Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 2006

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.
(a) [0'75 puntos] Estudia la derivabilidad de f.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'75 puntos] Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Solución

(a)

$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, teniendo en cuenta la definición de |x|

$x^2 - x$ es una función continua y derivable en todo R, en particular en $x > 0$

$x^2 + x$ es una función continua y derivable en todo R, en particular en $x < 0$

Veamos la continuidad de f(x) en x = 0, es decir si verifica

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

f(0) = 0

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + x) = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, la función f(x) es continua en x =0 y por tanto en todo R .

Estudiamos ya la derivabilidad de f(x), en particular en x =0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en x = 0, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x - 1) = -1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x + 1) = +1$$

Como f '(0 $^+$) ≠ f '(0 $^-$), f(x) no es derivable en x = 0 por lo cual es derivable en R - {0}

(b) y (c)

Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Si x > 0, f '(x) = 2x – 1. Resolvemos f '(x) = 0 y veremos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

f '(x) = 0, nos da 2x – 1 = 0, de donde x = 1/2 , que puede ser un posible extremo relativo.

Como f '(0'1) = - 0'8 < 0, f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo (0, 1/2).

Como f '(1) = 1 > 0, f(x) es estrictamente creciente en el intervalo (1/2, + ∞).

Por definición x = 1/2 es un mínimo relativo que vale f(1/2) = $(1/2)^2$ - |1/2| = - 1/4

Si x < 0, f '(x) = 2x + 1.

f '(x) = 0, nos da 2x + 1 = 0, de donde x = -1/2 , que puede ser un posible extremo relativo.

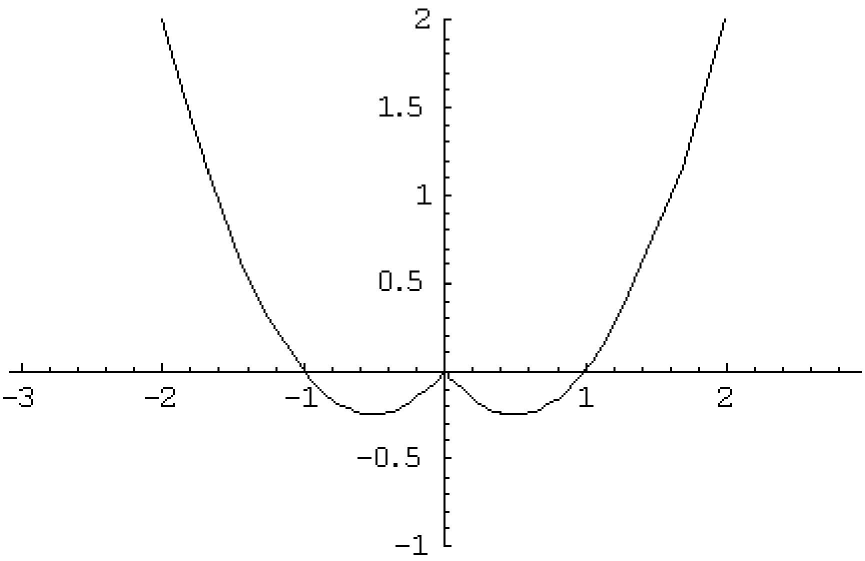
Como f '(-1) = -1 < 0, f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo (- ∞ , -1/2).

Como f '(- 0'1) = 0'8 > 0, f(x) es estrictamente creciente en el intervalo (- 1/2, 0).

Por definición x = - 1/2 es un mínimo relativo que vale f(- 1/2) = $(- 1/2)^2$ - |- 1/2| = - 1/4

Por definición como en (- 1/2, 0), f(x) es estrictamente creciente y en (0, 1/2), f(x) es estrictamente decreciente, x = 0 es un máximo relativo que vale f(0) = 0. (Obsérvese que en x = 0 la función no tiene derivada).

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de la función es



Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2006

Calcula

(a) [1'5 puntos] $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$

(b) [1 punto] $\int (2x - 3)\cdot tg(x^2 - 3x)\,dx$, siendo tg la función tangente.

Solución

(a)

I = $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx$ es un integral racional con el numerado de igual grado que el denominador, por tanto tenemos que efectuar previamente la división.

