

OPCION A

1) **Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

Solución:

Sean x e y los números reales que suman 10 y $P = x^2 y^2$ todos los productos de dichos números.

$$\text{Como } x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x \Rightarrow P(x) = x^2(10 - x)^2 \Rightarrow P(x) = 100x^2 - 20x^3 + x^4$$

Tratamos de encontrar los valores de x que hace P máxima, para ello buscamos la abcisa de los puntos de la gráfica de P con tangente horizontal, es decir los que verifican: $P'(x) = 0$.

$$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 15x + 50) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 10 \\ x = 5 \end{matrix}$$

Para decidir donde se encuentra el máximo, podemos proceder, estudiando los signos de P' :

x	(0,5)	(5,10)
P'	+	-
P	Crece	Decrece

Luego en $x = 5$ hay un máximo relativo, que también será absoluto en el intervalo donde tiene sentido el problema, en el $0,10$, pues $P(0) = 0$ y $P(10) = 0$.

Es decir los dos números buscados son $x = 5$ e $y = 10 - 5 = 5$.

2. **Sean f y g dos funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , definidas por**

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

a) **Esboza las gráficas de f y g , calculando sus puntos de corte**

b) **Calcula el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g .**

Solución:

a) Puntos de corte de f y g :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 3x^2 = x + 3 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -3, x = -1, x = 1$$

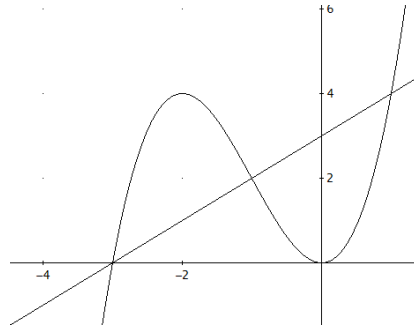
Para esbozar f puedes hallar los extremos relativos, usando f'

$$3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = -2$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
P'	+	-	+
P	Crece	Decrece	Crece

En $x = -2$ hay max. relativo y en $x = 0$ mínimo relativo, además f corta al eje de abcisa en $x = -3$ y $x = 0$, que se obtienen al resolver $x^3 + 3x^2 = 0$. Con todo ello y

haciendo la imagen de todos estos valores de x , podemos esbozar la siguiente gráfica de f , trivialmente representamos gráficamente g y obtenemos el recinto pedido:



El área de dicho recinto se obtendría como suma de las área de los dos recintos comprendidos entre f y g . Como tenemos las abcisas de los puntos de corte de f y g : $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} f(x) - g(x) \, dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} = 4$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 g(x) - f(x) \, dx = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^1 = 4$$

$$A = 4 + 4 = 8 \quad u^2$$

Nota: para resolver las anteriores integrales definidas he usado la regla de Barrow.

2) **Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) **Determina la matriz** $B = A^2 - 2A$

b) **Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.**

c) **Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$**

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 \\ a + 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

b) $B^{-1} = \frac{Adj B^t}{|B|}$, luego para que exista la inversa de B se ha de verificar que

$$|B| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3, \quad \lambda = -1. \text{ Luego existe la inversa de}$$

B para $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -1$

d) para $\lambda=1$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y usando $B^{-1} = \frac{AdjB^t}{|B|} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3) **Considera los planos de ecuaciones:** $x - y + z = 0$, $x + y - z = 2$

a) **Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.**

b) **Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.**

Solución:

a) La recta que nos piden pasa por A, luego solo nos queda averiguar su vector director, pero al no cortar a los planos dados, quiere decir que es paralela a cada uno de ellos y por tanto los vectores normales de ambos planos son perpendiculares al vector director de dicha recta, esto significa que el vector director es el producto vectorial de dichos vectores normales, o sea el producto vectorial de $(1,-1,1)$ y $(1,1,-1)$.

$$\vec{V}_{recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{V}_{recta} = 0, 2, 2 \Rightarrow$$

$$recta: \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

También se puede dar en ecuaciones implícitas.

