Ejercicio nº 1 de la opción A de septiembre de 2008

Sea f: R → R la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

(a) [1'5 puntos] Halla a y b sabiendo que f es derivable en R .
(b) [1 punto] Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

Solución

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x - b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Como f es derivable en todo $\Re$, es continua en todo $\Re$. En particular es continua y derivable en x = 2

(a)

Como es continua en x = 2, se verifica que $f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$.

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b$$

Igualando tenemos la ecuación 4a + 6 = - 2b

Como es derivable en x = 2, se verifica que f '(2^+) = f '(2^-)

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2} (2ax + 3) = 4a + 3$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2} (2x - b) = 4 - b$$

Igualando tenemos la ecuación 4a + 3 = 4 - b

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a + 6 = -2b \\ 4a + 3 = 4 - b \end{cases}$, obtenemos a = 2 y b = -7, por tanto la función pedida es

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b)

Como me piden la recta tangente y normal en x = 3, tomamos la rama de la función con x > 2, es decir

$f(x) = x^2 + 7x – 4$

La recta tangente en x = 3 es $y – f(3) = f'(3)(x – 3)$

La recta normal en x = 3 es $y – f(3) = (-1/f'(3)).(x – 3)$

$f(x) = x^2 + 7x – 4$, de donde $f(3) = 9 + 21 – 4 = 26$

$f'(x) = 2x + 7$, de donde $f'(3) = 6 + 7 = 13$

La recta tangente en x = 3 es $y – 26 = 13(x – 3)$

La recta normal en x = 3 es $y – 26 = (-1/13).(x – 3)$

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2008

Dada la función g: R → R , definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$.
(a) [1 punto] Esboza la gráfica de g.
(b) [1'5 puntos] Calcula $\int_0^2 g(x)dx$.

Solución

(a)

La función g(x) es continua en todo R, por suma de funciones continuas.

Como las soluciones de $x^2 – 1 = 0$ son x = 1 y x = - 1, tenemos que

$$\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ -(x^2-1) & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$; y

$$g(x) = 2x + \left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ -x^2+2x+1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2+2x-1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

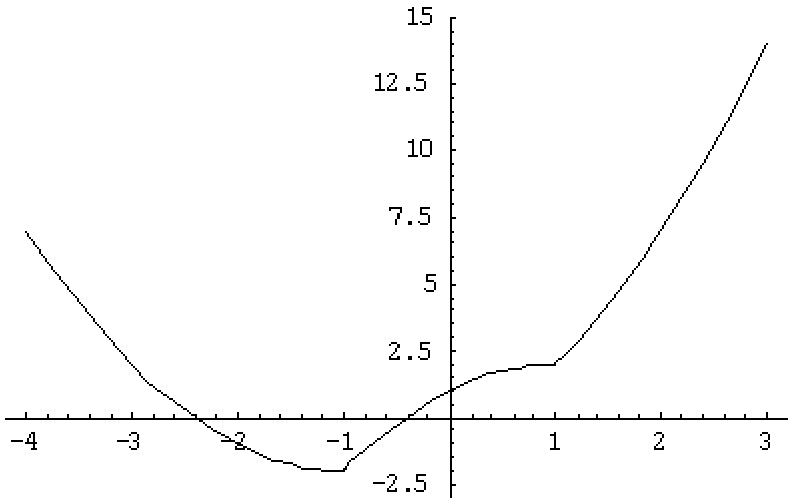
La gráfica de $f(x) = x^2 + 2x – 1$ es la de una parábola que tiene las ramas hacia arriba y como abscisa de su vértice la solución de $f'(x) = 2x + 2 = 0$, es decir en x = -1. La dibujaremos en x < - 1 y en x ≥ 1, luego le daremos unos cuantos valores a izquierda de -1 y a derecha de 1

x	-1	-2	-3	1	2	3
$f(x) = x^2 + 2x – 1$	-2	-1	2	2	7	14

La gráfica de f(x) = – x^2 + 2x + 1 es la de una parábola que tiene las ramas hacia abajo y como abscisa de su vértice la solución de f'(x) = – 2x + 2 = 0, es decir en x = 1. La dibujaremos en -1 ≤ x < 1, luego le daremos unos cuantos valores entre -1 y 1.

