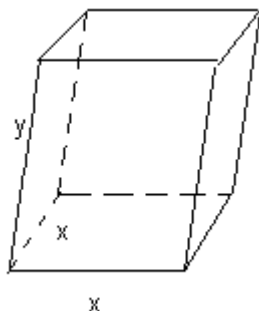


Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo

Solución



$$\text{Capacidad} = \text{Volumen} = x^2 \cdot y = 80 \text{ cm}^3$$

$$\text{Superficie lateral} + \text{tapa} = x^2 + 4xy$$

$$\text{Superficie base} = x^2$$

$$\text{Coste superficie lateral} + \text{tapa} \text{ a } 1 \text{ € / cm}^2$$

$$\text{Coste superficie base a } 1 \text{ € / cm}^2 \text{ mas el } 50\% = 1 + 50/100 = 1 + 1/2 = 3/2 \text{ € / cm}^2$$

$$\text{Coste total} = (x^2 + 4xy) \cdot 1 + x^2 \cdot (3/2) = (5/2)x^2 + 4xy$$

Relación $x^2 \cdot y = 80$ de donde $y = 80/x^2$. Entrando en coste total

$$\text{Coste total} = (5/2)x^2 + 4xy = (5/2)x^2 + 4x(80/x^2) = (5/2)x^2 + 320/x = C(x)$$

Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos

$$C'(x) = 5x - 320/x^2$$

$$C'(x) = 0; 5x - 320/x^2 = 0; 5x^3 = 320; x^3 = 64, \text{ de donde } x = \sqrt[3]{64} = 4$$

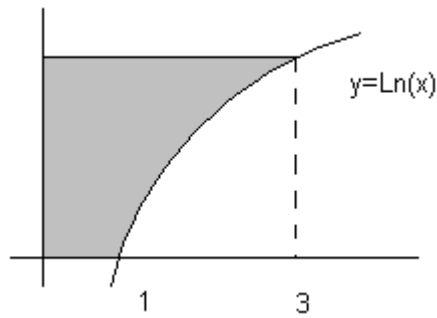
Veamos que es un mínimo con la 2ª derivada

$$C''(x) = 5 + 640/x^3, \text{ de donde } C''(4) = 5 + 640/64 = 15 > 0, \text{ luego es un mínimo.}$$

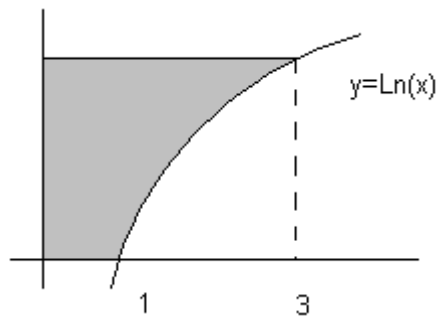
Las dimensiones de la caja para un coste mínimo son $x = 4 \text{ cm}$ e $y = 80/(4^2) = 5 \text{ m}$

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x , halla el área de la superficie sombreada



Solución



De la figura, se observa, que el punto donde se corta la recta paralela al eje de abscisas, y la función $y = \text{Ln}(x)$ es $\text{Ln}(3)$, por tanto la recta paralela al eje de abscisas es $y = \text{Ln}(3)$

El área pedida es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 \text{Ln}(3) \, dx - \int_1^3 \text{Ln}(x) \, dx = [\text{Ln}(3) \cdot x]_0^3 - [x \text{Ln}(x) - x]_1^3 = \\ &= [3 \cdot \text{Ln}(3) - 0] - [(3 \text{Ln}(3) - 3) - (1 \text{Ln}(1) - 1)] = 3 \text{Ln}(3) - 3 \text{Ln}(3) + 3 - 1 = 2 \text{ unidades de área (u.a.)} \end{aligned}$$

$\int \text{Ln}(x) \, dx$ es una integral por partes

$$\int \text{Ln}(x) \, dx = \text{Ln}(x) \cdot x - \int x \cdot (1/x) \, dx = \text{Ln}(x) \cdot x - \int dx = \text{Ln}(x) \cdot x - x$$

$$u = \text{Ln}(x); \, du = (1/x) \, dx$$

$$dv = dx; \, v = \int dx = x$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ ax + by + z &= 4 \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones distintas

Solución

$$x + 3y + z = 1$$

$$-x + y + 2z = -1$$

$$ax + by + z = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Sea A la matriz de los coeficientes y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ a & b & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

la matriz

ampliada.

Si nos dicen que el sistema tiene dos soluciones tiene que tener infinitas, por tanto ha de ser un sistema compatible e indeterminado, y como la matriz de los coeficientes como máximo es de orden 3 solo nos queda que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, o bien $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$, A ya tiene rango 2.

