Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 1 de 2006

Sea f : R → R la función definida por f (x) = Ln (x^2 + 1), siendo Ln la función logaritmo neperiano.
(a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).
(b) [1’5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

Solución

(a)

Estudiamos f ‘(x)

f ‘(x) = 2x/(x^2 + 1)

f ‘(x) = 0, 2x = 0, de donde x = 0 que será el posible extremo relativo.

Si x < 0, f ‘(-1) = -2/(+) < 0, f ‘(x) < 0 por tanto f(x) decrece en x < 0

Si x > 0, f ‘(1) = 2/(+) > 0, f ‘(x) > 0 por tanto f(x) crece en x > 0

Por definición x = 0 es un mínimo relativo que vale f(0) = Ln(1) = 0

(b)

Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de f ‘’(x) = 0

f ‘(x) = 2x/(x^2 + 1)

f ‘’(x) =

f ‘’(x) = 0, -2x^2 + 2 = 0, de donde x^2 = 1, es decir x = ± 1 que serán los posibles puntos de inflexión.

Me están pidiendo la recta tangente en x = - 1, que es y – f(-1) = f ‘(-1)(x – (-1))

f (x) = Ln (x^2 + 1), f (-1) = Ln(2)

f ‘(x) = 2x/(x^2 + 1), f ‘(-1) = -2/2 = -1

La recta tangente pedida es y – Ln(2) = -1(x + 1)

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 1 de 2006

Sea f la función definida por $$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & si \quad x \geq 0 \\ x.e^{-x^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$
(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

(b) [1’5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta x = −1.

Solución

(a)

Estudiamos primero la continuidad

$e^x - 1$ es continua y derivable en todo R por suma de continuas, en particular en x > 0

$x.e^{-x^2}$ es continua y derivable en todo R por producto de continuas, en particular en x > 0

Nos falta ver la continuidad en x = 0

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x.e^{-x^2}\right) = 0.e^0 = 0$$

Por tanto es continua en 0 y por supuesto en R

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & si \quad x \geq 0 \\ x.e^{-x^2} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x > 0 \\ e^{-x^2} + x.e^{-x^2}(-2x) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos si existe f ‘(0), es decir si f ‘(0^+) = f’(0^-)

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^x\right) = e^0 = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(e^{-x^2} - 2x^2.e^{-x^2}\right) = e^0 - 0 = 1$$

Como f ‘(0^+) = f’(0^-) = 1, existe f ‘(0) = 1

(b)

Como me piden el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta x = −1 solo interviene la rama $x.e^{-x^2}$ puesto que f(0) = 0 y para x > 0 la función $e^x - 1$ sube a + ∞

La función $x.e^{-x^2}$ solo corta al eje OX en x = 0, y para x < 0 está siempre debajo del eje OX, luego

Área = $-\int_{-1}^{0} x.e^{-x^2}dx$

Hacemos el cambio $-x^2 = t$, de donde -2xdx = dt, es decir xdx = -dt/2

Para x = -1, t = -1

Para x = 0, t = 0

Área = $-\int_{-1}^{0} x.e^{-x^2}dx = -\int_{-1}^{0} e^t(-dt/2) = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-1}^{0}$ = $(1/2)(e^0 - e^{-1}) = (1/2)(1 - 1/e) \approx 0'3106$ u^2

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 1 de 2006

Sean **u** = (x, 2, 0), **v** = (x, −2, 1) y **w** = (2, −x, −4x) tres vectores de R^3.
(a) [1 punto] Determina los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes.
(b) [1'5 puntos] Halla los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos.

Solución

(a)

Los vectores son linealmente independientes si y solo si det(**u**,**v**,**w**) ≠ 0

det(**u**,**v**,**w**) = $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} =$ $x(8x+x) -2(-4x^2-2) = 17x^2 + 4 \neq 0$, sea cual sea el valor de x, luego los vectores son siempre linealmente independientes.

(b)

Si los vectores son ortogonales dos a dos sus productos escalares son cero.

u•v = $x^2 - 4 = 0$, de donde x = ± 2

u•w = 2x – 2x = 0, de donde 0x = 0, y x puede tomar cualquier valor

v•w = 2x +2x – 4x = 0, de donde 0x = 0, y x puede tomar cualquier valor

Por tanto los valores que puede tomar x so 2 y -2 para que los tres vectores sean ortogonales dos a dos.

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 1 de 2006

Sea r la recta de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y s la recta de ecuación (x -1)/2 = (y + 2)/1 = z/3
(a) [1’5 puntos] Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
(b) [1 punto] Calcula el punto de corte.

