

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 5 de 2004

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - x \cdot |x|$.

(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f .

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

(c) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución

(a)

$$f(x) = 2 - x|x| = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2 + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

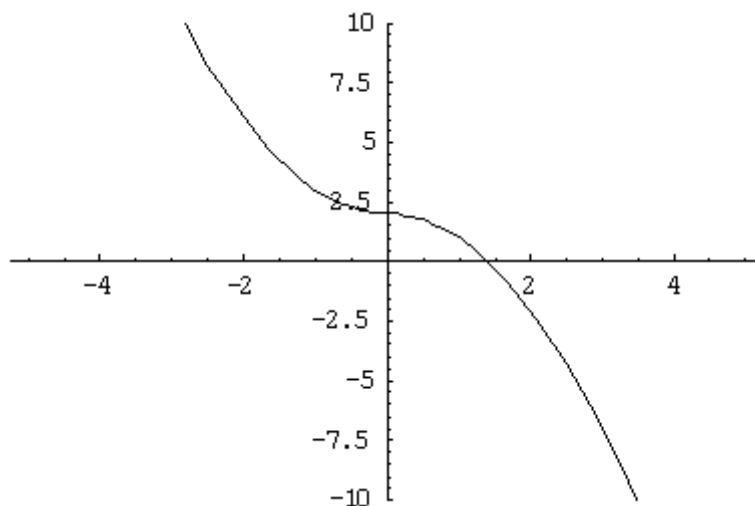
La gráfica de $+x^2$ es conocida ((parábola de vértice (0,0), y ramas hacia arriba))

La gráfica de $-x^2$ es igual que la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX ((abscisas))

La gráfica de $2 - x^2$ es igual que la de $-x^2$ pero desplazada dos unidades en ordenadas OY, hacia arriba.

La gráfica de $2 + x^2$ es igual que la de $+x^2$ pero desplazada dos unidades en ordenadas OY, hacia arriba.

La gráfica pedida es



(b)

$$f(x) = 2 - x|x| = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2 + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Existe $f'(0)$ si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (+2x) = 0$$

Como $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, existe $f'(0) = 0$, por tanto $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(c)

La recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f(2) = 2 - (2)^2 = -2$$

$$f'(2) = -2(2) = -4$$

Por tanto la recta tangente en $x = 2$ es $y + 2 = (-4)(x - 2)$

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Considera las funciones $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 - 2^x$, siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x . Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x=1$ y $x=2$ y las gráficas de f y g

Solución

La gráfica de $\ln(x)$ es conocida (su dominio es $(0^+, +\infty)$)

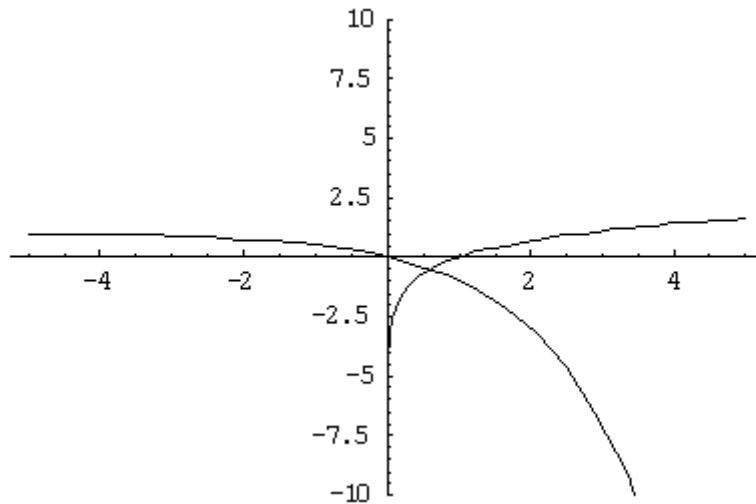
La gráfica de 2^x es conocida ((exponencial parecida a e^x))

La gráfica de -2^x es igual que la de 2^x pero simétrica respecto al eje OX

La gráfica de $1 - 2^x$ es igual que la de -2^x pero desplazada dos unidades hacia arriba en el eje OY.

Las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$ son conocidas

Aunque no lo piden las gráficas son



Vemos que el punto de corte de $\ln(x)$ con $1 - 2^x$, está antes de $x = 1$ ((se podría aplicar el teorema de Bolzano { si una función $g(x)$ es continua en el cerrado $[a,b]$ y cambia de signo en los extremos del intervalo entonces existe un punto $c \in (a,b)$, tal que $g(c) = 0$. Se podría probar $a = 0'1$ y $b = 0'9$ } a la función $g(x) = \ln(x) - 1 + 2^x$, pero no entra en el temario.

$$\begin{aligned} \text{El área pedida es } & \int_1^2 (\ln(x) - (1 - 2^x)) dx = [x \ln(x) - x - x + 2^x / (\ln(2))]_1^2 = \\ & = [(2 \ln(2) - 2 - 2 + 2^2 / (\ln(2))) - ((1 \ln(1) - 1 - 1 + 2^1 / (\ln(2)))] = \\ & = 2 \ln(2) - 2 + 4 / (\ln(2)) - 2 / (\ln(2)) \approx 2'27 u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z &= 0 \end{aligned}$$

Determina el valor a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de a .

