Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 2007

Sea f: (0,+∞) → R la función definida por $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$.
(a) [1’5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).
(b) [1 punto] Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

Solución

Dada $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$, observamos que su dominio son los números x > 0, puesto que el dominio de $\sqrt{x}$ es $x \geq 0$, y al estar en el denominador tenemos que quitar el 0.

(a)

Para estudiar el crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos estudiamos la primera derivada f ‘(x)

$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}\ ;\quad f'(x)=\frac{3\sqrt{x}-(3x+1).\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Si x < 1/3, f ‘(0’2) = -0’4/(+) < 0, f ‘(x) < 0 por tanto f(x) decrece en x < 1/3

Si x > 1/3, f ‘(1) = 2/(+) > 0, f ‘(x) > 0 por tanto f(x) crece en x > 1/3

Por definición x = 1/3 es un mínimo relativo que vale f(1/3) = $2\sqrt{3}$

(b)

Para ver los posibles puntos de inflexión estudiamos la segunda derivada f ‘’(x)

$$f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}\ ;\quad f'(x)=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\frac{3(2x\sqrt{x})-(3x-1)(2\sqrt{x}+\frac{2x}{2\sqrt{x}})}{(2x\sqrt{x})^2}=\frac{-3x^2+3x}{4x^3\sqrt{x}}$$

De f ‘’(x) = 0, tenemos $-3x^2 + 3x = 0$ y las soluciones son x = 0 y x = 1

x = 0 no vale porque no está en el dominio. Veamos x = 1

Si x < 1, f ‘’(0’5) = > 0, f ‘’(x) > 0 por tanto f(x) es convexa (U) en x < 1

Si x > 1, f ‘’(2) = < 0, f ‘’(x) < 0 por tanto f(x) es cóncava (∩) en x > 1

Por definición x = 1 es un punto de inflexión que vale f(1) = 4

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2007

Sea f: R → R la función definida por f(x) = x|x-2|.
(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en x = 2.
(b) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.
(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases} \;;\quad f(x) = x.|x-2| = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x \geq 2 \\ -x^2+2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(a)

$x^2 - 2x$ es una función continua y derivable en todo R , en particular en x > 2

$-x^2 + 2x$ es una función continua y derivable en todo R , en particular en x < 2

Veamos la continuidad de f(x) en x = 2, es decir si verifica

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

f(2) = 0

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 - 2x) = 0 \;;\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (-x^2 + 2x) = 0$$

Como $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, la función f(x) es continua en x = 2, y por tanto en todo R .

Estudiamos ya la derivabilidad de f(x), en particular en x =0

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x \geq 2 \\ -x^2+2x & \text{si } x < 2 \end{cases} \;;\quad f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x > 2 \\ -2x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en x = 2, es decir si f '(2^+) = f '(2^-)

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2} (2x - 2) = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2} (-2x + 2) = -2$$

Como f '(2^+) ≠ f '(2^-), f(x) no es derivable en x = 2, por lo cual es derivable en R - {2}

(b)

Si x > 2, $f(x) = x^2 – 2x$ es una parábola con las ramas hacia arriba y con la abscisa del vértice en la solución de $f\,'(x) = 0$

$f\,'(x) = 2x – 2$, $f\,'(x) = 0$ nos dá $x = 1$

Un cuadro de valores sería

x $f(x) = x^2 – 2x$

1 -1 (fuera de su dominio)

2 0

3 3

Si x < 2, $f(x) = –x^2 + 2x$ es una parábola con las ramas hacia abajo, y con la abscisa del vértice en la solución de $f\,'(x) = 0$