Nota: Hay otros métodos de resolución, como por ejemplo expresando dicha recta como la intersección (ecuaciones implícitas) de dos planos paralelos a la recta que pasen por el punto A.

b) Expresamos la recta en ec. Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+t \end{cases}$, un punto genérico de

dicha recta es $P(1, 1+t, t)$ y se ha de verificar, según el enunciado que $d(P,A) = d(P,B)$, entonces:

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}| \Rightarrow \sqrt{0^2 + (t-1)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + t^2 + t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0^2 + (t-1)^2 + (t-3)^2 = (-1)^2 + t^2 + t^2 \Rightarrow 2t^2 - 8t + 10 = 2t^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8t + 10 = -1 \Rightarrow t = \frac{11}{8}$$

$$\text{Luego } P\left(1, \frac{19}{8}, \frac{11}{8}\right)$$

OPCIÓN B

- 1) Sea f de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es $y = 2x + 3$.

Solución:

Sea $g(x) = 2x + 3$

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a \quad f''(x) = 12x + 24 \quad 12x + 24 = 0 \Rightarrow x = -2$$

El punto de inflexión tiene de abscisa $x = -2$

- Como g es la recta tangente en $x = -2$, su pendiente, $m = 2$, ha de ser $f'(-2)$

$$f'(-2) = 2 \Rightarrow 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \Rightarrow a = -24 + 48 + 2 \Rightarrow a = 26$$

- Por otra parte en $x = -2$ hay un punto de contacto de f y g , lo que quiere decir que $f(-2) = g(-2) \Rightarrow b - 20 = -1 \Rightarrow b = 19$

- 2) Dada la función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , definida por $f(x) = \text{Ln}(1 + x^2)$, halla una primitiva de f que pase por el origen de coordenadas.

Solución

Usaremos el método de integración "por partes": $u = \text{Ln}(1 + x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1 + x^2}$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \int u dv = uv - \int v du$$

$$I = x \ln(1 + x^2) - \int x \frac{2x}{1 + x^2} dx \quad I_1 = \int x \frac{2x}{1 + x^2} dx = \int \frac{2x^2}{1 + x^2} dx$$

para resolver esta última, que es racional, divido $2x^2$ entre $1 + x^2$, obtengo como cociente: $c = 2$ y como resto: $r = -2$, además, si D es el dividendo:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d} \Rightarrow \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2 - \frac{2}{1 + x^2} \Rightarrow I_1 = \int 2 dx - \int \frac{2}{1 + x^2} dx = 2x - 2 \arg \text{tg}(x)$$

$$I = F(x) = x \text{Ln}(1 + x^2) - 2x + 2 \arg \text{tg}(x) + k$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 \text{Ln}(1 + 0^2) - 2 \cdot 0 + 2 \arg \text{tg}(0) + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = x \text{Ln}(1 + x^2) - 2x + 2 \arg \text{tg}(x)$$

3)

a) *Calcula la matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) *Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1}*

del apartado anterior.
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{AdjA^t}{|A|}$$

$$|A| = 2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

B)

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 3, y = -2, z = 0$$

es la solución del sistema.

4) Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C .

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Solución:

a) El triángulo ACB es rectángulo en C significa que: $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ (perpendiculares)

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Rightarrow (-x, -1, -4) \cdot (-x, -3, 2) = 0 \Rightarrow x^2 + 3 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

b) Sea $P(3,4,3)$ y $B(0,1,5)$. El plano que piden está determinado por uno de los puntos, por ejemplo B , el vector $\overline{BP} = 3,3,-2$ y el vector director de la recta, ya que esta es paralela a dicho plano. El vector de la recta lo podemos hallar, expresándola en paramétricas o usando el producto vectorial de los vectores normales de los planos que forman la ecuación de la recta:

$$\vec{v}_{recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_{recta}(-1, 2, 3)$$

La ecuación del plano en forma paramétrica será:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 + 3\alpha - \beta \\ y = 1 + 3\alpha + 2\beta \\ z = 5 - 2\alpha + 3\beta \end{array} \right\} \text{ y en forma implícita lo podemos expresar eliminando } \alpha \text{ y } \beta ,$$

no olvidemos que para que sea compatible el sistema anterior, considerando como incógnitas α y β , el rango de la matriz de coeficientes (que es 2) ha de ser igual al rango de la matriz ampliada (T. de Rouche). Y para que el rango de la

ampliada sea 2, es necesario que
$$\begin{vmatrix} x-0 & 3 & -1 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z-5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x - 7y + 9z - 38 = 0 ,$$

que es la ecuación buscada, en forma implícita.

Nota: como no dicen de que forma quieren que expresemos el plano, bastaría llegar a la ecuación paramétrica o vectorial del mismo.