Solución

Para que el sistema homogéneo

$$x + 3y + z = 0$$

$$2x - 13y + 2z = 0$$

$$(a + 2)x - 12y + 12z = 0$$

tenga soluciones distinta de la trivial $(0,0,0)$, el determinante de la matriz de los coeficientes ha

de ser cero, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes, pero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 190 - 19a = 0. \text{ de donde } a = 190/19 = 10.$$

Si $a = 10$, $|A| = 0$, y rango $(A) = 2$, con lo cual tenemos sólo dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomamos las dos primeras.

$$x + 3y + z = 0$$

$$2x - 13y + 2z = 0$$

Hacemos $z = b$, con $b \in \mathbb{R}$ y tenemos

$$x + 3y = -b$$

$$2x - 13y = -2b$$

Resolviéndolo obtenemos $x = -b$ e $y = 0$, con lo cual la solución del sistema es $(x,y,z) = (-b,0,b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 5 de 2004

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7$ y la recta $r \equiv$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r .

(b) [1'5 puntos] ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r ? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

Solución

(a)

Para calcular la ecuación de un plano perpendicular a " π " y que contenga a la recta " r ", ponemos la recta " r " como intersección de dos planos y formamos el haz de planos que determina " r ". Después le imponemos la condición de que dicho haz de planos sea perpendicular al plano " π " ((producto escalar de los vectores normales igual a cero)). De esta forma determinaremos el valor del parámetro y entrando en el haz de planos tendremos el plano pedido.

recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, en continua $(x - 1) = (y - 1) = (z - 1)/3$. Igualando dos a dos tendremos la recta como intersección de dos planos

$$(x - 1) = (y - 1), \text{ de donde } x - y = 0$$

$$(x - 1) = (z - 1)/3, \text{ de donde } 3x - z - 2 = 0$$

El haz de planos generado por "r" es $(x - y) + \lambda(3x - z - 2) = 0$, operando tenemos:

$$(1 + 3\lambda)x - y - \lambda z - 2\lambda = 0, \text{ de donde su vector normal es } \mathbf{n}_1 = (1 + 3\lambda, -1, -\lambda)$$

El vector normal del plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7$ es $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$

Producto escalar cero

$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = 0 = (1 + 3\lambda, -1, -\lambda) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 6\lambda - 1 + \lambda = 7\lambda + 1 = 0$, de donde $\lambda = -1/7$, y el plano pedido es:

$$(x - y) + (-1/7)(3x - z - 2) = 0, \text{ operando tenemos } 4x - 7y + z + 2 = 0$$

(b)

Para un plano paralelo al plano " π " y que contenga a la recta "r", hacemos el mismo proceso del apartado (a) y sólo tendríamos que ver si los vectores normales $\mathbf{n}_1 = (1 + 3\lambda, -1, -\lambda)$ y $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$ son proporcionales, es decir $(1 + 3\lambda)/2 = -1/1 = -\lambda/-1$.

Igualando miembro a miembro tenemos

$$\text{Por un lado } (1 + 3\lambda)/2 = -1/1, \text{ de donde } 1 + 3\lambda = -2, \text{ por tanto } \lambda = -1$$

Por otro lado $-1/1 = -\lambda/-1$, de donde $\lambda = -1$. Como ha salido el mismo $\lambda = -1$, si hay un plano que sea paralelo al plano " π " y que contenga a la recta "r" que es:

$$(x - y) + (-1)(3x - z - 2) = 0, \text{ operando tenemos } -2x - y + z + 2 = 0$$

Miguel Ángel Pedraza, alumno de 2º de Bachillerato, me ha mandado una solución más sencilla y corta.

Para el plano π' necesitamos un punto y dos vectores independientes. Se toma como punto el de la recta $A(1, 1, 1)$, uno de los vectores es el director de la recta $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ y el otro vector es el vector normal del plano $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$.

$$\text{El plano } \pi' \text{ pedido es } \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ y se obtiene la misma solución } -2x - y + z + 2 = 0$$

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x - 1)2x} \right) = 0/0$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital ((si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$,

derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si

existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$)) con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x - 1)2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - a(e^x)}{(e^x)2x + (e^x - 1)2} \right) = (2 - a)/0. \text{ Como me dicen que el límite existe y es finito el numerado ha de ser cero para poder seguir aplicándole la la regla de L'Hôpital, es decir } 2 - a = 0, \text{ de donde } a = 2.$$

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a = 2$, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2(e^x)}{(e^x)2x + (e^x - 1)2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2(e^x)}{(e^x)2x + (e^x)2 + (e^x)2} \right) = (-2)/(0 + 2 + 2) = (-2)/(4) = -1/2$$

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 5 de 2004

[2'5 puntos] Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área del recinto limitado por la parábola

de ecuación $y = \left(\frac{1}{3}x - b \right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

Solución

La parábola $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - b \right)^2$ tiene las ramas hacia arriba, el vértice en la abscisa $f'(x) = 0 = 2 \left(\frac{1}{3}x - b \right)$, de donde $x = 3b$. El vértice es $(x, y) = (3b, 0)$. Por tanto al ser $b > 0$ la parábola está por encima del eje OX.