Como A no puede tener rango 3, $0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 5a - 3b + 4$

Como A^* tiene que tener rango 3, $0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ a & b & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4a$

Resolviendo el sistema

$$5a - 3b + 4 = 0$$

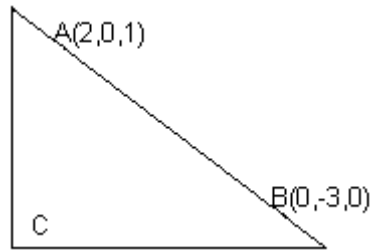
$$4 + 4a = 0,$$

se obtiene $a = -1$ y $b = -1/3$

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y + z = 1$ e $y - 3z + 3 = 0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla C y el área del triángulo ABC

Solución



Como el punto $C(x,y,z)$ pertenece a la intersección de las rectas $y + z = 1$ e $y - 3z + 3 = 0$, ponemos ambas rectas en paramétricas para ver las coordenadas del punto C

Tomamos $z = a$, con lo cual $y = 1 - a$ e $y = -3 + 3a$.

Igualamos $y = y$

$$1 - a = -3 + 3a$$

Resolviendo obtenemos $a = 1$, por tanto $z = a = 1$, e $y = 1 - 1 = 0$ y el punto C es $C(x,y,z) = C(x,0,1)$

Como me dicen que el triángulo es rectángulo en C el producto escalar (\bullet) de los vectores \mathbf{AC} y \mathbf{BC} ha de ser cero, es decir $\mathbf{AC} \bullet \mathbf{BC} = 0$

$$\mathbf{AC} = (x - 2, 0, 0)$$

$$\mathbf{BC} = (x, 3, 1)$$

$\mathbf{AC} \bullet \mathbf{BC} = 0 = (x - 2) \cdot x + 0 + 0 = 0$, de donde $x = 0$ y $x = 2$. Luego en principio tenemos dos puntos C_1 y C_2

Para $x = 0$, el punto es $C_1 (0,0,1)$

Como el triángulo es rectángulo su área es $= 1/2 \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 1/2 \cdot \text{cateto} \cdot \text{cateto} = 1/2 \cdot \|\mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{BC}\|$

$$\mathbf{AC} = (-2, 0, 0)$$

$$\mathbf{BC} = (0, 3, 1)$$

$$\|\mathbf{AC}\| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\|\mathbf{BC}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{área} = 1/2 \cdot \|\mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{BC}\| = 1/2 \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10} \text{ u.a.}$$

Para $x = 2$, el punto es $C_1 (2,0,1)$

Como el triángulo es rectángulo su área es $= 1/2 \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 1/2 \cdot \text{cateto} \cdot \text{cateto} = 1/2 \cdot \|\mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{BC}\|$

$$\mathbf{AC} = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{BC} = (-2, 3, 1)$$

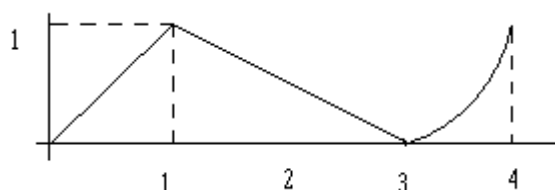
$$\|\mathbf{AC}\| = \sqrt{0^2} = 0$$

$$\|\mathbf{BC}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

área = $1/2 \cdot \|\mathbf{AC}\| \cdot \|\mathbf{BC}\| = 1/2 \cdot 0 \cdot \sqrt{14} = 0$ u.a., por tanto si no hay área no hay triángulo, y la solución $x = 2$ no es válida

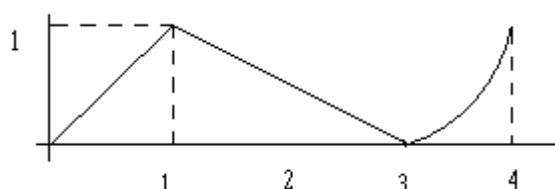
Ejercicio n° 1 de la opción B de septiembre de 2004

De una función $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo



- (a) [0'5 puntos] Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?
(c) [1 punto] Estudia la concavidad y la convexidad de f .

Solución



(a)

La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Nos dan $f(1) = 3$, y de la gráfica de la función $f'(x)$ observamos que $f'(1) = 1$, por tanto la recta tangente pedida es $y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$

(b)

Para estudiar la monotonía estudiamos el signo de $f'(x)$

De la gráfica observamos que $f'(x) \geq 0$ en $[0, 4]$ y por tanto la función siempre es creciente en $(0, 4)$, luego no tiene ni máximos ni mínimos relativos en $(0, 4)$.

De la gráfica observamos que $f'(x)$ es continua por tanto $f(x)$ es continua puesto que es derivable. Aplicando el Teorema de Weierstrass como $f(x)$ es continua en el cerrado $[0, 4]$, $f(x)$ alcanza su máximo y su mínimo absoluto en $[0, 4]$.

Los extremos absolutos se suelen alcanzar en las soluciones de $f'(x) = 0$, en este caso $x = 3$ (obsérvese la gráfica de $f'(x)$), los puntos donde no es continua ni derivable (no los hay) y en los extremos del intervalo, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 4$.