$5x^2 - x - 160$	$x^2 - 25$
$-5x^2 + 125$	5
$- x - 35$	

I = $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\,dx = \int 5\,dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}\,dx = 5x + I_1$

I_1 = $\int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}\,dx = \int \frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)}\,dx = \int \frac{A}{(x - 5)}\,dx + \int \frac{B}{(x + 5)}\,dx$ =

= A Ln|x – 5| + B Ln|x + 5|, donde Ln es el logaritmo neperiano.

Por tanto la integral pedida es I = 5x + I_1 = 5x + A Ln|x – 5| + B Ln|x + 5| + K. Solo nos falta calcular las constantes A y B.

$$\frac{-x - 35}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{A}{(x - 5)} + \frac{B}{(x + 5)} = \frac{A(x + 5) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)}$$

Igualando numeradores tenemos

– x – 35 = A (x + 5) + B(x – 5)

Para x = 5 tenemos – 40 = 10A, de donde A = - 4

Para x = - 5 tenemos – 30 = -10B, de donde B = 3

Luego I = 5x – 4 Ln|x – 5| + 3 Ln|x + 5| + K

(b)

$\int (2x - 3) \cdot tg(x^2 - 3x)\, dx$, siendo tg la función tangente.

Recordamos que $\int tg(t)\, dt = \int \frac{sen(t)}{cos(t)}\, dt = - Ln|cos(t)| + K$

Hacemos el cambio de variable $t = x^2 – 3x$, con lo cual $dt = (2x – 3)dx$

$\int (2x - 3) \cdot tg(x^2 - 3x)\, dx = \int tg(t)\, dt$ = - Ln|cos(t)| + K = (quitando el cambio) =

= - $Ln|cos(x^2 – 3x)| + K$

Ejercicio nº 3 de la opción A de septiembre de 2006

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda x – y – z = - 1$$
$$x + \lambda y + z = 4$$
$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 2.

Solución

$$\lambda x – y – z = - 1$$

$$x + \lambda y + z = 4$$

$$x + y + z = \lambda + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(-1) \\ 3^aC+1^aC(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = (desarrollamos por el adjunto 31) =

$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 \end{vmatrix} =$ - (λ - 1)(-1 - λ) = (λ - 1)(1 + λ)

Resolvemos |A| = 0, es decir (λ - 1)(1 + λ) = 0, de donde λ = 1 y λ = -1

Si λ ≠ 1 y λ ≠ -1 , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si λ = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(1) \\ 3^aC+1^aC(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ = -2 ≠ 0, tenemos rango(A^*) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si λ = -1, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b)

Resuelve el sistema para λ = 2.

Nuestro sistema es

2x – y – z = - 1

x + 2y + z = 4

x + y + z = 4

Sumando 1ª y 3ª tenemos 3x = 3, de donde x = 1. Tomamos la 1ª y la 2ª con x = 1

2 – y – z = -1

1 + 2y + z = 4

Sumándolas tenemos 3 + y = 3, de donde y = 0.

Sustituyendo x = 1 e y = 0 en cualquier ecuación tenemos z = 3, por tanto la solución del sistema es (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando λ = 2.

También se puede hacer por la regla de Cramer (Vicenta Serrano)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-10+13}{3} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11+2+4-8}{3} = 3$$

Y como vemos, se obtiene la misma solución (x,y,z) = (1, 0, 3) cuando λ = 2.

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2006

[2'5 puntos] Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan del plano π de ecuación x + z = 1 y del plano π' de ecuación y – z = 3.

Solución

Pasamos la recta a vectorial. $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} = a \end{cases}$, siendo "a" un parámetro, por tanto la ecuación de la recta en vectorial es (x, y, z) = (0, 1 + a, 3 + 2a) y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta P(0,1+a,3+2a), con a ∈ R .

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π ', tenemos que d(P, π) = d(P, π ')

d(P, π) = $\dfrac{|0+2a+3-1|}{\sqrt{2}}$

$d(P, \pi ') = \dfrac{|a+1-2a-3-3|}{\sqrt{2}}$

Igualando ambas expresiones y simplificando tenemos $|2a+2| = |-a - 5|$, de donde salen las ecuaciones

$$2a + 2 = -a - 5 \qquad y \qquad 2a + 2 = a + 5 .$$

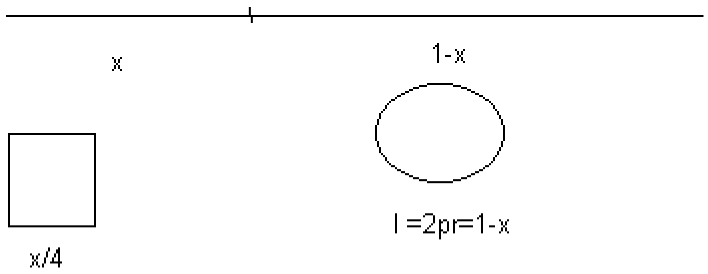
De $2a+2 = -a - 5$, operando sale $a = -7/3$ y un punto es $P(0,1-7/3,3-14/3) = P(0, -4/3, -5/3)$

