esté contenida en el plano a = -2 y b = -5

La recta es

+x +z = -2

+y+2z = 1

y el plano es $\pi \equiv 2x - y = -5$

(b)

El plano π' que nos piden contiene a r luego de r tomamos un punto A y su vector director **v.** El otro vector que necesitamos para el plano como es perpendicular a π es su vector normal **n** = (2, -1, 0)

v = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) -**j**(2) +**k**(1) = (-1,-2,1)

Para el punto A de r tomamos z = 1, de donde y = 1 - 2z = 1 - 2 = -1 y x = -2 - z = -2 -1 = -

3. Luego el punto es A(-3,-1,1)

El plano buscado es $\pi' \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (x+3)(1) - (y+1)(-2) + (z-1)(5) = x + 2y + 5z = 0$