Ejercicio n° 1 de la opción A de junio de 2005

[2'5 puntos] De la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene por dominio R, por tanto es continua y derivable las veces que nos haga falta en R .

$x = -1$ es un máximo, por tanto $f'(-1) = 0$

La gráfica corta al eje OX en $x = -2$, por tanto $f(-2) = 0$

$x = 0$ es un punto de inflexión, por tanto $f''(0) = 0$

La recta tangente en $x = 2$ tiene de pendiente 9, por tanto $f'(2) = 9$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

De $f''(0) = 0$, tenemos $0 = 0 + 2b$, de donde $b = 0$

De $f'(-1) = 9$, tenemos $0 = 3a(-1)^2 + c$, de donde $3a + c = 0$

De $f'(2) = 9$, tenemos $9 = 3a(2)^2 + c$, de donde $12a + c = 9$

Restando estas dos últimas ecuaciones tenemos $9a = 9$ de donde $a = 1$

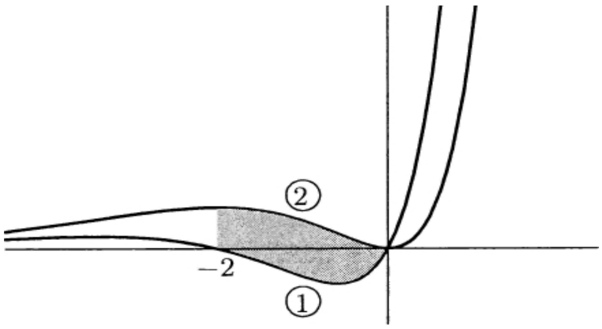
Entrando con $a = 1$ en $3a + c = 0$, nos resulta $c = -3$

De $f(-2) = 0$, tenemos $0 = 1(-2)^3 + 0 + (-3)(-2) + d$, de donde $d = 2$

Por tanto los números pedidos son $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ y $d = 2$

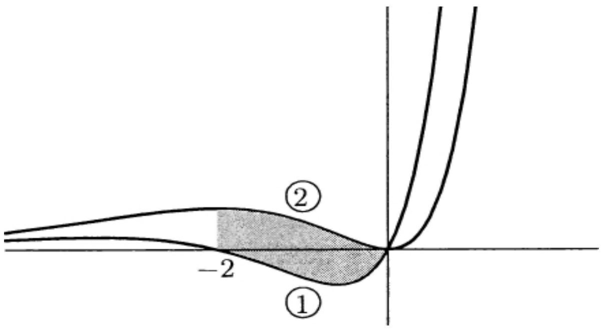
Ejercicio n° 2 de la opción A de junio de 2005

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2e^x$ y a su función derivada f'.
(a) [1 punto] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región sombreada.



Solución

(a)



f (x) = x^2e^x

Esta función tiene por dominio R, es continua y derivable las veces que nos haga falta en R. También vemos que esta función f(x) siempre es positiva (f(x) > 0), puesto que es el producto de x^2 que siempre es positiva con la exponencial e^x que siempre es positiva, por tanto la gráfica de la función f(x) es la señalada con el número 2, pues está dibujada siempre por encima del eje de abscisas OX y la de su derivada f '(x) = $2xe^x + x^2e^x$ es la señalada con el número 1 pues tiene partes por encima y partes por debajo del eje OX.

Vamos a ver algunos detalles mas de f(x) y de f '(x) para confirmarlo, aunque lo anterior creo que está suficientemente razonado.

$\lim_{x\to\infty} x^2e^x = \infty\cdot\infty = \infty$, efectivamente cuando x tiende a + ∞ , f(x) tiene a + ∞ , tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

$$\lim_{x\to -\infty} x^2e^x = \lim_{x\to\infty} (-x)^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicándole la Regla de L'Hôpital tenemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

Volviéndole a aplicar la Regla de L'Hôpital $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$, con lo cual la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) en - ∞ , tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

También se observa que f(0) = 0

Ahora nos fijamos en la gráfica de la figura 1, la de la derivada f '(x)

Vemos que f '(x) > 0 en (- ∞ , -2), luego f(x) crece en (- ∞ , -2) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que f '(x) < 0 en (-2,,0), luego f(x) decrece en (-2, 0) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición x = -2 es un máximo relativo de f(x) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que f '(x) > 0 en (0,+ ∞), luego f(x) crece en (0,+ ∞) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición x = 0 es un mínimo relativo de f(x) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que f '(x) decrece aproximadamente en (- ∞ , -0'5), luego f ''(x) < 0 en (- ∞ , -0'5), y por tanto la función f(x) es cóncava (∩) en (- ∞ , -0'5), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que f '(x) crece aproximadamente en (-0'5, + ∞), luego f ''(x) > 0 en (-0'5, + ∞), y por tanto la función f(x) es convexa (U) en (-0'5, +∞), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Por definición, aproximadamente x = -0'5 es un punto de inflexión de f(x), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