$f\,'(x) = –2x + 2$, $f\,'(x) = 0$ nos dá $x = 1$

Un cuadro de valores sería

x $f(x) = x^2 – 2x$

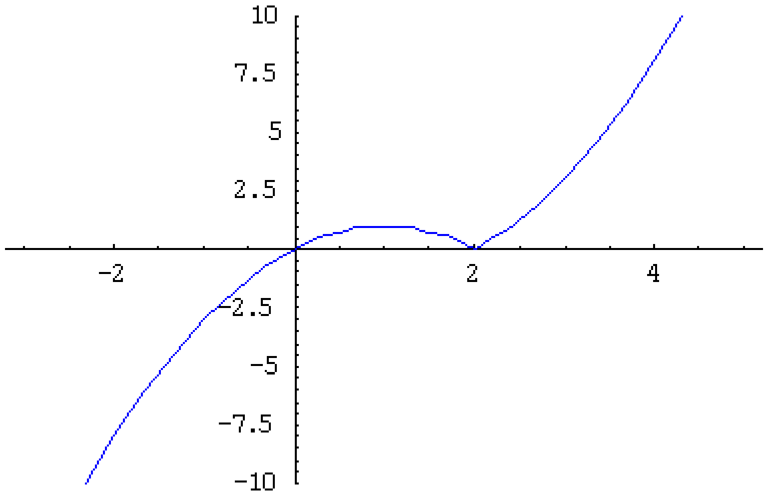
1 1

2^- 0

0 0

-1 -3

Un esbozo de la gráfica de la función es



(c)

El área que nos piden es

$$A = \int_0^2 (-x^2+2x)dx = \left[\frac{-x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = \frac{-8}{3}+4 = \frac{4}{3}\,u.a.$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2007

Sea I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2

(b) [1'25 puntos] Para m = 2,halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

Solución

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a)

$(A - I)^2 = O$; $A^2 - AI - IA + I^2 = O$; $A^2 - 2A + I = O$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+m & 2m \\ 2 & m+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene que m = 0

(b)

Si m = 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$AX - 2A^T = O$; $AX = O + 2A^T = 2A^T$

Como $|A| = 1 - 2 = -1 \neq 0$, la matriz A tiene inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)$ y podemos multiplicar la expresión $AX = 2A^T$, por la izquierda por A^{-1} quedándonos

$A^{-1}AX = A^{-1}2A^T$

$IX = 2\,A^{-1}A^T$

$X = 2\,A^{-1}A^T$

$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

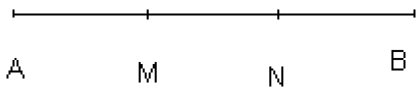
$X = 2\,A^{-1}A^T = 2.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2007

(a) [1’25 puntos] Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos A(1,2,1) y B(-1,0,3) en tres partes iguales.
(b) [1’25 puntos] Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

Solución

(a)



A(1,2,1) y B(-1,0,3)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**

AB = (-2,-2,2)

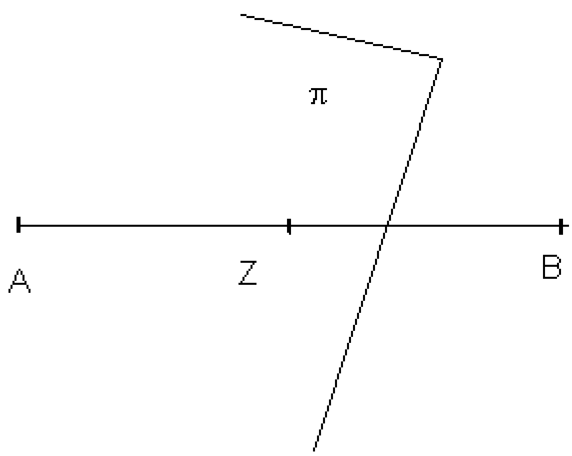
AM = (x-1,y-2,z-1)

De **AB** = 3**AM** obtenemos (-2,-2,2)= (3x - 3, 3y - 6, 3z - 3), e igualando miembro a miembro se tiene x = 1/3, y = 4/3 y z = 5/3, es decir el punto M es M(x,y,z) = M(1/3,4/3,5/3)

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir

N(x,y,z)= N((1/3 -1)/2, (4/3 + 0)/2, (5/3 + 3)/2) = N(-1/3,2/3,7/3)

(b)



A(1,2,1), B(-1,0,3) y Z como es el punto medio, es Z(0,1,2)

El plano pedido pasa por el punto Z(0,1,2) y tiene como vector normal el **AB** = (-2,-2,2)

La determinación normal del plano es **AB**•(**x** – **z**) = 0, siendo • el producto escalar, es decir

(-2,-2,2)•(x – 0, y – 1, z – 2) = -2x – 2y + 2 + 2z – 4 = -2x -2y + 2z – 2 = 0. Simplificando el plano pedido es $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$

Ejercicio nº 1 de la opción B de septiembre de 2007

[2'5 puntos] Determina una función f: R → R sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

Solución

El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b], entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con x ∈ [a,b] es derivable, y su derivada es F '(x) = f(x).