x	-1	0	1
f(x) = - x^2 + 2x + 1	-2	1	2

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica sería



(b)

$$g(x) = 2x + \left|x^2 - 1\right| = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 1)dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_1^2 = (-1/3 + 1 + 1) + (8/3 + 4 - 2) - (\frac{1}{3} + 1 - 1) = 6$$

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2008

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y + z = a - 1$$
$$2x + y + az = a$$
$$x + ay + z = 1$$

(a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a.
(b) [1 punto] Resuelve el caso a = 2.

Solución

$$x + y + z = a - 1$$

$$2x + y + az = a$$

$$x + ay + z = 1$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF-(2).1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

Resolvemos |A| = 0, es decir (a - 2)(a - 1) = 0, de donde a = 1 y a = 2

*Si **a ≠ 1 y a ≠ 2** , tenemos |A| ≠ 0 con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **a = 1**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} 2^aF-3^aF = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A)= 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b)

Si **a = 2**, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ -1 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos columnas son iguales, tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

x + y + z = 1

2x + y + 2z = 2. Tomamos z = λ ∈ R

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

x = 1 – λ . Sustituyendo en x + y + z = 1, nos resulta y = 0.

La solución del sistema es (x, y, z)= (1 – λ , 0, λ) con λ ∈ R

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2008

Sea la recta s dada por $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

(a) [1’25 puntos] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r, dada por x - 1 = - y + 2 = z - 3

(b) [1’25 puntos] Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2, de ecuación x + y = 3, y deduce la distancia entre ambos.

Solución

(a)

La recta s de ecuación $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$, viene dada como intersección de dos planos. Vamos a obtener un punto y un vector directo suyos.

Para el punto tomamos y = 0, de donde z = 3 y x = 2. Punto A(2,0,3)

El vector director lo vamos a dar como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano.

$\vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ **i**(2) – **j(1)** + **k**(2) = (2, -1, 2)

La recta r, dada por x - 1 = - y + 2 = z – 3 la ponemos en forma continua (Observa que la y va multiplicada por -1) . Su ecuaciones (x – 1)/1 = (y – 2)/(-1) = (z – 3)/1, por tanto un punto suyo es B(1,2,3) y un vector director es $\mathbf{d_r}$ = (1, -1,1).

Como me piden un plano π_1 que sea paralelo a la recta s y que contenga a la recta r, tomamos para el plano el punto B de la recta r y los vectores $\mathbf{d_r}$ y $\mathbf{d_s}$

Las ecuaciones paramétricas del plano serían

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 3 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$ con λ , μ ∈ R

El plano en forma general sería $\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ (x – 1)(1) – (y – 2)(0) + (z – 3)(1) = - x + z – 2 = 0

(b)

Para estudiar la posición relativa de la recta s y el plano p $_2$ de ecuación x + y = 3, ponemos la recta en paramétricas la sustituimos en el plano y resolvemos la ecuación que nos salga.

Con el punto A(2,0,3) y el vector directo $\mathbf{d_s}$ = (2, -1, 2) las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$. Sustituyendo en el plano π_2 nos queda

(2 + 2λ) + (0 - λ) = 3, de donde λ = 1, y por tanto la recta s corta al plano π_2 en el punto C(2 + 2(1), -(1), 3 + 2(1)) = C(4, -1, 5).

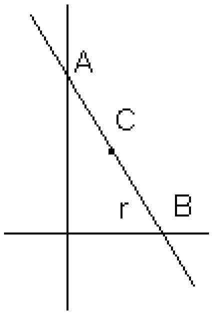
Como la recta corta al plano la distancia de la recta al plano es 0.

Ejercicio n° 1 de la opción B de septiembre de 2008

[2’5 puntos] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

Solución

Es un problema de optimización.



La ecuación en forma explícita de una recta r en el plano es y = mx + n.

