

Ejercicio nº 1 de la opción A de junio de 2006

[2'5 puntos] Determina un punto de la curva de ecuación $y = x e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Solución

La pendiente genérica de la función $f(x) = x e^{-x^2}$ es la función $f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

Consideramos la función $g(x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$ y le buscamos los extremos.

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo de $g(x)$

En nuestro caso

$$g'(x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (-4x) = e^{-x^2} \cdot (4x^3 - 6x)$$

$g'(x) = 0$, implica $4x^3 - 6x = 0$, pues la exponencial nunca es 0.

De $4x^3 - 6x = 0 = x(4x^2 - 6) = 0$, obtenemos $x = 0$ y $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, que serán los posibles máximos o mínimos.

$$g''(x) = e^{-x^2} \cdot (4x^3 - 6x) \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (12x^2 - 6) = e^{-x^2} \cdot (-8x^4 + 24x^2 - 6)$$

Como $g''(0) = -6 < 0$, $x = 0$ es un máximo relativo, y es el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Como $g''\left(\pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{12}{e^{\frac{3}{2}}} > 0$, $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ son mínimos relativos,

Ejercicio nº 2 de la opción A de junio de 2006

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Sea

(a) [1'25 puntos] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$

(b) [1'25 puntos] Calcula el valor de I

Solución

(a)

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$t = 1 + x^2$, $dt = 2x dx$, de donde $x dx = dt/2$

Si $x = 0$, $t = 1$

Si $x = 2$, $t = 5$

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^2 \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^5 \frac{(t-1)(dt/2)}{\sqrt{t}} =$$

(b)

$$= \int_1^5 \frac{(t-1)(dt/2)}{\sqrt{t}} = (1/2) \int_1^5 (t^{1/2} - t^{-1/2}) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5^{3/2}}{3/2} - \frac{5^{1/2}}{1/2} \right) - \left(\frac{1^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{1/2}}{1/2} \right) \right] = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de junio de 2006

Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

- (a) [1 punto] Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$
 (b) [1 punto] Calcula, en función de a , los determinantes $2A$ y A^t , siendo A^t la traspuesta de A .
 (c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$$

De donde $a^2 - a = 12$ y $a^2 + a = 20$. Sumando obtenemos $2a^2 = 32$, luego $a = \pm 4$

Solamente $a = +4$ verifica las dos ecuaciones.

(b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

De $|kA_n| = k^n|A|$, obtenemos que $|2A| = 2^2(-a^2) = -4a^2$

Sabemos que el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta, luego $|A^t| = |A| = -a^2$

También se puede hacer determinando las matrices $2A$, A^t y calculando su determinante.

(c)

Sabemos que una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta. En las matrices simétricas se tiene la propiedad de que sus elementos son simétricos respecto a la diagonal principal,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

cosa que no ocurre con la matriz A , pues uno es 0 y el otro 1.

También se puede hacer igualando $A = A^t$ y al resolverlo obtenemos el absurdo $0 = 1$.

Ejercicio n° 4 de la opción A de junio de 2006

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$$

(a) [1 punto] Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m .

(b) [0'751 puntos] Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

(c) [0'5 puntos] Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π .

Solución

(a)

Ponemos la recta "r" en paramétricas, la sustituimos en el plano y obtenemos una ecuación en un parámetro "b". Cuando exista solución para dicho parámetro la recta cortará al plano

Recta "r" $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$, punto $A(5,0,6)$. Vector directo $u = (-2, 1, m)$

$$\text{Recta "r" en paramétricas} \begin{cases} x = 5 - 2b \\ y = b \\ z = 6 + mb \end{cases}$$

Sustituimos la recta en el plano π

$2(5 - 2b) + (b) - (6 + mb) + 2 = 0 = b(-3 - m) + 6$, de donde $b = 6/(3 + m)$ lo cual tiene solución si el denominador no es cero, es decir si $m \neq -3$.

