Ejercicio nº 1 de la opción A de septiembre de 2005

De una función f: R → R se sabe que f(0) = 2 y que f '(x) = 2x.
(a) [1 punto] Determina f.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones x = - 2 y x = 2.

Solución

(a)

f: R → R se sabe que f(0) = 2 y que f '(x) = 2x.

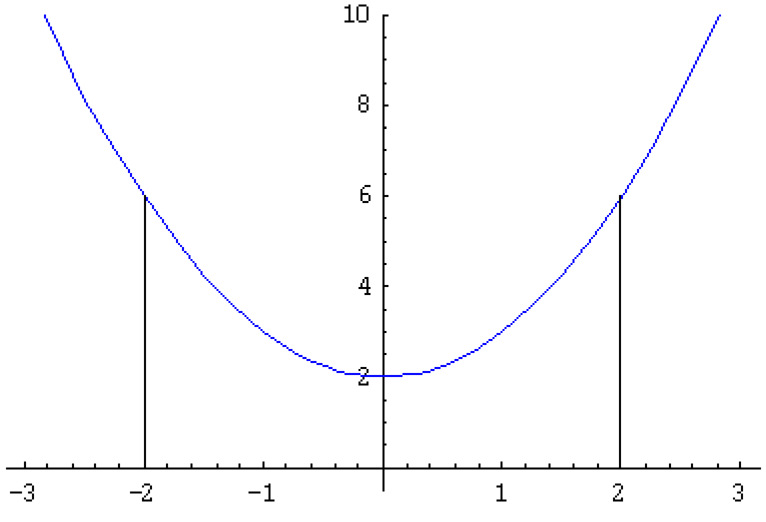
Aplicando el Teorema fundamental del cálculo integral que dice: si g(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces la función $\int_a^x g(t)dt$ es derivable y su derivada es la función g(x). En nuestro caso tenemos

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 2xdx = x^2 + K$$

Le imponemos la condición f(0) = 2 con lo cual 2 = 0+K, de donde K = 2 y f(x) = x^2 + 2

(b)

La función f(x) = x^2 + 2 tiene por gráfica una parábola igual que la x^2 pero desplazada 2 unidades hacia arriba en el eje de ordenadas OY. Su gráfica es muy sencilla



Por tanto el área pedida es

$$Area = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \{Por\ simetria\} = 2\int_0^2 f(x)dx =$$

$$= 2\int_0^2 (x^2+2)dx = 2\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3}+4\right)-(0)\right] = \frac{40}{3}u^2$$

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2005

Sea f: R → R la función definida por $f(x) = (x-1)^2.e^{-x}$.
(a) [0'5 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

(a)

$f(x) = (x-1)^2.e^{-x} = (x-1)^2/e^{x}$.

No tiene asíntotas verticales puesto que el denominador e^x es una función exponencial que siempre es positiva y no se anula nunca y por tanto no existe ningún número "a" tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Tiene la asíntota horizontal y = 0 en $+\infty$ puesto que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \left\{ \begin{matrix} Le\ aplicamos\ la \\ \text{Regla de L'Hopital} \end{matrix} \right\}$$

[La regla de L'Hôpital nos dice que si f(x) y g(x) son funciones continuas en [a-m, a+m], derivables en (a-m, a+m), verificando $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existiendo $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces se demuestra que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se demuestra que la Regla es válida cuando $x \to \infty$, y cuando en vez de salir 0/0 sale ∞/∞ .]

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x-1)}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \left\{ \begin{matrix} Le\ aplicamos\ la \\ \text{Regla de L'Hopital} \end{matrix} \right\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(x-1)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Como tiene una asíntota horizontal no puede tener asíntotas oblicuas.

(b)

Tenemos que estudiar la monotonía lo cual podemos hacerlo estudiando su primera derivada f '(x)

$f(x) = (x-1)^2.e^{-x} = (x-1)^2/e^{x}$.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\cdot e^x - (x-1)^2 \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) \cdot (-x+3)}{e^{2x}}$$

Veamos las raíces de f '(x) =0, es decir las soluciones de $e^x(x – 1)(- x + 3) = 0$.