Como corta en la parte positiva de los ejes coordenados, la gráfica de la recta es como la de la figura con lo cual la pendiente m es negativa.

Como pasa por el punto C(1,2) tenemos 2 = m + n, de donde n = 2 – m, y la recta queda en la forma

y = mx + (2 – m)

El corte de la recta con el eje OX es el punto B que se obtiene haciendo y = 0, de donde mx = m – 2, con lo cual x = (m – 2)/m, y el punto tiene de coordenadas B((m – 2)/m, 0)

El corte de la recta con el eje OY es el punto A que se obtiene haciendo x = 0, de donde y = 2 – m, con lo cual el punto tiene de coordenadas A(0, 2 – m).

El triángulo es un triángulo rectángulo por tanto su área es ½.cateto.cateto, es decir

Área = A(m) = (1/2)[(m – 2)/m].(2 – m)

La función a optimizar es A(m). Calculamos su primera derivada, la igualamos a 0, tomamos para m valores negativos (por cortar la recta en la parte positiva de los ejes coordenados), y comprobamos que es un mínimo sustituyendo en la 2ª derivada y viendo que sale positiva par dicho valor

$$A(m) = \frac{1}{2}.\frac{(m-2)}{m}.(2-m) = \frac{-m^2+4m-4}{2m}$$

$$A'(m) = \frac{(-2m+4)(2m)-(-m^2+4m-4)(2)}{(2m)^2} = \frac{-2m^2+8}{4m^2}$$

De A’(m) = 0, tenemos $-2m^2 + 8 = 0$, de donde $m^2 = 4$, y m = ± 2. L a solución negativa es m = -2.

Comprobamos que es un mínimo, viendo que A’’(-2) > 0

$$A'(m) = \frac{-2m^2+8}{4m^2}$$

$$A''(m) = \frac{(-4m)(4m^2)-(-2m^2+8)(8m)}{(4m^2)^2}$$

$$A''(-2) = \frac{(8)(16)-(0)}{(16)^2} > 0$$

, por tanto m = - 2 es un mínimo, y el área pedida es A(-2) = (-16)/(-4) = 4 u^2.

Ejercicio nº 2 de la opción B de septiembre de 2008

Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad y \quad g(x) = 2x + 2$$

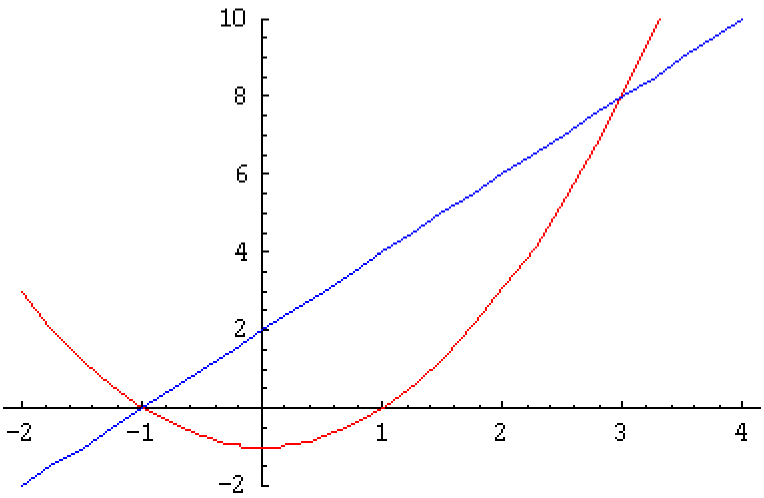
(a) [0'5 puntos] Esboza las gráficas de f y g.
(b) [2 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Solución

(a)

La gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ es exactamente igual que la de la parábola x^2 (vértice en (0,0) y ramas hacia arriba), pero desplazada una unida hacia abajo en ordenadas.