Solución

(a)

De r ≡ $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ tomamos un punto A(a,1,4) y un vector director **u** = (1,-2,-1)

De s ≡ (x -1)/2 = (y + 2)/1 = z/3 tomamos un punto B(1,-2,0) y un vector director **v** = (2,1,3)

Evidentemente las rectas se cortan o se cruzan porque los vectores **u** y **v** no son proporcionales.

Las rectas se cortan si y solo si det(**AB**,**u**,**v**) = 0

AB = (1-a, -3,-4)

det(**AB**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 1-a & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ (1-a)(-6+1) –(-3)(3+2) + (-4)(1+4) = -10 + 5a = 0, de donde a = 2 para que las rectas se corten.

(b)

Para calcular el punto de corte ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos e igualamos x = x, y = y y z = z

$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2m \\ y = -2 + m \\ z = 3m \end{cases}$

Ygualamos

x = x

x = y

2+t = 1+2m

1-2t = -2+m

Resolviendo este sistema obtenemos t = m = 1, lo cual verifica z = z, por tanto el punto de corte es

P(2+(1),1-2(1),4-(1)) = P(3,-1,3)

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 1 de 2006

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$ siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Solución

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. L regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞ /∞ , y si el límite tiende a ∞]

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}\right)=$ 0/0. Le aplicamos L'H

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+\frac{1}{x}(x-1)}\right)=$ 0/0. Le aplicamos L'H

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{Lnx+\frac{1}{x}(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)(x-1)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}\right)=$ 1/(0+1+1) = 1/2

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 1 de 2006

Sea f : R → R la función definida por f (x) = $\begin{cases} -\frac{a}{x} & si \quad x\le -1 \\ x^2+1 & si \quad x>-1 \end{cases}$

(a) [0'75 puntos] Halla el valor de a sabiendo que f es continua.

(b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas x + 2 = 0 y x − 2 = 0.

Solución

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{x} & si \quad x \leq -1 \\ x^2+1 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

$-a/x$ es continua en R - {0}, en particular es continua en $x < -1$

$x^2 + 1$ continua en R , en particular es continua en $x > -1$

f(x) es continua en $x = -1$ si y solo si $f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x)$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x^2 + 11\right) = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{-a}{x}\right) = \frac{-a}{-1} = a$$

Por tanto como la función es continua tenemos que a = 2.

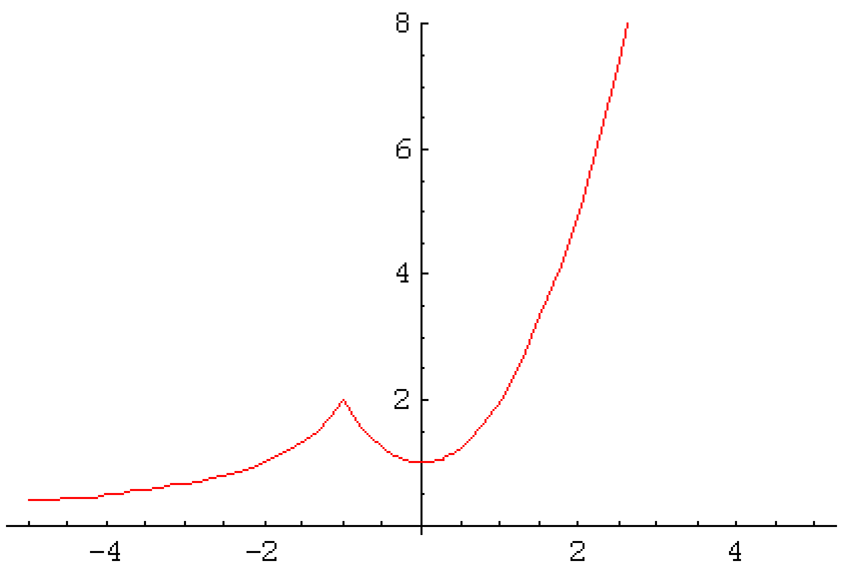
(b)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & si \quad x \leq -1 \\ x^2+1 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

$-2/x$ es una hipérbola (función de proporcionalidad inversa) que se dibuja en el II y IV cuadrante. Como sabemos tiene de asuntota horizontal $y = 0$, y de vertical $x = 0$.

$x^2 + 1$ es una parábola exactamente igual que x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en el eje OY

Un esbozo de su gráfica sería



(c)

El área limitada por OX y las rectas x = -2 y x = 2 es

Área = $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-2}{x}\right)dx+\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=[-2Lnx]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=$

= (-2Ln(1)) – (-2Ln(2)) + (8/3 + 2) – (-1/3 – 1) = 2Ln(2) + 6 u^2

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 1 de 2006

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x + y - z = 1$$
$$x + \lambda y + z = \lambda$$
$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuélvelo para λ = 2.

