

Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 2003

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x) - \text{sen}x]/[x \cdot \text{sen}x]$, siendo $\ln(1+x)$ el logaritmo neperiano de $1+x$

Solución

$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x) - \text{sen}x]/[x \cdot \text{sen}x] = [\ln(1+0) - \text{sen}0]/[0 \cdot \text{sen}0] = 0/0$, la aplicamos la regla de L'Hôpital que dice si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) / g(x) = 0/0$ y existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) / g'(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) / g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) / g'(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x) - \text{sen}x]/[x \cdot \text{sen}x] = \lim_{x \rightarrow 0} [1/(1+x) - \text{cos}x] / [\text{sen}x + x \cdot \text{cos}x] =$
 $= [1/(1+0) - \text{cos}0] / [\text{sen}0 + 0 \cdot \text{cos}0] = (1-1)/0 = 0/0$. Le volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \rightarrow 0} [1/(1+x) - \text{cos}x] / [\text{sen}x + x \cdot \text{cos}x] = \lim_{x \rightarrow 0} [-1/(1+x)^2 + \text{sen}x] / [\text{cos}x + \text{cos}x - x \cdot \text{sen}x] =$
 $= [-1/(1+0)^2 + \text{sen}0] / [\text{cos}0 + \text{cos}0 - 0 \cdot \text{sen}0] = -1/(1+1) = -1/2$

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2003

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{x/3}$.

(a) [1 punto] ¿En que punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Solución

$$f(x) = e^{x/3}$$

(a)

La recta tangente en $x = a$ es " $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ "

$$f(x) = e^{x/3} \rightarrow f(a) = e^{a/3}$$

$$f'(x) = (1/3) \cdot e^{x/3} \rightarrow f'(a) = (1/3) \cdot e^{a/3}$$

$$\text{La recta tangente es } y - e^{a/3} = (1/3) \cdot e^{a/3} \cdot (x - a)$$

Como dicen que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas (0,0) tenemos que

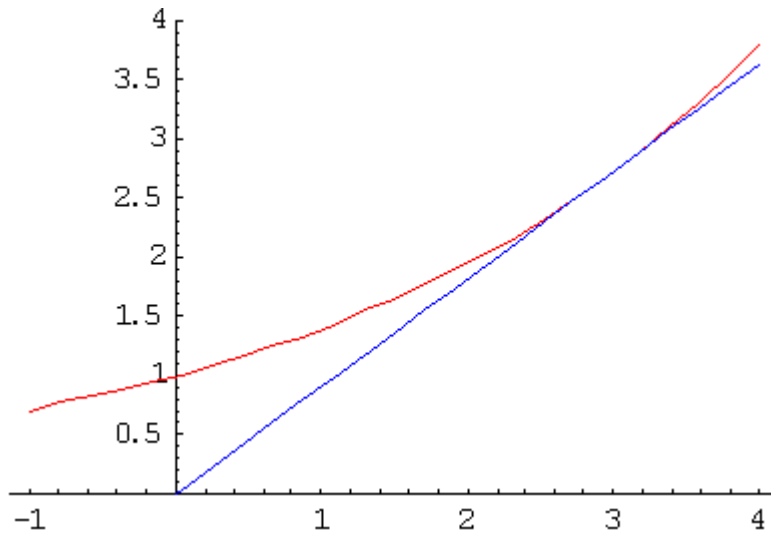
$$0 - e^{a/3} = (1/3) \cdot e^{a/3} \cdot (0 - a) \rightarrow -1 = (1/3) \cdot (-a) \rightarrow a = 3$$

Luego el punto de la gráfica de f donde la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas es $a = 3$; y la recta tangente es $y - e^{3/3} = (1/3) \cdot e^{3/3} \cdot (x - 3)$. Operando queda $y = (e/3) \cdot x$

(b)

La gráfica de e^x es conocida porque es la exponencial por tanto la de $e^{x/3}$ es exactamente igual que la de e^x , pero un poco más abierta. Cuando $x = 3$, $f(3) = e$

La gráfica conjunta de $f(x) = e^{x/3}$ y la tangente $y = (e/3).x$ es



El área pedida es Área = $\int_0^3 [e^{x/3} - (e/3).x] dx = [3.e^{x/3} - (e/6).x^2]_0^3 =$
 $= [(3.e^{3/3} - (e/6).9) - (3.e^0 - (e/6).0)] = (3/2).e - 3$ unidades de área (u.a.)