Como e^x siempre es positivo nos queda $(x – 1)(- x + 3) = 0$, de donde x = 1 y x = 3, que serán los posibles máximos o mínimos relativos.

Como f '(0) = - 3 < 0, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$

Como f '(2) = $1/(e^2) > 0$, f(x) es estrictamente creciente en (1,3)

Como f '(4) = $- 3/(e^4) < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$

Por definición x = 1 es un mínimo relativo que vale f(1) = 0

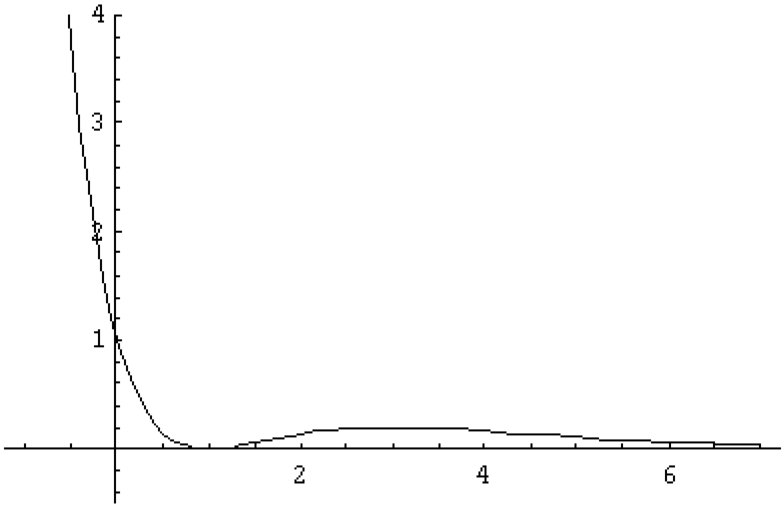
Por definición x = 3 es un máximo relativo que vale $f(3) = 4/(e^3) \cong 0'2$

Como $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(-x-1)^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} (x+1)^2 \cdot e^x = \infty$$

Resulta que f(x) no tiene máximo absoluto puesto que en $-\infty$ f(x) vale $+\infty$, y que x = 1 es el mínimo absoluto, además de ser el mínimo relativo, puesto que la función $f(x) = (x – 1)^2.e^{-x}$ siempre es positiva o cero.

(c)

Un esbozo de la función, sabiendo que f(0) = 1 es



Ejercicio nº 3 de la opción A de septiembre de 2005

[2'5 puntos] En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Solución

Sea x = Peso de una sortija

Sea y = Peso de una moneda

Sea z = Peso de un pendiente

Leyendo el problema tenemos tres posibles sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

$x = 18$		$y = 18$		$z = 18$
$x + y + z = 30$	ó	$x + y + z = 30$	ó	$x + y + z = 30$
$4x + 3y + 2z = 90$		$4x + 3y + 2z = 90$		$4x + 3y + 2z = 90$

y solo será valido aquel que tenga solución única y los tres valores sean positivos, puesto que el peso no puede ser negativo.

Los resolvemos uno a uno

$x = 18$

$x + y + z = 30$

$4x + 3y + 2z = 90$

Sustituyendo x en la 2ª y 3ª ecuación tenemos

$x + z = 12$

$3y + 2z = 18$. Resolviéndolo sale como solución $(x,y,z)=(18,-6,18)$, que no es válida puesto que la y es negativa.