Luego para cualquier valor de m distinto de -3 la recta corta al plano en un solo punto, pues la solución de "b" es única. Sin embargo para $m = -3$ la recta es paralela al plano

(c)

Para $m = -3$ la recta es paralela al plano, luego el plano pedido es de la forma $2x + y - z + K = 0$, le imponemos la condición de que pase por un punto de la recta, el $A(5,0,6)$ y tenemos $2(5) + (0) - (6) + K = 0$, de donde $K = -4$ y el plano pedido es $2x + y - z - 4 = 0$

(b)

Lo hacemos por haz de planos a partir de la recta

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$$

Ponemos la recta "r" en implícitas para lo cual igualamos dos a dos.

$$\frac{x-5}{-2} = y \quad e \quad y = \frac{z-6}{-3}, \text{ de donde nos queda } \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Formamos el haz de planos $(x + 2y - 5) + b(3y + z - 6) = 0$ y lo consideramos como un plano π' de ecuación $x + (2 + 3b)y + bz + (-5 - 6b) = 0$ con vector normal $\mathbf{n}' = (1, 2 + 3b, b)$

El plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ tiene de vector normal $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$

Como me dicen que el plano que contiene a la recta tiene que ser perpendicular al plano π , los vectores normales también son perpendiculares y su producto escalar cero, es decir.

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0 = (2, 1, -1) \cdot (1, 2 + 3b, b) = 2 + 2 + 3b - b = 4 + 2b$, de donde $b = -2$ y el plano pedido es $(x + 2y - 5) + (-2)(3y + z - 6) = 0 = x - 4y - 2z + 7 = 0$

Otra forma de hacerlo (mas sencilla) gracias a D^a Vicenta Serrano Gil

Formamos el plano pedido tomando un punto y dos vectores, el punto de la recta $A(5,0,6)$, uno de los vectores el director de la recta $\mathbf{u} = (-2, 1, -3)$ y otro el normal del plano $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$. El plano pedido se calcula resolviendo el determinante $\det(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0$, y obtenemos el mismo resultado $x - 4y - 2z + 7 = 0$

Ejercicio n° 1 de la opción B de junio de 2006

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}, \text{ para } x \neq 0$$

Sea f la función definida por

(a) [0.75 puntos] Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f .

(c) [0.75 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

(a)

Corte con el eje OY: No tiene porque no está definida la función para $x \neq 0$.

Corte con el eje OX: $\frac{x^4+3}{x} = 0 \Rightarrow x^4+3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-3}$ No tiene solución real.

La función no tiene cortes con los ejes.

$x=0$ es asíntota vertical pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4+3}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4+3}{x} = -\infty$

No tiene asíntota horizontal porque que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+3}{x} = +\infty$

No tiene asíntota oblicua y ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = +\infty$

(b)

$$f'(x) = \frac{3(x^4-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2} > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Rightarrow$$

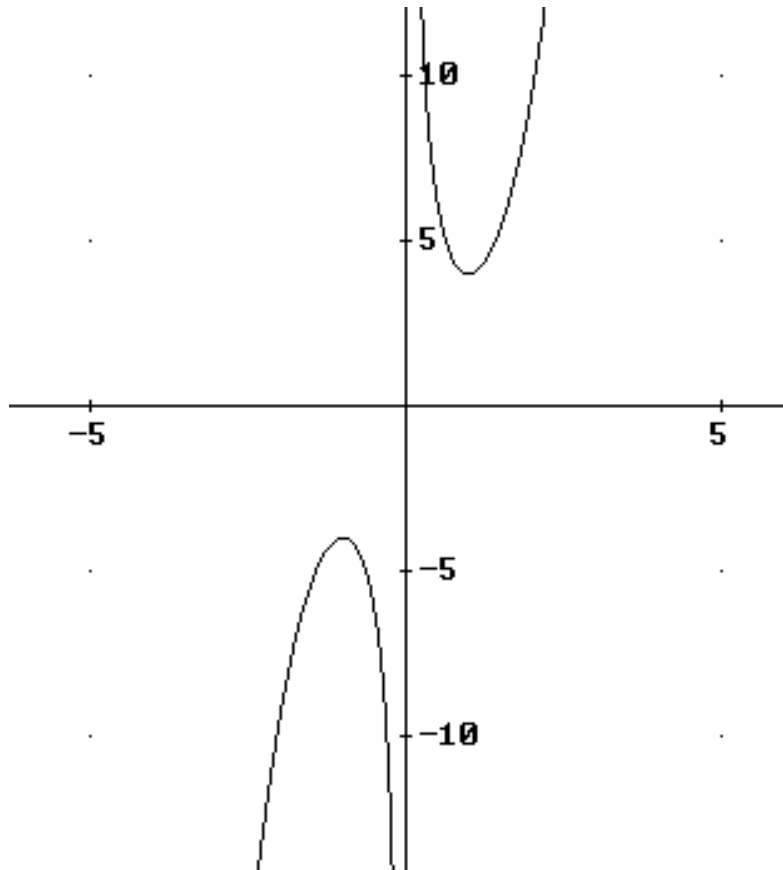
$$\begin{cases} (x+1) > 0 \text{ y } (x-1) > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 0 \\ (x+1) < 0 \text{ y } (x-1) < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2} < 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1) > 0 \text{ y } (x-1) < 0 \Rightarrow x > -1 \text{ y } x < 1 \\ 0 \\ (x+1) < 0 \text{ y } (x-1) > 0 \text{ (condiciones incompatibles)} \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-1, 0) \cup (0, 1)$$

Del estudio anterior deducimos que la función tiene un máximo relativo en (-1, -4) y un mínimo relativo en (1, 4).