De $2a+2 = a + 5$, operando sale $a = 3$ y el otro punto es $P'(0,1+3,3+2(3)) = P'(0, 4, 9)$

Ejercicio nº 1 de la opción B de septiembre de 2006

[2'5 puntos] Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Solución



El área del cuadrado es $S_1= (x/4)^2 = x^2/16$

La longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r = 1 – x$, de donde $r = (1-x)/2\pi$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi[(1-x)/2\pi]^2 = (1/4\pi)(x^2 – 2x + 1)$

La función a optimizar es la suma de las áreas

$S(x) = S_1 + S_2 = x^2/16 + (1/4\pi)(x^2 – 2x + 1) = (1/16\pi)(\pi x^2 + 4x^2 – 8x + 4)$

Calculamos la 1ª derivada $S '(x)$, la igualamos a 0, calculamos la 2ª derivada para ver que efectivamente es un mínimo.

$S '(x) = (1/16\pi)(2\pi x + 8x – 8)$

$S '(x) = 0$, de donde$(2\pi x + 8x – 8) = 0$, y resolviéndolo sale $x = 4/(\pi +4)$, que será el posible mínimo.

$S ''(x) = (1/16\pi)(2\pi + 8)$, de donde $S ''(4/(\pi +4)) = (1/16\pi)(2\pi + 8) > 0$, por tanto $x = 4/(\pi +4)$ es un mínimo.

Los trozos en que se ha dividido el alambre tienen de longitud "x" $= 4/(\pi +4)$ y "1 – x" $= 1 - 4/(\pi +4) = \pi/(\pi +4)$, para que las sumas de las áreas sea mínima.

Ejercicio n° 2 de la opción B de septiembre de 2006

[2'5 puntos] Halla la función f : R → R sabiendo que f ''(x) = 12x – 6 y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene de ecuación 4x – y – 7 = 0.

Solución

f : R → R sabiendo que f ''(x) = 12x – 6,

El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con x ∈ [a,b] es derivable y su derivada es F '(x) = f(x).

En nuestro caso $f'(x) = \int f''(x)\,dx$ y también $f(x) = \int f'(x)\,dx$.

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (12x - 6)\,dx =$ $6x^2 - 6x + M$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (6x^2 - 6x + M)\,dx =$ $2x^3 - 3x^2 + Mx + N$

Veamos cuanto valen las constantes M y N.

Como la recta y = 4x – 7 es la recta tangente a f(x) en x = 2, sabemos que f '(2) = 4 que es la pendiente de la recta tangente.

Además como y = 4x – 7 es la recta tangente a f(x) en x = 2, en x = 2 coinciden la ordenada de la función y la de la recta tangente, es decir f(2) = y(2)

De f '(2) = 4

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + Mx + N$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + M$

$4 = f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + M$, con lo cual M = - 8

De f (2) = y(2)

y(2) = 4(2) – 7 = 1

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 8(2) + N$

Igualando f (2) = y(2) tenemos 1 = 16 – 12 – 16 + N, con lo cual N = 13

La función pedida es $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2006

[2'5 puntos] Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$AB^t X = -2C$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = M$$

$$-2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = N$$

Por tanto la ecuación $AB^t X = -2C$ se nos ha transformado en $MX = N$ con $M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 30 = -28 \neq 0$, la matriz M tiene inversa M^{-1}, y podemos multiplicar por la izquierda la ecuación $MX = N$ por la matriz inversa de M, M^{-1},

$M^{-1}. MX = M^{-1}.N$, es decir $X = M^{-1}.N$

Recordamos que $M^{-1} = (1/|M|). \text{Adj}(M^t)$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},\ M^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},\ \text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} = (1/|M|). \text{Adj}(M^t) = (1/-28). \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix}$$

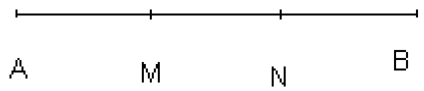
Por tanto $X = \begin{pmatrix} 1/14 & -3/14 \\ -5/28 & 1/28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ 5/14 & 3/2 \end{pmatrix}$