$y = 18$

$x + y + z = 30$

$4x + 3y + 2z = 90$

Sustituyendo y en la 2ª y 3ª ecuación tenemos

$x + z = 12$

$4x + 2z = 36$. Resolviéndolo sale como solución $(x,y,z)=(6,18,6)$, que es válida, **luego el objeto sería la y que representa a una moneda.**

$z = 18$

$x + y + z = 30$

$4x + 3y + 2z = 90$

Sustituyendo x en la 2ª y 3ª ecuación tenemos

$x + y = 12$

$4y + 3y = 54$. Resolviéndolo sale como solución $(x,y,z)=(18,-6,18)$, que no es válida puesto que la y es negativa.

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2005

Considera un plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = (z - 2)/2$
(a) [0'75 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
(b) [0'75 puntos] Halla m para que r y π sean perpendiculares.
(a) [1 punto] ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ?.

Solución

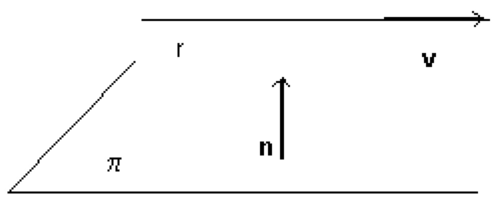
(a)

$\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = (z - 2)/2$

Un vector normal del plano es **n** = (1,1,m)

Un vector director de la recta es **v** = (1,1,2)

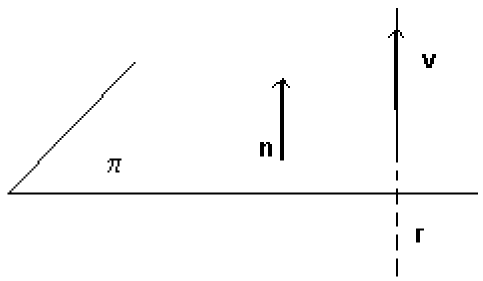
Un punto de la recta A(0,1,2)



Para que la recta r y el plano π sean paralelos, el vector normal del plano **n** = (1,1,m) y el vector director de la recta **v** = (1,1,2) han de ser perpendiculares, por lo tanto su producto escalar ha de ser cero.

n•v = 0 = 1 + 1 + 2m = 0, de donde m = -1

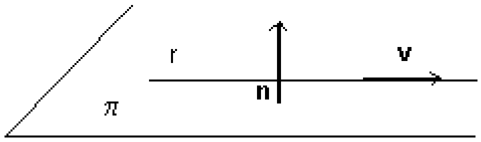
(b)



Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares, el vector normal del plano **n** = (1,1,m) y el vector director de la recta **v** = (1,1,2) han de ser paralelos, por lo tanto sus componentes han de ser proporcionales.

1/1 = 1/1 = m/2, de donde m = 2

(c)



Si la recta está contenida en el plano, por un lado el vector normal del plano **n** = (1,1,m) y el vector director de la recta **v** = (1,1,2) han de ser perpendiculares, por lo tanto su producto escalar ha de ser cero, y ya hemos visto que m = -1 (es el caso (a))

El plano sería $\pi \equiv x + y - z = 3$

Por otro lado al estar la recta r contenida en el plano, todos los puntos de la recta han de verificar la ecuación del plano.

Un punto de la recta era A(0,1,2), pero al sustituirlo en el plano tenemos 0 + 1 – 2 = 3, lo cual es absurdo y no se puede dar el caso de que la recta esté contenida en el plano.

(**Para una observación de Aarón Rosas**)

Si me pidiesen un plano paralelo a π que contenga a la recta "r" tendríamos

$\pi_1 \equiv x + y - z = k$, y después le impondríamos la condición de que pasase por el punto A(0,1,2) de la recta "r"

0 +1 - 2 = k, y dicho plano sería $\pi_1 \equiv x + y - z = -1$

Ejercicio n° 1 de la opción B de septiembre de 2005

De una función f : [0,5] → R se sabe que f(3) = 6 y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2 & si \quad 0 < x < 1, \\ x^2 - 6x + 8 & si \quad 1 \le x < 5. \end{cases}$$

(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.
(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución

(a)

La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 3 es

$$y – f(3) = f '(3)(x – 3)$$

Nos dan f(3) = 6, y de la función derivada tenemos f '(3) = 3^2 -6(3) + 8 = -1, luego la recta pedida en forma punto pendiente es y – 6 = -1(x – 3)

(b)

La función derivada f ‘(x) es continua en (0,5) puesto que

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = f'(1) = 3$$

, siendo el 1 el único punto dudoso.