(b)

El área pedida es $\int_{-2}^{0}(f(x) - f'(x))\,dx = \int_{-2}^{0}[x^2e^x-(x^2e^x+2xe^x)\,dx = -2\cdot\int_{-2}^{0}xe^x\,dx = (*)$

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes, y por tanto le aplicaremos la fórmula de $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

$$\int x\cdot e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x$$

Volvemos ya a la integral definida

$$(*) = -2\int_{-2}^{0} x\cdot e^x dx = -2\left[x\cdot e^x - e^x\right]_{-2}^{0} = -2[(0 - e^0) - (-2e^{-2} - e^{-2})] = 2 - 6e^{-2} \approx 1'1879\ u^2$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2005

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala

(b) [1'5 puntos] Determina la matriz X que cumple que $A.X + C.B^t = B.B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Solución

(a)

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa si $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$, luego A tiene inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t)$

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} =$
$\frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

(b)

$AX + CB^t = BB^t$, de donde $AX = BB^t - CB^t$

$CB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

$AX = BB^t - CB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

Como A tiene inversa multiplicamos por la izquierda por la inversa de A la expresión AX = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

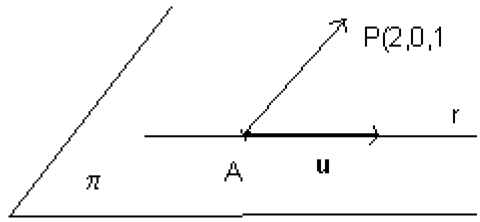
$A^{-1}AX = X = A^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 26 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4 de la opción A de junio de 2005

Considera el punto P(2, 0,1) y la recta r ≡ $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$
(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.
(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

(a)



Normalmente para obtener un plano a partir de una recta y un punto exterior a la recta, se toma como punto del plano un punto de la recta, el A y como vectores el director de la recta **u** y el **AP**, y el plano tiene de ecuación det(**x** – **a**, **u**, **AP**) = 0. Para ello se pone la recta en su ecuación paramétrica

Para poner la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$ en su ecuación paramétrica, tomamos y = a ∈ R , con lo cual tenemos x = 6 – 2a, y la recta en ecuación paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$.

Un punto de la recta sería A(6, 0, 2) y un vector director es **u** = (-2, 1 , 0)

El otro vector para el plano seria el vector **AP** = (-4, 0, -1)

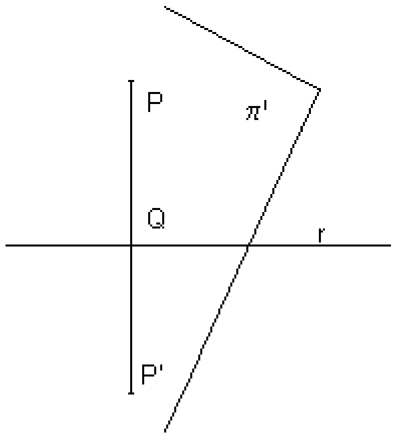
El plano pedido es π ≡ det(**x** – **a**, **u**, **AP**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-6 & y & z-2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = (x – 6)(-1) – y(2 – 0) + (z – 2)(4) =

= -x – 2y + 4z – 2 = 0

Otra forma de hacerlo

Formamos el haz de planos que determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$, que es (x + 2y – 6) + λ(z – 2) = 0, y le imponemos la condición de que pase por el punto P(2, 0, 1), y nos queda (2+0-6) + λ(1 – 2) = 0, de donde λ = - 4, y el plano pedido es (x + 2y – 6) + (-4)(z – 2) = 0. Operando queda x+2y-4z+2=0, y como vemos nos da el mismo plano.

(b)



Para calcular el punto simétrico del punto P respecto de la recta "r", calculamos la proyección ortogonal de P sobre "r" que es el punto Q, y Q es el punto medio del segmento PP’, siendo P’ el punto simétrico buscado.

Para calcular el punto Q determinamos el plano π ’ perpendicular a la recta "r" por el punto P.