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2003

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) [1'25 puntos] ¿Para que valores de m tiene solución la ecuación matricial $A.X + 2B = 3C$?
(b) [1'25 puntos] Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

Solución

(a)

$$AX + 2B = 3C \rightarrow AX = 3C - 2B$$

Si existiese A^{-1} , multiplicando por la izquierda la expresión $AX = 2B - 3C$ tendremos

$$A^{-1}.AX = A^{-1}.(3C - 2B) \rightarrow X = A^{-1}.(3C - 2B)$$

Para que exista A^{-1} su determinante tiene que ser distinto de cero

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m$, porque el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal. Por tanto el sistema $A \cdot X + 2B = 3C$ tiene solución si solo si $m \neq 0$.

(b)

Si $m = 1$

$$X = A^{-1} \cdot (2B - 3C)$$

$$(3C - 2B) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} \cdot (2B - 3C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2003

Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.

- (a) [1 punto] Calcula las coordenadas del punto D
 (b) [1'5 puntos] Halla el área del paralelogramo.

Solución

(a)



Si ABCD es un paralelogramo, los vectores **AB** y **DC** tienen las mismas coordenadas, porque son iguales como vectores libres.

$$\mathbf{AB} = (2, 2, 2)$$

$$\mathbf{DC} = (-7-x, 1-y, 5-z)$$

Igualando $(2, 2, 2) = (-7-x, 1-y, 5-z)$, de donde $x = -9$, $y = -1$ y $z = 3$. El punto es $D(-9, -1, 3)$

(b)

Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo del producto de dos vectores con origen común, luego Área = $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \sqrt{[(10^2 + 28^2 + 18^2)]} = \sqrt{1208}$ unidades de área (u.a.)

$$\mathbf{AB} = (2, 2, 2); \mathbf{AD} = (-10, -1, 4)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(10) - \mathbf{j}(28) + \mathbf{k}(18) = (10, -28, 18)$$

Ejercicio n° 1 de la opción B de septiembre de 2003

[2'5 puntos] Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x)$, donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x . Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

Solución

Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \int f(x) dx + K$

$\int f(x) dx = \int [(x-1) \cdot \ln(x)] dx$ que es una integral por partes

$$u = \ln(x) \rightarrow du = (1/x) dx$$

$$dv = (x-1) dx \rightarrow v = \int (x-1) dx = (x^2)/2 - x$$

$$\int [(x-1) \cdot \ln(x)] dx = [(x^2)/2 - x] \cdot \ln(x) - \int [(x^2)/2 - x] \cdot (1/x) dx =$$

$$= [(x^2)/2 - x] \cdot \ln(x) - \int [(x/2) - 1] dx = [(x^2)/2 - x] \cdot \ln(x) - [(x^2/4) - x]$$

La primitiva es $F(x) = [(x^2)/2 - x] \cdot \ln(x) - [(x^2/4) - x] + K$

Como pasa por el punto $(1, -3/2)$ tenemos que $F(1) = -3/2$

$$-3/2 = [(1/2) - x] \cdot \ln(1) - [(1/4) - 1] + K = 3/4 + K \text{ de donde } K = -3/2 - 3/4 = -9/4$$

La primitiva pedida es $F(x) = [(x^2)/2 - x] \cdot \ln(x) - [(x^2/4) - x] - 9/4$

Ejercicio n° 2 de la opción B de septiembre de 2003

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

Solución

Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$ porque sabemos que $|x|$ no es derivable en $x = 0$.

Utilizaremos que si una función es derivable en una punto tiene que ser continua en dicho punto.

$f(x)$ es continua en $x = a$ si y solo si $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x/1 - |x|) = (1^+/1 - |1^+|) = (1^+/0^-) = -\infty$, luego en $x = 1$ la función no es continua y por tanto no es derivable en $x = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x/1 - |x|) = (-1^+/1 - |-1^+|) = (-1^+/0^+) = -\infty$, luego en $x = -1$ la función no es continua y por tanto no es derivable en $x = -1$.

$$f(0) = (0/1 - |0|) = 0/1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x/1 - |x|) = (0/1 - |0|) = 0/1 = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $f(x)$ es continua en $x = 0$

Veamos la derivabilidad en $x = 0$, es decir si $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} [f(0+h) - f(0)] / h = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(h) / h = \lim_{h \rightarrow 0^-} [(h/1 - |h|)] / h = \lim_{h \rightarrow 0^-} (1/1 - |h|) = 1/1 = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(0+h) - f(0)] / h = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) / h = \lim_{h \rightarrow 0^+} [(h/1 - |h|)] / h = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1/1 - |h|) = 1/1 = 1$$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, existe $f'(0) = 1$. Luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Aunque no la piden vamos a calcular la derivada de $f(x)$

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ y } x = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x < 0 \text{ y } x \neq -1 \end{cases}$$

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2003

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

(b) [1'25 puntos] Resuelve el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de todas sus soluciones.

