

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 3 de 2003

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en $x = 1$ que no es extremo relativo y que $f(1) = 1$. Calcula a , b y c .

Solución

Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en $x = 1$ que no es extremo relativo $x = 1$ es un punto de inflexión, luego tenemos $f'(1) = 0$ y además $f''(1) = 0$. También el problema nos dice que $f(1) = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

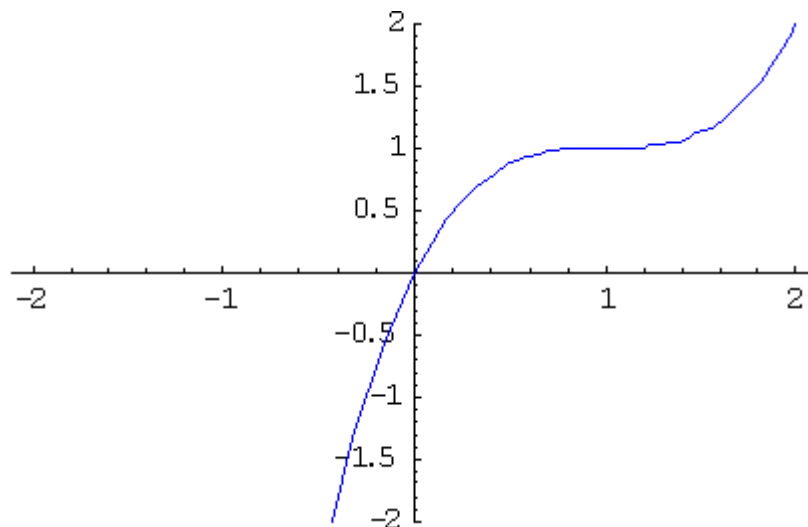
De $f''(1) = 0$ tenemos $0 = 6 + 2a$, luego $a = -3$

De $f'(1) = 0$ tenemos $0 = 3 + 2(-3) + b$, luego $b = 3$

De $f(1) = 1$ tenemos $1 = 1 + (-3) + (3) + c$, luego $c = 0$.

Los coeficientes pedidos son $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$ y la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Aunque no la piden su gráfica es



Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 3 de 2003

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida y el eje OY.

Solución

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

(a)

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

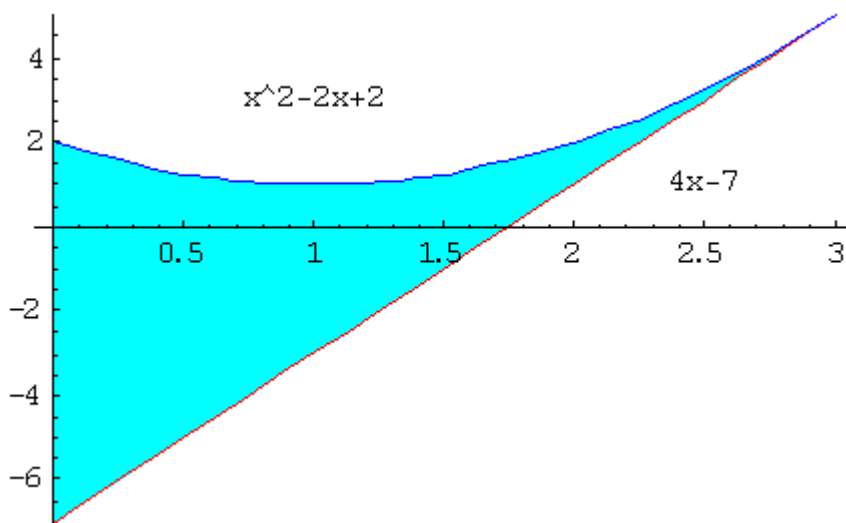
$$f(x) = x^2 - 2x + 2, \text{ luego } f(3) = 9 - 6 + 2 = 5$$

$$f'(x) = 2x - 2, \text{ luego } f'(3) = 6 - 2 = 4$$

La recta tangente es $y - 5 = 4(x - 3)$. Operando queda $y = 4x - 7$

(b)

Aunque no la piden las gráficas de la parábola y la recta son



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)] dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = [x^3/3 - 3x^2 + 9x]_0^3 = \\ &= 9 - 27 + 27 = 9 \text{ unidades de área (u.a.)} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 3 de 2003

[2'5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $A \cdot X = (B \cdot A)^t$.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (1)(-3) = -2 + 3 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1} , por tanto multiplicando la expresión $A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$ por la izquierda por A^{-1} , y teniendo en cuenta las propiedades de las matrices traspuestas tenemos:

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}((B \cdot A^t)^t) = A^{-1}(A^t \cdot B^t) = A^{-1}(A \cdot B^t) \text{ de donde}$$

$$I \cdot X = I \cdot B^t, \text{ luego } X = B^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Las propiedades de traspuestas que hemos aplicado son:

$$(A^t)^t = A$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 3 de 2003

Considera el punto $P(-2, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$.