El vector normal del plano **n** es el director de la recta **u** = (-2,1,0). Del apartado (a)

El plano π ’ es el producto escalar (•) del vector **n** con el vector **x** – **p** = (x-2, y-0, z-1) igualado a 0

π ’≡ **n**•(**x** – **p**) = 0 = -2(x – 2) + 1(y - 0) + 0(z - 1) = -2x + y + 4 = 0

Q es la intersección del plano π ’ con la recta "r"

La recta en su forma paramétrica es $$r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$$, luego sustituyendo tenemos –2(6 – 2a) + a + 4 = 0, de donde a = 8/5 y el punto Q es Q(x,y,z) = Q(6 –2(8/5), 8/5, 2) = Q(14/5,8/5,2)

Q es el punto medio del segmento PP’

(14/5,8/5,2) = ((x+2)/2, (y+0)/2, (z+1)/2)

De (x+2)/2 = 14/5, obtenemos x = 18/5

De (y+0)/2 = 8/5, obtenemos y = 16/5

De (z+1)/2 = 2, obtenemos z = 3

El simétrico buscado es el punto P’(18/5, 16/5, 3)

Ejercicio n° 1 de la opción B de junio de 2005

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

(a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f.*

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a)

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Como $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, x = 0 es una asíntota vertical de f(x) (A.V.)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como tenemos un cociente en el cual el grado del numerador es uno mas que el del denominador, tenemos una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n de f(x), y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$, donde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$ y

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Luego la asíntota oblicua es y = x

Veamos la posición relativa de f(x) respecto a la A.O.

Como $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $+\infty$

Como $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $-\infty$

(b)

Para estudiar la monotonía veamos la 1ª derivada

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x)-(x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Resolvemos f '(x) = 0, luego $x^2 - 1 = 0$ y las soluciones son x = +1 y x = -1 que pueden ser los posibles máximos y mínimos

Como f '(-2) =3/4 > 0, f(x) es creciente en (- ∞ , -1)

No podemos sustituir en la 1ª derivada x = 0 porque x = 0 es una A.V.

Como f '(-0'5) = -0'75/0'25 < 0, f(x) es decreciente en (-1,0) unión (0, +1)

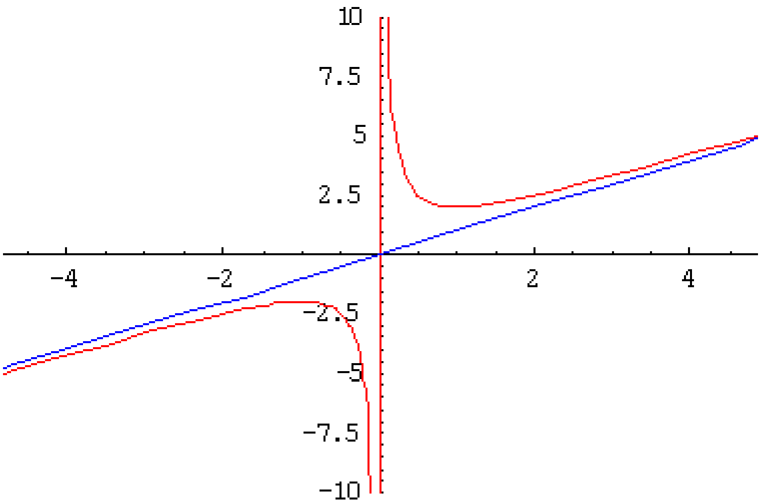
Por definición x = -1 es un máximo relativo de f(x) que vale f(-1) = 2/(-1) = -2

Como f '(2) = 3/4 > 0, f(x) es creciente en (1, + ∞)

Por definición x = 1 es un mínimo relativo de f(x) que vale f(1) = 2/(1) = 2

(c)

Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio nº 2 de la opción B de junio de 2005

Considera la función f : R → R definida por f (x) = $e^{-x/2}$.
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación x = 2 y la recta tangente obtenida en (a).

Solución

(a)

$f(x) = e^{-x/2}$.

La recta tangente en x = 0 es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$f'(x) = e^{-x/2}.(-1/2)$