En nuestro caso $f(x) = \int f'(x)\,dx$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 + x - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + K$$

Vamos a determinar K

Sea "a" el punto donde alcanza el máximo relativo

Sea "b" el punto donde alcanza el mínimo relativo

Leyendo el problema se nos dice que **f(a) = 3f(b)**. [el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo)].

Los extremos relativos están entre las soluciones de f '(x) = 0

Si f '(m) = 0 y f ''(m) < 0, x = m es el máximo relativo

Si f '(m) = 0 y f ''(m) > 0, x = m es el mínimo relativo

$f'(x) = x^2 + x - 6$; f '(x) = 0 nos dá $x^2 + x - 6 = 0$. Resolviendo esta ecuación de 2º grado obtenernos como soluciones 2 y -3

f ''(x) = 2x - 1

Como f '(2) = 0 y f ''(2) = 5 > 0, x = 2 es el mínimo relativo

Como f '(-3) = 0 y f ''(-3) = -5 < 0, x = -3 es el máximo relativo

En nuestro caso f(a) = 3f(b) es f(-3) = 3.f(2)

$f(x) = x^3/3 + x^2/2 – 6x + K$

$f(2) = (2)^3/3 + (2)^2/2 – 6(2) + K = 8/3 – 10 + K$

$f(-3) = (-3)^3/3 + (-3)^2/2 – 6(-3) + K = 9 + 9/2 + K$

La expresión f(-3) = 3.f(2), se nos convierte en (9 + 9/2 + K) = 3.(8/3 – 10 + K). Operando y despejando nos resulta K = 71/4, luego la función pedida es $f(x) = x^3/3 + x^2/2 – 6x + 71/4$

Ejercicio nº 2 de la opción B de septiembre de 2007

Sea f: (-1,+ ∞) → R la función definida por f(x) = Ln(x+1). (Ln denota la función logaritmo neperiano).
(a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta x=1.

Solución

(a)

La recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0)(x – 0)

f(x) = Ln(x+1); f(0) = Ln(1) = 0

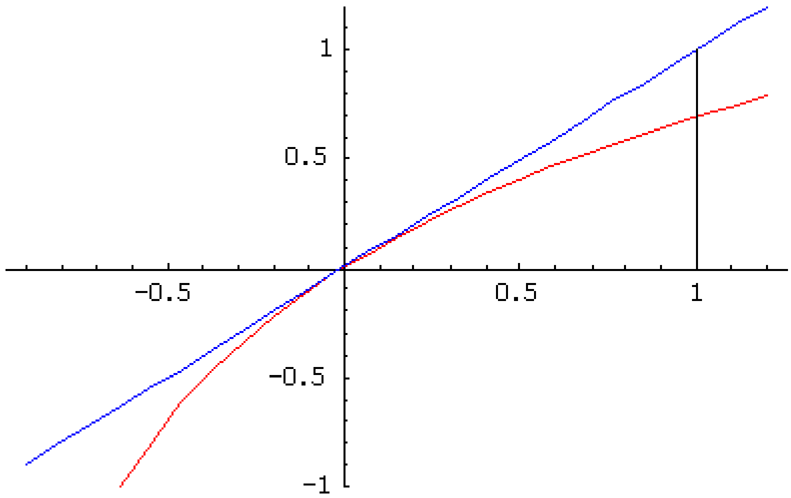
f '(x) = 1/(x+1); f '(0) = 1/1 = 1

Sustituyendo resulta que la recta tangente en x = 0 es y = x, que es la bisectriz del I y III cuadrante.

(b)

La gráfica de Ln(x + 1) es exactamente igual que la de Ln(x) pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje de abscisas OX.

Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



No hacía falta hacer la gráfica pues conociendo la gráfica de Ln(x) se sabe que la recta tangente está por encima.