Solución

(a)

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $A + \lambda I$ no tenga inversa su determinante ha de ser 0, es decir $|A + \lambda I| = 0$

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \{\text{desarrollo por los adjuntos de la 1ª fila}\}$$

$$= (-2+\lambda).[(1+\lambda).(-2+\lambda) - 4] - (-2).[(-2).(-2+\lambda) - (-2)] + (1).[4 - 1.(1+\lambda)] =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27$$

$$|A + \lambda.I| = 0 \rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

Le aplicamos Ruffini a $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27$ para calcular sus raíces

	1	-3	-9	27
3		3	0	-27
	1	0	-9	0

Luego $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda - 3).(\lambda^2 - 9) = (\lambda - 3).(\lambda - 3).(\lambda + 3) = 0$. Es decir la matriz $A + \lambda.I$ no tiene inversa si $\lambda = 3$ o $\lambda = -3$.

(b)

$A.X = 3X = 3.I.X$, siendo I la matriz identidad de orden 3

$A.X = 3.I.X \rightarrow A.X - 3.I.X = O$, siendo O la matriz nula

$$A.X - 3.I.X = (A - 3.I).X = \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el 3 era una de las soluciones el determinante del sistema homogéneo es 0.

En la matriz $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, el rango es 2 luego nos quedamos solo con dos ecuaciones y dos incógnitas principales para resolverlo. Tomo las dos últimas ecuaciones

Desarrollando $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e igualando miembro a miembro tenemos el sistema

$$-5x - 2y + z = 0$$

$$-2x - 2y - 2z = 0$$

$$x-2y-5z = 0$$

Las dos ultimas ecuaciones son

$$x-2y-5z = 0 \rightarrow x-2y-5z = 0$$

$-2x-2y-2z = 0 \{ 2^a + 1^a(2) \} \rightarrow -6y - 12z = 0$, de donde $y = -2z$ y $x = z$. Tomando $z = \lambda$ la solución del sistema es $(x,y,z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Geoméricamente me está diciendo que los tres planos se cortan en una recta que pasa por el origen de coordenadas y que los tres planos son distintos porque al comparar sus coeficientes dos a dos vemos que no son proporcionales.

Ejercicio n° 4 de la opción B de septiembre de 2003

[2'5 puntos] Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

Solución



$A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ luego el tenemos el vector $\mathbf{AB} = (1,1,1)$

Como ABCD es un rectángulo y los puntos C y D están en la recta que pasa por el origen, un vector director de dicha recta es $\mathbf{AB} = (1,1,1)$ y además pasa por $(0,0,0)$, luego su ecuación en paramétricas sería

$$\{ x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda \}$$

Como ABCD es un rectángulo los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AD} son perpendiculares y su producto escalar es cero, es decir $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} = 0$

$\mathbf{AB} = (1,1,1)$, $\mathbf{AD} = (\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1)$. Tomando como coordenadas de $D(\lambda, \lambda, \lambda)$ puesto que está en la recta que pasa por el origen de coordenadas.

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} = 0 = (1,1,1) \cdot (\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda - 1) = \lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 3\lambda - 3 = 0 \text{ de donde } \lambda = 1 \text{ y el punto es } D(1,1,1)$$

Como ABCD es un rectángulo los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{BC} son perpendiculares y su producto escalar es cero, es decir $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = 0$

$\mathbf{AB} = (1,1,1)$, $\mathbf{BC} = (\lambda - 2, \lambda - 2, \lambda - 1)$. Tomando como coordenadas de $C(\lambda, \lambda, \lambda)$ puesto que está en la recta que pasa por el origen de coordenadas.

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = 0 = (1,1,1) \cdot (\lambda - 2, \lambda - 2, \lambda - 1) = \lambda - 2 + \lambda - 2 + \lambda - 1 = 3\lambda - 5 = 0 \text{ de donde } \lambda = 5/3 \text{ y el punto es } C(5/3, 5/3, 5/3)$$