$f(0) = e^0 = 1$

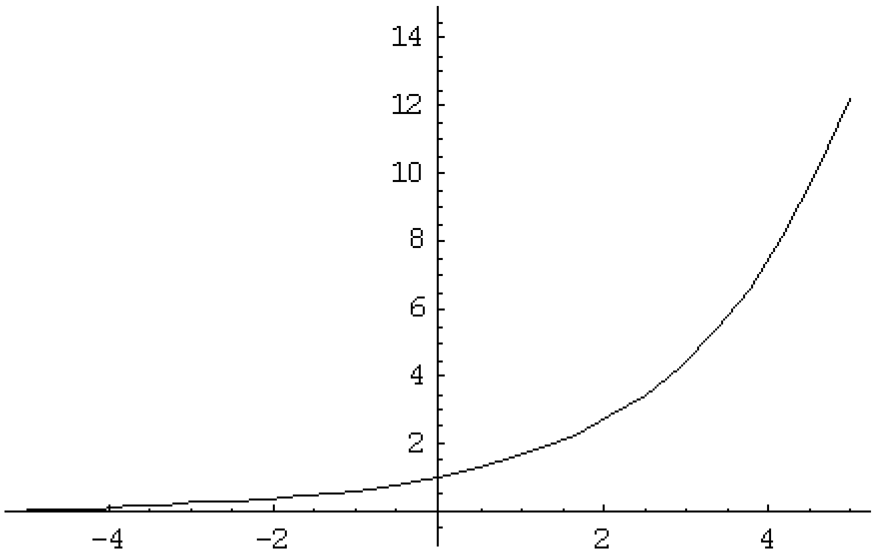
$f'(0) = e^0.(-1/2) = (-1/2)$

La recta tangente en x = 0 es $y - 1 = (-1/2)(x - 0)$, de donde $y = (-1/2)x + 1$

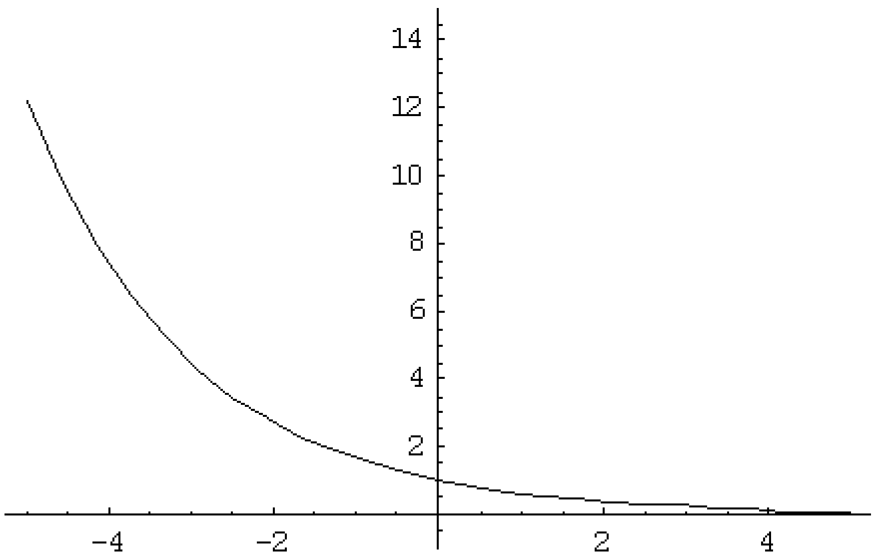
La recta tangente corta al eje OX en y = 0, de donde x = 2

(b)

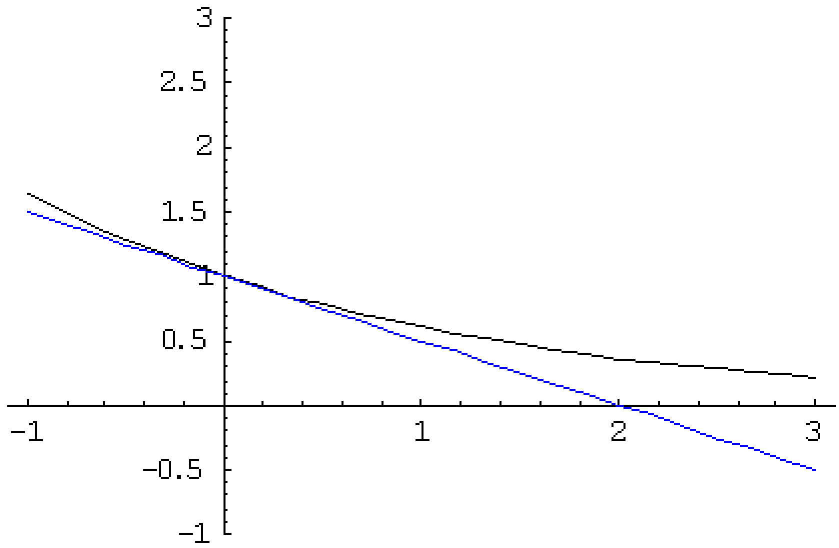
Aunque no la piden, la gráfica de $e^{x/2}$ es muy parecida a la de e^x pero un poco mas abierta