- (a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r .
 (b) [1'5 puntos] Determina el punto de r más próximo a P .

Solución

$P(-2, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2 = 0 \\ 2x-2y+z+1 = 0 \end{cases}$

(a)

Para hallar el plano que pasa por P y contiene a r , formamos el haz de planos que contienen a r y le imponemos la condición de que pase por el punto P

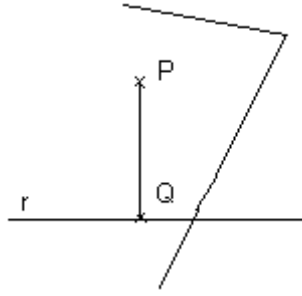
$$\text{Haz de planos: } (x+y+z+2) + \lambda(2x-2y+z+1) = 0$$

Imponemos la condición de que pase por P

$$(-2+3+0+2) + \lambda(2(-2)-2(3)+0+1) = 0, \text{ de donde } 3 + \lambda(-9) = 0, \text{ es decir } \lambda = 1/3$$

El plano pedido es $(x+y+z+2) + (1/3)(2x-2y+z+1) = 0$. Operando queda $5x+y+4z+7 = 0$

(b)



El punto de r más próximo a P es el que resulta de la proyección ortogonal de P sobre Q , para lo cual calculamos el plano π_1 perpendicular a r que pasa por P , para lo cual el vector normal del plano \mathbf{n} es el director de la recta r , \mathbf{v} . Después calculamos Q como la intersección del plano π_1 con la recta r .

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(-4) = (3, 1, -4)$$

$$\pi_1 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 = (3, 1, -4) \cdot (x+2, y-3, z-0) = 3x + y - 4z + 3 = 0$$

El punto Q es la solución del sistema formado por la recta r y el plano π_1 , es decir el sistema:

$$x + y + z + 2 = 0$$

$$2x - 2y + z + 1 = 0$$

$$3x + y - 4z + 3 = 0. \text{ Haciendo } \{ 2^a + 1^a(-2); 3^a + 1^a(-3) \}, \text{ resulta:}$$

$$x + y + z + 2 = 0$$

$$0 - 4y - z - 3 = 0$$

$$0 - 2y - 7z - 3 = 0. \text{ Haciendo } \{ 2^a + 3^a(-2) \}, \text{ resulta:}$$

$$x + y + z + 2 = 0$$

$$0 + 0 + 13z + 3 = 0$$

$$0 - 2y - 7z - 3 = 0.$$

$$\text{De donde } z = -3/13$$

$$\text{De } 2y = -3 - 7y = -3 - 7(-3/13) = -18/13, \text{ luego } y = -9/13$$

$$\text{De } x = -y - z - 2 = 9/13 + 3/13 - 2 = -14/13$$

$$\text{El punto } Q \text{ buscado es } Q(x, y, z) = Q(-14/13, -9/13, -3/13)$$

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 3 de 2003

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f: (0; 3) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ -x+3 & \text{si } 2 < x < 3, \end{cases}, \text{ y que } f(1) = 0. \text{ Halla la expresión analítica de } f.$$

Solución

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ -x+3 & \text{si } 2 < x < 3, \end{cases}, \text{ y que } f(1) = 0$$

Como es derivable en todo su dominio es continua en todo su dominio, en particular en $x = 2$,

$$\text{luego } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Por el Teorema fundamental del cálculo integral que dice que si $f(x)$ es continua en $[a,b]$

entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$. En nuestro caso $f(x) = \int f'(x) dx$

$$\text{Si } 0 < x \leq 2, \text{ tenemos } f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-1) dx = x^2/2 - x + K$$

$$\text{Si } 2 < x < 3, \text{ tenemos } f(x) = \int f'(x) dx = \int (-x+3) dx = -x^2/2 + 3x + H$$

$$\text{Como } f(1) = 0, \text{ tenemos } 0 = 1/2 - 1 + K, \text{ de donde } K = 1/2$$

$$\text{Como } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ tenemos}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2/2 + 3x + H) = -2 + 6 + H$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2/2 - x + K) = 2 - 2 + 1/2$$

$$\text{Igualando tenemos } -2 + 6 + H = 2 - 2 + 1/2, \text{ de donde } H = 1/2 - 4 = -7/2.$$

$$\text{Por tanto la función es } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 1/2 & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ -\frac{x^2}{2} - x - 7/2 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 3 de 2003

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a, \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \geq a \end{cases}$, donde a es un número real.