Los máximos y mínimos relativos salen de las posibles soluciones de f ‘(x) = 0

Si 0 < x < 1, f ‘(x) = 5x – 2 = 0, de donde x = 2/5

Si 1 ≤ x < 5, f ‘(x) = x^2 – 6x + 8 = 0, de donde x = 2 y x = 4

x = a es un máximo relativo si f ‘(a) = 0 y f ‘’(a) < 0

x = a es un mínimo relativo si f ‘(a) = 0 y f ‘’(a) > 0

En nuestro caso $f''(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 < x < 1, \\ 2x - 6 & si \quad 1 < x < 5. \end{cases}$ luego:

Como f ‘’(2’5) = 5 > 0, x = 2/5 es un mínimo relativo

Como f ‘’(2) = -2 < 0, x = 2 es un máximo relativo

Como f ‘’(4) = 2 > 0, x = 4 es un mínimo relativo

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función f(x) es continua, puesto que entre otras razones su derivada también lo es, tenemos que:

f(x) es decreciente en (0,2/5) U (2,4)

f(x) es creciente en (2/5,2) ∩ (4,5)

Para ver los valores que alcanzan los extremos relativos tenemos que calcular f(x).

Vamos a calcular f(x)

Como f ‘(x) es continua podemos aplicarle el teorema fundamental del cálculo integral que dice: si g(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces la función $\int_a^x g(t)dt$ es derivable y su derivada es la función g(x), en nuestro caso tenemos:

Si 0 ≤ x < 1, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (5x-2)dx = \frac{5x^2}{2} - 2x + K$

Si 1 ≤ x ≤ 5, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 6x + 8)dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + L$

Como f(3) = 6, 6 = 27/3 – 27 + 24 + L, de donde L = 0

Como f(x) es continua en x = 1, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 8$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{5}{2} - 2 + K$$

Igualándolo tenemos $\frac{1}{3} - 3 + 8 = \frac{5}{2} - 2 + K$, de donde K = 29/6, luego la función es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2}{2} - 2x + \frac{29}{6} & si \quad 0 \le x < 1, \\ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x & si \quad 1 \le x \le 5. \end{cases}$$

Veamos ya los valores de f(x) en los extremos relativos 2/5, 2 y 4.

f(2/5) = 133/30 ≈ 4’433..

f(2) = 20/3 ≈ 6’666..

f(4) = 16/3 ≈ 5’333..

Ejercicio n° 2 de la opción B de septiembre de 2005

Considera la integral definida $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1} dx.$

(a) [1’25 puntos] Exprésala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t.$.
(b) [1’25 puntos] Calcula I.

Solución

(a)

Cambio $\sqrt{1+x} - 1 = t.$

Si x = 3 tenemos $\sqrt{4} - 1 = t$, de donde t = 1.

Si x = 8 tenemos $\sqrt{9}-1=t$, de donde t = 2.

De $\sqrt{1+x}-1=t$, tenemos $\sqrt{1+x}=t+1$, y elevando al cuadrado (1+x) = $(t+1)^2$, con lo cual

dx = 2(t+1)dt, y la integral sería

$$I=\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx=\int_1^2 \frac{1}{t}\cdot 2(t+1)dt=2\int_1^2(1+\frac{1}{t})dt$$

(b)

$$I=2\int_1^2(1+\frac{1}{t})dt=2\left[t+\ln|t|\right]_1^2=$$

= 2[(2 + ln(2)) – (1 + ln(1))] = 2[1 + ln(2)]

