

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 1 de 2008

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por
 $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = ce^{-(x+1)}$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1, 2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

- (a) [2 puntos] Calcula los valores de a , b y c .
(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ y } g(x) = ce^{-(x+1)}$$

Como se cortan en el punto $(-1, 2)$, tenemos $f(-1) = g(-1) = 2$

Como en el punto $(-1, 2)$ tienen la misma recta tangente, tienen la misma pendiente, es decir $f'(-1) = g'(-1)$

$$\text{De } f(-1) = g(-1) = 2$$

$$f(-1) = 1 - a + b = 2$$

$$g(-1) = c \cdot e^0 = 2, \text{ de donde } \mathbf{c = 2}$$

$$\text{De } f'(-1) = g'(-1)$$

$$f'(x) = 2x + a, \text{ de donde } f'(-1) = -2 + a$$

$$g'(x) = (-1)2e^{-(x+1)}, \text{ de donde } g'(-1) = (-1)2e^0 = -2, \text{ igualando tenemos } -2 + a = -2, \text{ por tanto } \mathbf{a = 0}.$$

Entrando en $1 - a + b = 2$ con $a = 0$, nos resulta $\mathbf{b = 1}$.

Las funciones son $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2e^{-(x+1)}$

(b)

La recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

$$f(x) = x^2 + 1, f(-1) = 2.$$

$$f'(x) = 2x, f'(-1) = -2.$$

Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 2 = -2(x + 1)$

Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 1 de 2008

[2'5 puntos] Dadas las funciones $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

El área pedida es $\left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$, siendo a y b las soluciones de $f(x) = g(x)$

De $f(x) = g(x)$, obtenemos $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$, elevando a la sexta resulta $x^3 = x^2$, de donde $x^3 - x^2 = 0 = x^2(x - 1)$. Las soluciones son $x = 0$ (doble) y $x = 1$.

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) dx \right| = \left| \int_0^1 (x^{1/2} - x^{1/3}) dx \right| = \left| \left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \left| -\frac{1}{12} \right| = \frac{1}{12} u^2$$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 1 de 2008

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuélvelo $\lambda = -1$.

Solución

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 5y - \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}$$

La matriz de los coeficientes del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 5 & -\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$(1)(-\lambda - 5\lambda) - (\lambda)(-2\lambda - \lambda) + (-1)(9) = 3\lambda^2 - 6\lambda - 9$. (Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$, de donde $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $\lambda = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}_y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque una columna es nula, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si $\lambda = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}_y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4(1 - 6) = -20 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible, y no tiene solución.

(b)

Nos piden resolverlo si $\lambda = -1$.

Hemos visto que como $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos últimas, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$$2x + y - z = 0$$

$$x + 5y + z = 0. \text{ Tomamos } z = \lambda \in \mathbb{R}$$

A la 1ª ecuación le sumo la 2ª multiplicada por -2, y tenemos $-9y = 3\lambda$. De donde $y = (-1/3)\lambda$.

Sustituyendo en $x + 5y + z = 0$, nos resulta $x = (2/3)\lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda, \lambda \right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 1 de 2008

Los puntos $A(-2, 3, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.

(a) [1 punto] Halla las coordenadas del vértice D.

(b) [1 punto] Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

(c) [0'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Solución

$A(-2, 3, 1)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(0, 1, -2)$ son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD

(a)

Si ABCD son los vértices de un paralelogramo. Los vectores libres **AB** y **DC** son iguales:

$$\mathbf{AB} = (4, -4, 2)$$

$$\mathbf{DC} = (-x, 1 - y, -2 - z)$$

Igualando coordenadas tenemos $x = -4$, $y = 5$ y $z = -4$. El punto que falta es $D(-4, 5, -4)$

(b)

La recta tiene por punto el $B(2, -1, 3)$ y como vector director el $\mathbf{AC} = (2, -2, -3)$. Su ecuación continua es

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 3}{-3}$$

(c)

Tomamos para el plano como punto el $B(2, -1, 3)$ y como vectores paralelos independientes el $\mathbf{BA} = (-4, 4, -2)$ y $\mathbf{BC} = (-2, 2, 5)$. Su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = 2 - 4\lambda - 2\mu \\ y = -1 + 4\lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda - 5\mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 1 de 2008

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}. \text{ Calcula } a, b, c \text{ y } d.$$

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es continua y derivable, las veces que sean necesarias, en \mathbb{R} .