(a) [0'5 puntos] Determina a .

(b) [2 puntos] Halla la función derivada de f .

Solución

$$f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < a, \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq a, \end{cases}$$

(a)

Como es continua en todo su dominio es continua en $x = a$, luego $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - 5x + 7) = a^2 - 5a + 7$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} |2 - x| = |2 - a|$$

Igualando tenemos $a^2 - 5a + 7 = |2 - a|$, de donde tenemos dos expresiones según sea $a < 2$ o sea $a > 2$:

Si $a < 2$, $a^2 - 5a + 7 = 2 - a$. Operando sale $a^2 - 4a + 5 = 0$, que no tiene soluciones reales.

Si $a > 2$, $a^2 - 5a + 7 = -2 + a$. Operando sale $a^2 - 6a + 9 = 0$, que tiene por solución $a = 3$ doble.

$$\text{Luego la función dada es } f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x^2 - 5x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}, \text{ su derivada es}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ +1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Nos falta ver la derivabilidad en $x = 2$ y $x = 3$.

Para que exista $f'(2)$, tiene que ser $f'(2^+) = f'(2^-)$

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (+1) = +1$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1) = -1$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, no existe $f'(2)$

Para que exista $f'(3)$, tiene que ser $f'(3^+) = f'(3^-)$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x - 5) = +1$$

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (+1) = +1$$

Como $f'(3^+) = f'(3^-)$, existe $f'(3) = 1$, luego la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ +1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 3 de 2003

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A =$, se pide:

- (a) [1 punto] Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
 (b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(a)

Para que la matriz A tenga inversa su determinante ha de ser distinto de cero, es decir $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{ \text{desarrollo por los adjuntos de la última fila} \} =$$

$$= m(0) - 0 + 1(1 - m^2) = 1 - m^2.$$

Si $1 - m^2 = 0$ tenemos $m = +1$ y $m = -1$, por tanto la matriz A tiene inversa si y solamente si $m \neq +1$ y $m \neq -1$.

(b)

Inversa de A para $m = 2$

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$

$$|A| = 1 - (2)^2 = -3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 3 de 2003

Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\begin{array}{ll} x = t & x = \alpha \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) & y = \alpha \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ z = 0 & z = \beta \end{array}$$

(a) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π .

(b) [1'25 puntos] Dados los puntos $B(4, 4, 4)$ y $C(0, 0, 0)$, halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B .

Solución

$$\begin{array}{ll} x = t & x = \alpha \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}) & y = \alpha \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ z = 0 & z = \beta \end{array}$$

(a)

La recta r tiene por punto $A(0,0,0)$ y vector director $\mathbf{u} = (1,1,0)$

El plano π tiene como punto $B = (0,0,0)$ y como vectores paralelos independientes $\mathbf{v} = (1,1,0)$ y $\mathbf{w} = (0,0,1)$

Ponemos el plano π en forma general y sustituimos en la ecuación de la recta en forma paramétrica.

Si nos sale $t = n^{\circ}$, la recta se corta con el plano en un punto.

Si nos sale $0 = 0$, la recta está contenida en el plano.

Si nos sale $n^{\circ} = 0$, lo cual es absurdo, nos dice que la recta es paralela al plano y no está contenida en él.

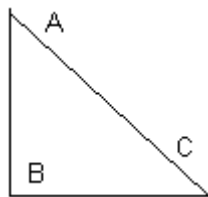
Plano π en forma general

$$0 = \det(\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{desarrollamos por los adjuntos de la última fila}\} = x - y = 0$$

Sustituimos la recta r en el plano $x - y = 0$, y nos queda $t - t = 0$, es decir $0 = 0$, por tanto la recta r está contenida en el plano π .

(b)

$B(4, 4, 4)$ y $C(0, 0, 0)$. Sea A un punto genérico de la recta r , es decir $A(t, t, 0)$



Como el triángulo es rectángulo en B los vectores \mathbf{BA} y \mathbf{BC} son perpendiculares y su producto escalar es cero.

$$\mathbf{BA} = (t - 4, t - 4, -4)$$

$$\mathbf{BC} = (-4, -4, -4)$$

$$\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC} = 0 = (t - 4, t - 4, -4) \cdot (-4, -4, -4) = -4t + 16 - 4t + 16 + 16 = -8t + 48, \text{ de donde } t = 6, \text{ y el punto } A \text{ pedido es } A(t, t, 0) = A(6, 6, 0)$$