La gráfica de $g(x) = 2x + 2$ es la de una recta luego con dos puntos es suficiente para dibujarla. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas sería:



(b)

El área que nos piden es

$$A = \int_a^b (\text{recta - parábola})dx = \int_a^b [(2x + 2) - (x^2 - 1)]dx$$

, donde a y b son las soluciones de la ecuación

$$\text{recta = parábola}$$

$$2x + 2 = x^2 - 1$$

Resolviendo la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$, sale x = -1 y x = 3, por tanto

$$A = \int_{-1}^{3}[(2x + 2) - (x^2 - 1)]dx = \int_{-1}^{3}[- x^2 + 2x + 3)]dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3\right]_{-1}^{3} =$$

= (– 9 + 9 + 9) – (1/3 + 1 – 3) = 32/3 u^2.

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2008

Sabemos que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$$

Tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación ax + y + 7z = 7
(a) [1'25 puntos] Determina el valor de a..
(b) [1'25 puntos] Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

Solución

(a)

Lo que me pide es que calcule el valor de a sabiendo que el sistema

2x – y + 3z = 1

x + 2y – z = 2

ax + y + z = 7

es compatible e indeterminado con rango 2, (dos ecuaciones y dos incógnitas principales). Por tanto el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{pmatrix}$ tiene que ser cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{Adjuntos} \\ 1^{\text{a}} \text{ fila} \end{array} =$$ 2(14 + 1) – (-1)(7 + a) + 3(1 – 2a) = 40 – 5a = 0, de donde a = 8

(b)

El que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad, se traduce en x + y + z = 1, por tanto nos piden que resolvamos el sistema

2x – y + 3z = 1

x + 2y – z = 2

x + y + z = 1

Lo haremos por Gauss y Cramer

Por Gauss

$$\begin{cases} x+y+z & =1 \\ 2x-y+3z & =1 \quad 2^a F - 2.1^a F \\ x+2y-z & =2 \quad 3^a F - 1^a F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z & =1 \\ 0-3y+z & =1 \quad 2^a F + 3.3^a F \\ 0+y-2z & =1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z & =1 \\ 0+0-5z & =2 \\ 0+y-2z & =1 \end{cases}$$

, de donde z = -2/5, y = 1 + 2z = 1 – 4/5 = 1/5 y x = 1-y-z = 1-1/5+2/5 = 6/5. La solución es (x,y,z) = (6/5,1/5,-2/5)

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{5}$$

Y como vemos se obtiene la misma solución (x,y,z) = (6/5,1/5,-2/5).

Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 2008

Considera los puntos A(1,1,0), B(1,1,2) y C(1,-1,1).
(a) [1'5 puntos] Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

Solución

(a)

Para que los puntos A(1,1,0), B(1,1,2) y C(1,-1,1) no estén alineados, los vectores **AB** y **AC** no pueden ser proporcionales.

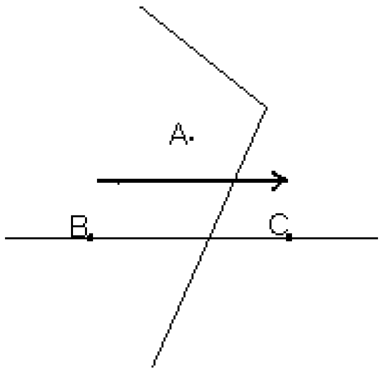
AB = (0,0,2); **AC** = (0,-2,1). Como vemos no son proporcionales y los tres puntos no están alineados.

El área del triángulo que determinan los puntos A, B y C es ½ del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, es decir ½||**AB**x**AC**||

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ =**i**(4) – **j**(0) + **k**(0) = (-4,0,0)

Área = ½||**AB**x**AC**|| = $1/2\sqrt{4^2} = 4/2 = 2u^2$

(b)



El plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta que pasa por B y C, es el plano que tiene por vector normal **n** = **BC** = (0,-2,-1) y pasa por el punto A(1,1,0).

Todos los planos perpendiculares a la recta que pasa por B y C, son de la forma -2y – z + K = 0. Le imponemos la condición de que pase por el punto A(1,1,0).

$$-2(1) - (0) + K = 0$$

de donde K = 2, y el plano pedido es -2y – z + 2 = 0