Como tiene un máximo local en $x = 1$, nos dice que $f'(1) = 0$

Como $(0, 1)$ es un punto de inflexión, nos dice que $f(0) = 1$ y que $f''(0) = 0$.

Además $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4}$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; f''(x) = 6ax + 2b.$$

De $f(0) = 1$, tenemos $1 = d$, por tanto **$d = 1$**

De $f'(1) = 0$, tenemos $0 = 3a + 2b + c$

De $f''(0) = 0$, tenemos $0 = 2b$, por tanto **$b = 0$**

Sustituyendo los valores encontrados tenemos $c = -3a$, por tanto $f(x) = ax^3 - 3ax + 1$

$$\text{De } \int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{4} \text{ resulta } \frac{9}{4} = \int_0^1 (ax^3 - 3ax + 1) dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 1$$

Resolviendo la ecuación $9/4 = a/4 - (3a)/2 + 1$, obtenemos **$a = -1$** y por tanto **$c = -3(-1) = 3$** .

La función pedida es $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 1 de 2008

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$ (ln denota logaritmo neperiano).

(a) [0'75 puntos] Justifica que la recta de ecuación $y = (1/e)x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = e$.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g , el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución

(a)

La recta tangente a $g(x)$ en $x = e$ es $y - g(e) = g'(e)(x - e)$.

$$g(x) = \ln(x), g(e) = \ln(e) = 1.$$

$$g'(x) = 1/x, g'(e) = 1/e.$$

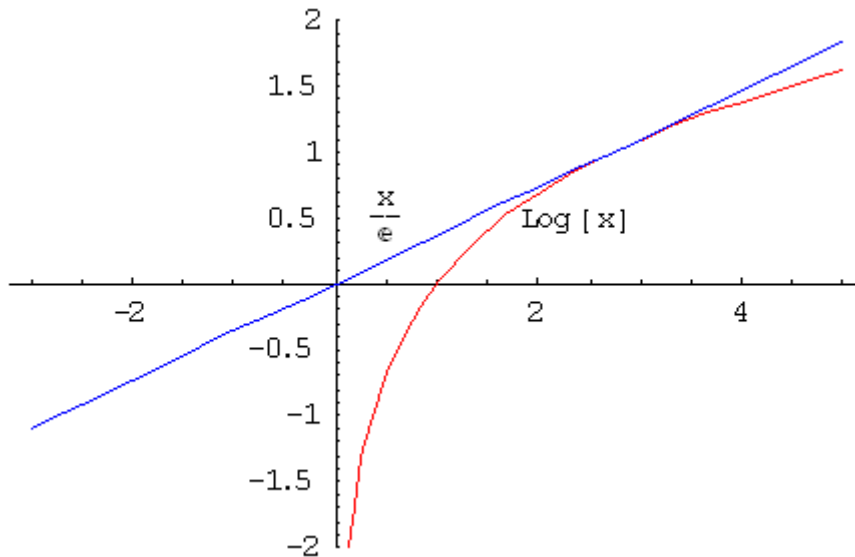
Sustituyendo tenemos que la recta tangente es $y - 1 = (1/e)(x - e)$, es decir $y = (1/e)x$.

(b)

Sabemos que $g(x) = \ln(x)$ pasa por $(1,0)$ y tiene $x = 0^+$ como asíntota vertical.

Sabemos que $y = (1/e)x$ es una recta que pasa por $(0,0)$ y coincide con $g(x) = \ln(x)$ en $x = e$, y que está por encima.