(c)

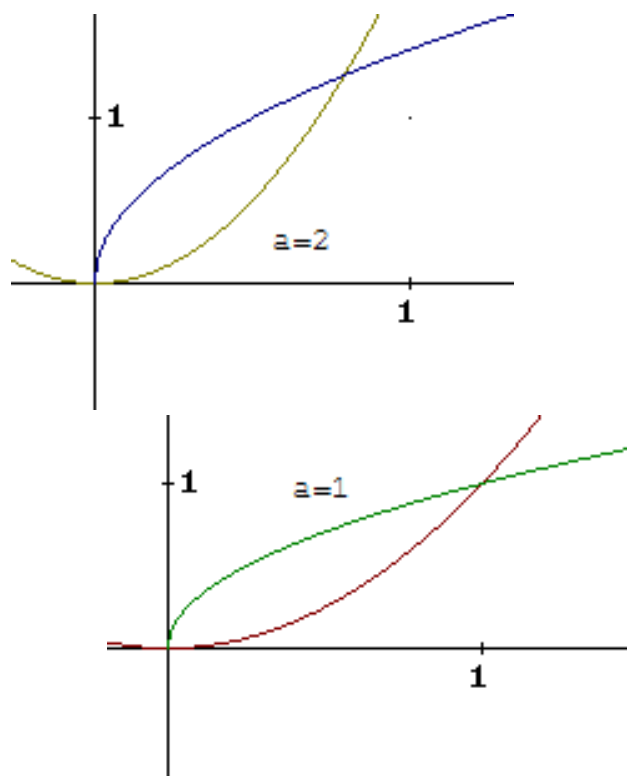


Ejercicio n° 2 de la opción B de junio de 2006

[2.5 puntos] El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \frac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de a .

Solución

La visualización de los gráficos de estas funciones para el caso $a = 1$ y $a = 2$ respectivamente nos permite hacernos una idea del recinto que estas curvas encierran:



Cálculo del punto de corte de ambas gráficas:

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow x^4 = a^3x \Rightarrow x(x^3 - a^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = a$$

El área del recinto limitado por las dos curvas:

$$\int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{ax}^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3a} \right]_0^a = 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3} = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Ejercicio n° 3 de la opción B de junio de 2006

[2.5 puntos] Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

De la igualdad matricial anterior deducimos el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5z = 7 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 16;$$
 el sistema es compatible determinado, obteniéndose su solución fácilmente aplicando el método de reducción de Gauss – Jordan o bien la fórmula de Cramer, resultando

$$x = 1, y = -1, z = 1.$$

Ejercicio n° 4 de la opción B de junio de 2006

Considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta r de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
 (b) [1.5 puntos] Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r .

Solución

(a)

$$\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Expresamos r en paramétricas:

La ecuación del plano pedido la construimos considerando como vectores direccionales del mismo $\vec{u}_r = (-2, 3, 1)$ y $\vec{PP}_r = (-4, 2, 0)$. Pudiendo considerar vectores de componentes proporcionales que tendrán la misma dirección:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z - 7 = 0$$

Ecuación del plano:

(b)

Sea M el punto medio del segmento PQ , M es un punto de la recta que verifica la siguiente

condición: $\vec{PM} \cdot \vec{u}_r = 0$. Desarrollando la condición del producto escalar nulo obtenemos:
 $\vec{PM} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (-4 - 2\alpha, 2 + 3\alpha, \alpha) \cdot (-2, 3, 1) = 0 \Rightarrow 8 + 4\alpha + 6 + 9\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos el punto M :

$M = (1, 1, -1)$. Puesto que M es el punto medio del segmento PQ , se tiene:

$$\frac{3 + q_1}{2} = 1 \Rightarrow q_1 = -1$$

$$\frac{2 + q_2}{2} = 1 \Rightarrow q_2 = 0$$

$$\frac{q_3}{2} = -1 \Rightarrow q_3 = -2$$

Con lo cual el simétrico es el punto $Q = (-1, 0, -2)$