Por corte con los ejes:

Con OY, hacemos $x = 0$, de donde $y = b^2$

Con OX, hacemos $f(x) = 0$, de donde $x = 3b$

Como $b > 0$, el área es 8 y es entre la parte positiva de los ejes coordenados, tenemos que el área es:

$$\begin{aligned} \text{Área} = 8 &= \int_0^{3b} \left(\frac{1}{3}x - b \right)^2 dx \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}x - b \right)^3 / 3 \right]_0^{3b} = \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}x - b \right)^3 \right]_0^{3b} = (0) - (-b)^3 = b^3 = 8, \text{ de donde } b = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2004

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$$

Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ (b) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (c) [1 punto] $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Solución

(a)

$$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (3)(5) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)(5)(-2) = -30$$

Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(b)

$$\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)(-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (3)(-1)(-2) = 6$$

Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

Si se intercambian entre si dos filas (columnas) de un determinante, el determinante cambia de signo

(c)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-2) + (-1)(0) = -2$$

Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente

Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

Si un determinante tiene dos filas (columnas) iguales o proporcionales dicho determinante es nulo (0)

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 5 de 2004

Las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ contienen dos lados de un cuadrado.

(a) [1'25 puntos] Calcula el área del cuadrado.

(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Solución

(a)

De cada recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ tomamos un punto y un vector director:

De la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ tomamos el punto A y el vector director \mathbf{u}

$$\text{Vector } \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(0) = (1, -1, 0)$$

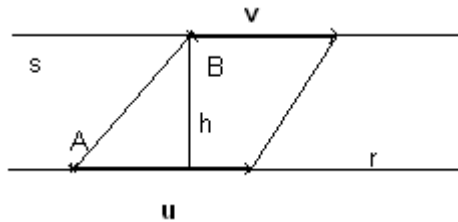
Para el punto A hacemos $y = 0$, de donde $x = 2$ y $z = 0$, luego $A(x, y, z) = A(2, 0, 0)$

De la recta $s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ tomamos el punto B y el vector director \mathbf{v}

$$\text{Vector } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i(-1) - j(-1) + k(0) = (-1, 1, 0)$$

Para el punto B hacemos $y = 0$, de donde $x = 6$ y $z = 0$, luego $B(x, y, z) = B(6, 0, 0)$

Como las rectas son paralelas para determinar el área del cuadrado calculamos la distancia de una recta a la otra recta, que será el lado del cuadrado, y el área es el lado al cuadrado



Lado del cuadrado = $h = d(B, r)$

Área paralelogramo = $\| \mathbf{AB} \times \mathbf{u} \| = ((\text{módulo del producto vectorial de los vectores } \mathbf{AB} \text{ y } \mathbf{u})) = (\text{base})(\text{altura}) = \| \mathbf{u} \| \cdot d(r, s)$, de donde

$$d(r, s) = (\| \mathbf{AB} \times \mathbf{u} \|) / (\| \mathbf{u} \|)$$

$$\mathbf{AB} = (4, 0, 0)$$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(-4) = (0, 0, -4)$$

$$\| \mathbf{AB} \times \mathbf{u} \| = \sqrt{0+0+16} = 4$$

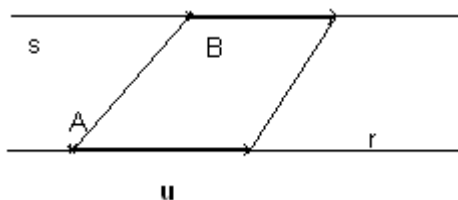
$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$\text{Luego lado del cuadrado} = h = d(B, r) = d(r, s) = (\| \mathbf{AB} \times \mathbf{u} \|) / (\| \mathbf{u} \|) = 4/\sqrt{2}$$

$$\text{Área del cuadrado} = h \cdot h = (4/\sqrt{2}) \cdot (4/\sqrt{2}) = 16/2 = 8 \text{ u}^2$$

(b)

Para hallar la ecuación del plano que contiene al cuadrado, es hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas "r" y "s".



Un plano está determinado por un punto, el A, y dos vectores coplanarios el \mathbf{u} y el \mathbf{AB} .

La ecuación del plano es $\det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-2)(0) - (y)(0) + (z)(-4) = -4z = 0$, es decir el plano que contiene al cuadrado es $z = 0$.