Aunque no lo piden un esbozo de las gráficas es



El área pedida es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^e (\text{recta tangente}) dx - \int_1^e (\text{función}) dx = \int_0^e \left(\frac{x}{e}\right) dx - \int_1^e \ln(x) dx = \left[\frac{x^2}{e \cdot 2}\right]_0^e - [x \cdot \ln(x) - x]_1^e = \\ &= (e^2)/(2e) - [(e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1)] = [(e/2) - 1] u^2 \end{aligned}$$

Recordamos que $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ es una integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$)

$$\int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x$$

Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 1 de 2008

[2'5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

Solución

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2 - 1) = 1 \neq 0$$

, A tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^T)$

$AP - B = C^T$, $AP = B + C^T$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} tenemos

$A^{-1}(AP) = A^{-1}(B + C^T)$. Operando queda $P = A^{-1}(B + C^T)$.

Hacemos los cálculos

$$(B + C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = A^{-1} (B + C^T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 1 de 2008

Sea la recta r dada por

$$\begin{aligned} 2x + y - mz &= 2 \\ x - y - z &= -m \end{aligned}$$

y el plano π definido por $x + my - z = 1$

- (a) [1 punto] ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?
 (b) [1 punto] ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?
 (c) [0'5 puntos] ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m = 0$?

Solución

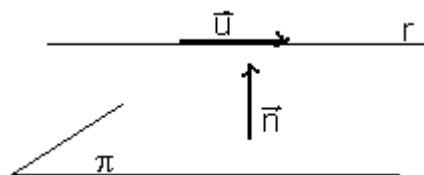
Recta $2x + y - mz = 2$

$$x - y - z = -m$$

Un vector director es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1 - m) - \mathbf{j}(-2 + m) + \mathbf{k}(-3) = (-1 - m, +2 - m, -3)$$

Plano $x + my - z = 1$. Un vector normal es $\mathbf{n} = (1, m, -1)$



(a)

Si la recta "r" es paralela al plano " π ", el vector director de "r", \mathbf{u} , es perpendicular al vector normal de " π ", \mathbf{n} , por tanto su producto escalar es cero

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 = (-1 - m, +2 - m, -3) \cdot (1, m, -1) = -1 - m + 2m - m^2 + 3 = -m^2 + m + 2 = 0$. Resolviendo la ecuación resulta $m = -1$ y $m = 2$. Es decir para $m = -1$ y $m = 2$, la recta "r" es paralela al plano " π ".

(b)

Para que la recta esté contenida en el plano, tiene que ser paralela y por el apartado (a) hemos visto que $m = -1$ o $m = 2$. Resolvemos el sistema recta – plano para $m = -1$ y $m = 2$ y aquel en el cual tenga infinitas soluciones (dos ecuaciones y tres incógnitas) será el valor de m buscado.

Si $\mathbf{m} = -1$, el sistema es

$$2x + y + z = 2$$

$$x - y - z = 1$$

$x - y - z = 1$. Si nos damos cuenta la 2ª y la 3ª ecuación son iguales y el sistema es

$$2x + y + z = 2$$

$x - y - z = 1$, Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas. Luego para $\mathbf{m} = -1$ la recta r está contenida en el plano π .

Si $\mathbf{m} = 2$, el sistema es

$$2x + y - 2z = 2$$

$$x - y - z = -2$$

$x + 2y - z = 1$. Si sumamos la 2ª y la 3ª ecuación, y después se la restamos a la primera nos queda

$0x + 0y + 0z = 3$, lo cual es absurdo, por tanto para $\mathbf{m} = 2$ la recta es paralela al plano pero no está contenida en él.

(c)

Para $\mathbf{m} = 0$, la recta corta al plano en un punto, que se obtiene resolviendo el sistema

$$2x + y = 2$$

$$x - y - z = 0$$

$x - z = 1$. 3ª ecuación– 2ª ecuación nos resulta $\mathbf{y} = 1$, entrando en la 1ª ecuación $x = 1/2$, y después entrando en la 2ª ecuación nos queda $\mathbf{z} = -1/2$. El punto de corte es $(x, y, z) = (1/2, 1, -1/2)$.