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2005

Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:
(a) [1 punto] | - 3A| y $|A^{-1}|$
(b) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.
(c) [0'75 puntos] $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

Solución

a)

Si A_n es una matriz de grado n sabemos que $|kA| = k^n|A|$

De $AA^{-1} = I$, tenemos $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$, de donde $|A^{-1}| = 1/(|A|)$

En nuestro caso como A es de orden 3 tenemos $|-3A| = (-3)^3|A| = (-27)(2) = -54$

$|A^{-1}| = 1/(|A| = ½$

(b)

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2(2) = -4$$

(1) Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número sale fuera del determinante multiplicándolo

(2) Si se cambian entre si dos filas (columnas) de un determinante dicho determinante cambia de signo

(c)

$$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} \overset{(1)}{\underset{(4)}{=}} 0 - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

(3) Si una fila (columna) de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.

(4) Si un determinante tiene dos filas (columnas) iguales dicho determinante vale 0.

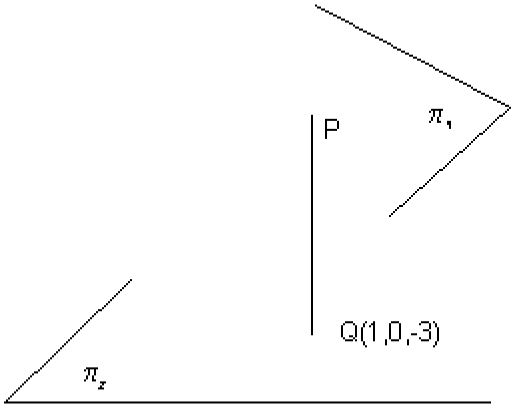
Ejercicio n° 4 de la opción B de septiembre de 2005

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$
(a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto (1,0,-3).
(b) [1 punto] Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

Solución

(a)

$\pi_1 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 2y + z + 2 = 0$



Para calcular el punto P del plano π_1 pedido, consideramos la recta r perpendicular al plano π_2 que pasa por el punto Q(1,0,-3)

Como r es perpendicular a π_2 , el vector director de la recta **v** es el normal del plano **n** = (1,2,1)

La reta r en forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ x = -3 + \lambda \end{cases}$

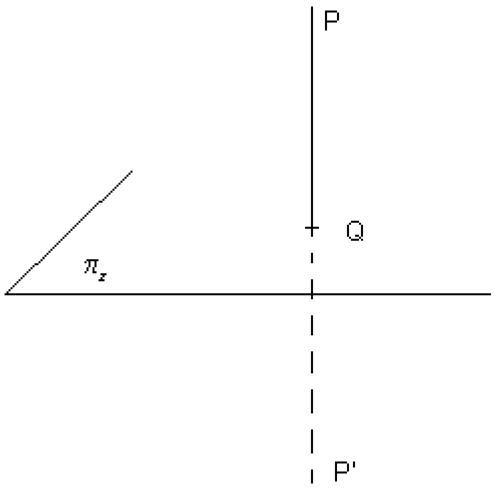
El punto P pedido es la intersección de la recta r con el plano π_1 (sustituimos la recta en el plano, obtenemos el valor de λ , y de aquí el punto)

2(1 + λ) + (2λ) – (-3 + λ) +5 =0, de donde λ = -10/3 y el punto pedido es

P(1 +(-10/3), -20/3, -3 – 10/3) = P(-7/3, -20/3, -19/3)

(b)

Tal y como se ha calculado el punto P



se observa que Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico pedido

$(1, 0, -3) = ((-7/3 + x)/2, (-20/3 + y)/2, (-19/3 + z)/2)$, de donde

$1 = (-7/3 + x)/2$, y operando obtenemos $x = 13/3$

$0 = (-20/3 + y)/2$, y operando obtenemos $y = 20/3$

$-3 = (-19/3 + z)/2$, y operando obtenemos $z = 1/3$

El simétrico pedido es $P'(13/3, 20/3, 1/3)$