Vamos ya a calcular el área que nos piden

$$A = \int_0^1 (\text{tangente - grafica})dx = \int_0^1 (x - Ln(x+1))dx$$

Calculamos 1º la integral del neperiano, que es por partes. $\left(\int udv = uv - \int vdu \right)$

$$I = \int Ln(x+1)dx = xLn(x+1) - \int \frac{xdx}{x+1} = xLn(x+1) - I_1$$

u = Ln(x+1) de donde du = dx/(x+1)

dv = dx, de donde v = x

$$I_1 = \int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{(x+1-1)dx}{x+1} = \int (1 - \frac{1}{x+1})dx = x - Ln(x+1)$$. Por tanto

$$I = xLn(x+1) - I_1 = xLn(x+1) - x + Ln(x+1)$$

Calculamos ya el área

$$A = \int_0^1 (x - Ln(x+1))dx = \left[\frac{x^2}{2} - (xLn(x+1) - x + Ln(x+1)) \right]_0^1 =$$

= (1/2 – (Ln(2) – 1 + Ln(2)) – (0 – (0 – 0 + Ln(1)) = 3/2 – 2Ln(2) u.a.

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2007

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}$$

(a) [1’5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para a = –2.

Solución

$$ax + y + z = 4$$

$$x - ay + z = 1$$

$$x + y + z = a + 2$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Calculamos el det(A) = |A|

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1^aF-3^aF \\ 2^aF-3^aF \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(-a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 1)(-a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = -1

*Si **a ≠ 1 y a ≠ -1** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ -2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF-1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si **a = -1**, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ -2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como tenemos dos filas iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A)y dos incógnitas principales..

Lo resolvemos para a = -1

-x + y + z = 4

x + y + z = 1. Tomamos z = λ

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

2x = -3, de donde x = -3/2

y = 1 – x – z = 1 + 3/2 - λ = 5/2 - λ

La solución del sistema es (x, y, z)= (-3/2, 5/2 - λ , λ) con λ ∈ R

(b)

Resolvemos el sistema para a = -2.

Nuestro sistema es

-2x + y + z = 4

x + 2y + z = 1

x + y + z = 0

A la 2ª le resto la 3ª, y a la 1ª le sumo la 3ª multiplicada por 2, con lo cual nos queda

3y + 3z = 4

y = 1

x + y + z = 0

Con y = 1 entrando en la 1ª tenemos z = 1/3.

Con y = 1 y z = 1/3, entrando en la 3ª tenemos x = -4/3

La solución del sistema es (x, y, z) = (-4/3, 1, 1/3)

También se puede hacer por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3};\ y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1;\ z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3}$$

Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (-4/3, 1, 1/3) cuando a = -2.

Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 2007

Considera los vectores **u** = (1,1,m), **v** = (0,m,-1) y **w** = (1,2m,0).
(a) [1'25 puntos] Determina el valor de m para que los vectores **u**, **v** y **w** sean linealmente dependientes.
(b) [1'25 puntos] Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresa el vector **w** como combinación lineal de los vectores **u** y **v**.

Solución

(a)

u = (1,1,m), **v** = (0,m,-1) y **w** = (1,2m,0).

Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

det(**u** , **v** , **w**) = $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}_{3^aF-1^aF} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix} = -m^2+2m-1=0$$

Resolviendo $-m^2 + 2m - 1 = 0$, obtenemos m = 1 (doble), con lo cual para que sean linealmente dependientes los vectores son **u** = (1,1,1), **v** = (0,1,-1) y **w** = (1,2,0).

(b)

Para expresar **w** como combinación lineal de **u** y **v** tenemos que calcular a y b de la expresión **w** = a.**u** + b.**v**, resolviendo el sistema que nos sale.

(1,2,0). = a(1,1,1) + b(0,1,-1) = (a, a + b, a – b). Igualando obtenemos a = 1 y b = 1, por tanto la relación de dependencia es **w** = 1.**u** + 1.**v**.

Esto es la forma normal de hacerlo, pero nos podríamos haber dado cuenta de que sumando el vector **u** con el vector **v** nos daba el vector **w** y habríamos terminado.