Solución

(a)

$$\lambda x + y - z = 1$$

$$x + \lambda y + z = \lambda$$

$$x + y + \lambda z = \lambda^2$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$ y la ampliada $A^*=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$

det(A) = $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}_{2^a F+1^a F}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=$

$=(-1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & \lambda+1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ \lambda+1 & \lambda+1\end{vmatrix}=$ 0 + λ (λ^2 + λ - λ -1) = λ (λ^2 – 1)

|A| = 0, nos dice que λ(λ^2 – 1) = 0 de donde λ = 0, λ = 1 y λ = -1

Si λ ≠ 0, λ ≠ 1 y λ ≠ -1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si λ = 0

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ 1(1-0) = 1 ≠ 0, rango(A^*) = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible

Si λ = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos filas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Si λ = -1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 0 por tener dos columnas iguales, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Lo resolvemos para λ **= 2**. El sistema es

2x + y – z = 1

x +2 y + z = 2

x + y + 2z = 4. Cambiamos la 1ª ecuación por la 2ª y después 2ª + 1ª(-2) y 3ª + 1ª(-1)

x + 2y + z = 2

0 - 3y -3z = -3

0 - y + z = 2. Dividimos la 2ª por (-3) y después 3ª + 2ª

x + 2y + z = 2

0 +y +z = 1

2 z = 3. De donde z = 3/2, y = -1/2 y x = 3/2.

La solución del sistema es (x,y,z)= (3/2, -1/2, 3/2)

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 1 de 2006

[2’5 puntos] Halla un punto A de la recta *r* de ecuación x = y = z y un punto B de la recta *s* de ecuación x = y/(-1) = (z + 1)/2 de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

Solución

Veamos primero la posición relativa de las rectas *r* y *s* para lo cual tomamos un punto y un vector director de cada una de ellas.

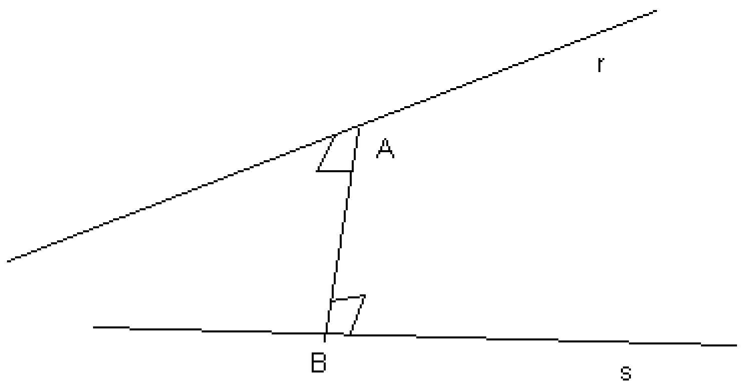
De *r* punto M(0,0,0) y vector **u** = (1,1,1)

De *s* punto N(0,0,-1) y vector **v** = (1,-1,2)

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan.

MN = ((0,0,-1)

Si det(**MN,u,v**) = 0 las rectas se cortan y si det(**MN,u,v**) ≠ 0 las rectas se cruzan det(**MN,u,v**) = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ (-1)(-1-1) = 2 ≠ 0, por tanto las rectas se cruzan



En realidad lo que me están pidiendo son los puntos A y B que hacen mínima la distancia entre ellas. Tomaremos un punto genérico de la recta *r*, el A, otro genérico de la recta *s*, el B, con parámetros distintos. Formaremos el vector **AB** y le impondremos la condición de que sea perpendicular a la vez al vector director de la recta *s* y de la recta *r* (Su productos escalares serán cero). Luego resolveremos el sistema y obtendremos los puntos pedidos

A(a,a,a); B(b, -b, -1+2b); **AB** =(b-a, -b-a, -1+2b-a)

AB• u = b-a-b-a-1+2b-a = -3a + 2b-1 = 0

AB• v = b-a+b+a-2+4b-2a = -2a + 6b-2 = 0

Resolviendo el sistema

-3a + 2b-1 = 0

-2a + 6b-2 = 0,

obtenemos de soluciones a = -1/7 y b = 2/7. Por tanto los puntos pedidos son

A(-1/7, -1/7, -1/7) y B(2/7, -2/7, -1+ 4/7) = B(2/7, -2/7, -3/7)

Vamos a calcular dicha distancia. (No la piden)

d(r,s)= d(A,B) = ||**AB**||

AB = (2/7+1/7, -2/7+1/7, -3/7+1/7) = (3/7, -1/7, -2/7)

d(r,s)= d(A,B) = ||**AB**|| = $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}\, u.l.$