Como sabemos la grafica de $f(x) = e^{-x/2}$ es exactamente igual que la de $e^{x/2}$ pero simétrica respecto del eje OY



Y la gráfica conjunta de $f(x) = e^{-x/2}$ y de la tangente $y = (-1/2)x + 1$ es



Por tanto el área pedida es

$$\int_0^2 [e^{-x/2} - (-x/2+1)]dx = \int_0^2 (e^{-x/2} + x/2 - 1)dx = \left[-2e^{-x/2} + x^2/4 - x\right]_0^2 =$$

$$= (-2e^{-1} + 1 - 2) - (-2e^{0} + 0 - 0) = (1 - 2/e) \approx 0'2642\ u^2$$

Ejercicio n° 3 de la opción B de junio de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$x+y+z = -2$$
$$-\lambda x+3y+z = -7$$
$$x+2y+(\lambda+2)z = -5$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ
(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$x+y+z = -2$$

$$-\lambda x+3y+z = -7$$

$$x+2y+(\lambda+2)z = -5$$

La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ y la ampliada A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & \lambda+2 & -5 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 – 3 = -2 ≠ 0, por lo menos A tiene rango 2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a C + 1^a C(-1) \\ 3^a C + 1^a C(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1) \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a F + 1^a F(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ -\lambda-2 & 0 \end{vmatrix} =$$

= -(1 + λ)(-2 - λ)

Si |A| = 0 tenemos 1 + λ = 0 y -2 - λ = 0 de donde λ = -1 y λ = -2

Si λ ≠ -1 y λ ≠ -2, rango(A) = rango(A*) = 3 luego el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única.

Si **λ = -1** la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

En A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a F + 1^a F(-1) \\ 3^a F + 1^a F(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-1) \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

= -(-6 + 5) = 1 ≠ 0, rango de A* = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b)

Si **λ = -2** la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

En A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} 2^a F + 1^a F(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales; luego tenemos que rango de A* = 2

Como rango(A) = 2 = rango(A*) , el sistema es compatible e indeterminado.

Como el rango es dos tomamos solo dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Elijo las dos primeras.

x+y+z = - 2

2x+3y+z = -7, tomamos z = a ∈ R , de donde

x+y = - 2 – a

2x+3y = -7- a. Haciendo 2ª ecuación + 1ª ecuación por (-2) tenemos

x+y = - 2 – a

y = -3 + a, de donde x = 1 – 2a

La solución del sistema es (x, y, z) = (1 – 2a, -3 + a, a) con a ∈ R.

Ejercicio nº 4 de la opción B de junio de 2005

Sean los vectores $\overrightarrow{v_1}$ = (0,1, 0), $\overrightarrow{v_2}$ =(2,1, -1) y $\overrightarrow{v_3}$ =(2, 3, -l).

(a) [0'75 puntos] ¿Son los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ linealmente dependientes`?
(b) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de a el vector (4, a + 3, -2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$?

(c) [1 punto] Calcula un vector unitario y perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.

Solución

(a)

$\vec{v_1}$ = (0,1, 0), $\vec{v_2}$ = (2,1, -1) y $\vec{v_3}$ = (2, 3, -1)., son linealmente dependientes si det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$) = 0

det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$) =0 = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ = (1)(-1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos filas iguales.

(b)

Como $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente dependientes, si nos fijamos en los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$, dos a dos al no tener sus coordenadas proporcionales vemos que son independientes dos a dos, y que cada uno de ellos depende de los otros dos.

Me piden ver para que valores de "a" el vector **u** = (4, a + 3, -2) depende linealmente de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$.

Como $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente dependientes, lo único que ver que el vector **u** depende linealmente de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, puesto que $\vec{v_3}$ depende linealmente de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$; es decir lo que tenemos que ver es que el determinante det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, **u**) sea 0.

det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, **u**) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix}$ = (1)(-1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ = 0, por tener dos filas proporcionales, por tanto el vector **u** depende linealmente de los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$, sea cual sea el valor del parámetro "a".

(c)

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ es su vector producto vectorial **w** = $\vec{v_1}$ x $\vec{v_2}$

w = $\vec{v_1}$ x $\vec{v_2}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) – **j**(0) + **k**(-2) = (-1, 0, -2)

Un vector unitario y perpendicular a $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sería **w**/||**w**||, siendo ||**w**|| el módulo del vector **w**

||**w**|| = $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

El vector pedido es $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = (\frac{-1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{-2}{\sqrt{5}})$

Otro vector sería el $\frac{-\vec{w}}{||\vec{w}||} = (\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}})$