Como antes hemos visto que la función siempre es creciente, el máximo absoluto lo tiene que alcanzar en $x = 4$.

(c)

Como $f'(x)$ es creciente en $(0,1)$, y es derivable, tenemos que $f''(x) > 0$ en $(0,1)$, luego $f(x)$ es convexa (U) en $(0,1)$

Como $f'(x)$ es decreciente en $(1,3)$, y es derivable, tenemos que $f''(x) < 0$ en $(1,3)$, luego $f(x)$ es cóncava (\cap) en $(1,3)$

Como $f'(x)$ es creciente en $(3,4)$, y es derivable, tenemos que $f''(x) > 0$ en $(3,4)$, luego $f(x)$ es convexa (U) en $(3,4)$

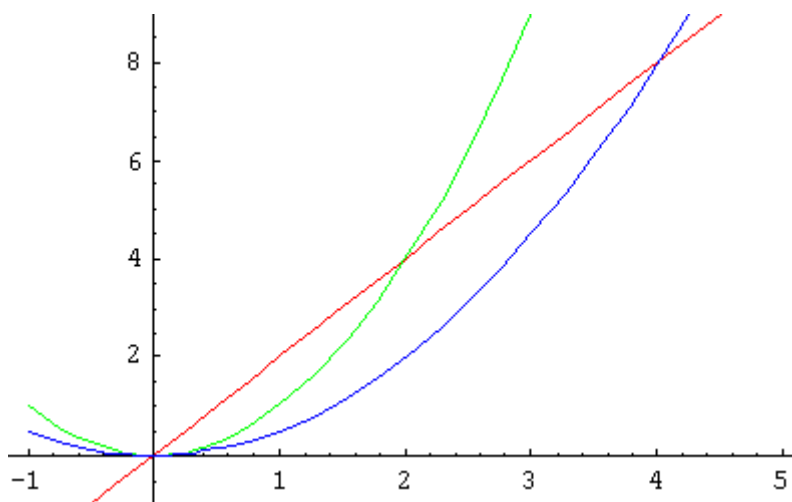
Por definición los puntos $x = 1$ y $x = 3$ son puntos de inflexión

Ejercicio n° 2 de la opción B de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y las curvas $y = x^2$ e $y = x^2/2$

Solución

Aunque no lo piden veamos las gráficas de las funciones $2x$, x^2 y $x^2/2$, que son las de una recta que pasa por el origen, la parábola x^2 y la parábola $x^2/2$ (un poquito más abierta que x^2)



En rojo la recta $2x$, en verde la parábola x^2 y en azul la parábola $x^2/2$

Veamos los puntos de corte de $2x$ con x^2 y de $2x$ con $x^2/2$

$2x = x^2$; de donde $2x - x^2 = 0 = x(2 - x)$, y las soluciones son $x = 0$ y $x = 2$

$2x = x^2/2$; de donde $2x - x^2/2 = 0 = x(2 - x/2)$, y las soluciones son $x = 0$ y $x = 4$.

El área encerrada por las tres funciones es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 (x^2 - x^2/2) dx + \int_0^2 (2x - x^2/2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \\ &= (8/3 - 8/6) + [(16 - 16/6) - (4 - 8/6)] = 12 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2004

(a) [1 punto] Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a ?

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución

(a)

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \neq 0$, tenemos que $|A| = 0 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -15 - 3a = 0$, de donde $a = -5$

(b)

Para resolver el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ para $a = -5$, que hemos obtenido en el

apartado (a), es decir $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ (que ya sabemos que tiene rango 2), y el rango de

la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Como en A^* , $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0$, tenemos que $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es compatible e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomamos las dos primeras

$$3x - 2y + z = 1$$

$$x - 4y - 2z = -1$$

Tomando $z = b$, obtenemos

$$3x - 2y = 1 - b$$

$$x - 4y = -1 + 2b$$

Resolviéndolo obtenemos

$x = 3/5 - (4/5)b$ e $y = 2/5 - (7/10)b$, luego la solución del sistema es $(x,y,z) = (3/5 - (4/5)b, 2/5 - (7/10)b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$

Ejercicio n° 4 de la opción B de septiembre de 2004

[2'5 puntos] Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Solución

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

De la recta r tomamos un punto $A(1,1,0)$ y un vector director $\mathbf{u} = (0,0,1)$

De la recta s tomamos un punto $B(0,-1,-1)$ y un vector director $\mathbf{v} = (1,1,0)$

La recta perpendicular (\perp) común a ambas rectas la vamos a dar como intersección de dos planos

$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{uxv})$ y $\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{uxv})$, siendo \mathbf{uxv} el vector producto vectorial de \mathbf{u} con \mathbf{v}

$$\mathbf{uxv} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(0) = (-1,1,0)$$

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{uxv}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y-1)(1) + z(0) = -x - y + 2 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{uxv}) = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x)(0) - (y+1)(0) + (z+1)(2) = 2z + 2 = 0$$

La recta pedida es
$$t \equiv \begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}$$