Ejercicio n° 4 de la opción B de septiembre de 2006

Considera los puntos A(1,0,-2) y B(-2,3,1)
(a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación -x = y – 1 = z. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

Solución

(a)



A(1,0,-2) y B(-2,3,1)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**

AB = (-3,3,3)

AM = (x-1,y,z+2)

De **AB** = 3**AM** obtenemos (-3,3,3) = (3x-3,3y,3z+6), e igualando miembro a miembro se tiene x = 0, y = 1 y z = -1, es decir el punto M es M(x,y,z) = M(0,1,-1)

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir

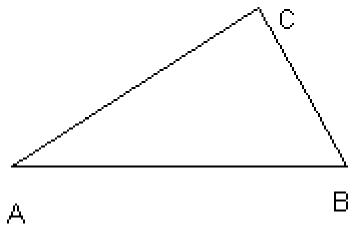
N(x,y,z)= N(-2/2, (1+3)/2, (-1+1)/2) = N(-1,2,0)

(b)

Antes de calcular el área del triángulo de vértices A, B y C ponemos la recta r en forma continua *¡¡cuidado, pues no me la han dado en forma continua!!*

-x = y – 1 = z en forma continua es x/(-1) = (y-1)/1 = z/1.

Un punto de la recta es C(0,1,0) y un vector director de la recta es **u** = (-1,1,1)



Recordamos que el área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||

AB = (-3,3,3)

AC = (-1,1,2)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(3) – **j**(-3) + **k**(0) = (3,3,0)

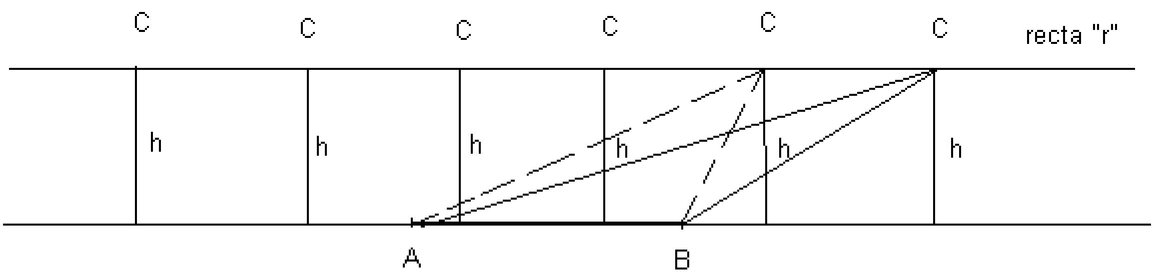
Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$

Para responder a la pregunta ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C? hay que recordar también que el área de un triángulo es 1/2 del producto de la base (en nuestro caso el módulo del vector **AB**) por la altura.

Resulta que la recta "r" que me han dado x/(-1) = (y-1)/1 = z/1 es paralela al segmento AB, puesto que el vector director de la recta es **u** = (-1,1,1) y el vector **AB** = (-3,3,3) son proporcionales.

Evidentemente el segmento AB no está contenido en la recta porque en dicho caso no se podría formar triángulo y nos resultaría el área 0.

Al ser la recta "r" paralela al segmento AB, la altura de cualquier punto C de la recta trazada sobre la recta que contiene al segmento AB siempre es la misma, por tanto el área del triángulo siempre es $\frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, independientemente del punto de la recta que tomemos.



Área = (1/2)(base)(altura) = (1/2)||**AB**||.h, y h no varía sea cual sea el punto C de la recta "r".

Otra forma de hacerlo (Javier Costillo)

Consideramos un punto C genérico de la recta - x = y – 1 = z = a con "a" número real.

C(x,y,z) = C(-a, 1+a, a)

Si en el cálculo del área del triángulo vemos que no depende del parámetro "a", entonces el área será la misma independientemente del punto C de la recta que tomemos

A(1,0,-2) y B(-2,3,1)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||

AB = (-3,3,3)

AC = (-a - 1,1 + a, a + 2)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -a-1 & 1+a & a+2 \end{vmatrix}$ = **i**(3a+6-3-3a) – **j**(-3a – 6 + 3a + 3) + **k**(-3 -3a + 3a + 3) = (3,3,0)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ u^2$, que no depende del parámetro "a" y por tanto tampoco del punto C elegido de la recta.