Soluciones modelo 2 (Septiembre de 2009)

Opción A

Ejercicio 1.-

[2'5 puntos] Se considera la función $f:[1,+\infty)\to R$ definida por $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$.
Determina la asíntota de la gráfica

Solución

Evidentemente, la función no tiene asíntotas verticales, ya que su dominio es $[1,+\infty)$

Estudiemos la asíntota horizontal hacia la derecha, es decir, para x → ∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)=+\infty$$

Luego, no hay asíntota horizontal para x →∞
Para x → - ∞ la función no está definida, por tanto, no podemos calcular asíntotas hacia la izquierda.

La función puede tener una asíntota oblicua hacia la derecha:
$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indet.}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\infty-\infty=\text{Indet.}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

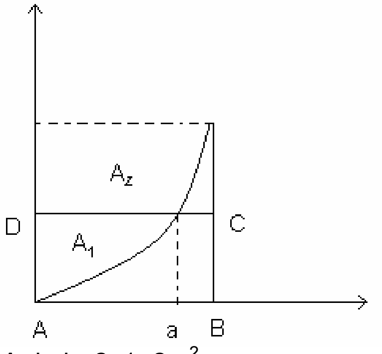
Luego la asíntota de la gráfica de la función es una asíntota oblicua hacia la derecha cuya ecuación es: $y=2x-\frac{1}{2}$

Ejercicio 2.

La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide el rectángulo de vértices A=(0,0) , B=(2,0) , C=(2,1) y D= (0,1) en dos recintos
a) [0’75 puntos] Dibujar dichos recintos
b) [1’75 puntos] Hallar el área de cada uno de ellos.

Solución

a)



b) El área del rectángulo es A=bxh=2x1=2 u^2

El área desde A hasta *a* limitada por la parábola y el eje OX será: $A_1=\int_0^a\frac{1}{2}x^2dx$

Para calcular *a*, igualamos la ecuación de la recta DC (*y=1*) a la de la parábola:

$\frac{1}{2}x^2=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=+\sqrt{2}$, puesto que *a* es positivo. Así:

$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}x^2dx=\left[\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}}=\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{6}\right)-\left(\frac{(0)^3}{6}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ u^2$$

Como $A=A_1+A_2 \Rightarrow A_2=A-A_1=2-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{6-\sqrt{2}}{3}$ u^2

Por tanto: $A_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$ u^2 y $A_2=\frac{6-\sqrt{2}}{3}$ u^2

Ejercicio 3.

a) [1'75 puntos] Discute según los valores λ el siguiente sistema: $\begin{cases} 3x+\lambda y=0 \\ x+\lambda z=\lambda \\ x+y+3z=1 \end{cases}$

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $\lambda=0$.

Solución

a) $\left.\begin{matrix} 3x+\lambda y & =0 \\ x+ & \lambda z=\lambda \\ x+ & y+3z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\lambda^2-6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ y } \lambda=6$

Por tanto:

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$, $r(A)=3=r(A^*)=$ nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE DETERMINADO

Si $\lambda=0$, $r(A)=2;\ A^*=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};r(A^*)=r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=2$

$r(A)=r(A^*)=2<$ nº de incógnitas, luego el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO

Si $\lambda=6$,

$$r(A)=2;\ A^*=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};r(A^*)=r\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=36-6-18=12 \neq 0 \Rightarrow r(A^*)=3$$

$r(A)=2 \neq r(A^*)=3$, luego el sistema será INCOMPATIBLE

b) $\lambda=0$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3x & =0 \\ x & =0 \\ x+ & y+3z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ x+y+3z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=t \Rightarrow y+3t=1 \Rightarrow y=1-3t \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=1-3t \\ z=t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4.

Considera el punto *P(1 , 0 , 0)*, la recta *r* definida por $x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta *s* definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$

a) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de *r* y *s*

b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y *s*

Solución

a) $r: x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} A(3,0,-1) \\ \vec{d}=(1,2,-2) \end{cases}$

$s:(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0) \Rightarrow \begin{cases} B(1,1,0) \\ \vec{d}'=(-1,2,0) \end{cases}$

$r\left(\vec{d},\vec{d}',\overrightarrow{AB}\right)=r\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3+1+2=0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3 \neq 0$, $r\left(\vec{d},\vec{d}',\overrightarrow{AB}\right)=2$ y las rectas son coplanarias, por lo que las rectas se cortarán en un punto.

b)Si el plano Pasa por P, su punto base será dicho punto.
Si es paralelo a r y s, los vectores directores de las rectas serán también los del plano:

$$\pi \equiv \begin{Bmatrix} P(1,0,0) \\ \vec{u}=\vec{d}=(1,2,-2) \\ \vec{v}=\vec{d}'=(-1,2,0) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 2 & 2 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2z+2y+2z+4(x-1)=4x+2y+4z-4=0$$

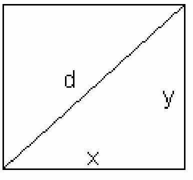
Por tanto: $\pi \equiv 2x+y+2z-2=0$

Opción B

Ejercicio 1

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos cuya área mide *16 cm²*, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud

Solución



El área de este rectángulo es: $A=x.y=16 \Rightarrow y=\frac{16}{x}$

Su diagonal, según el teorema de Pitágoras está dada por la expresión:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+16^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^4+16^2}}{x}$$

Ya que *x* es un valor positivo.

Calculamos ahora la primera derivada de la función que hemos obtenido y la igualamos a cero:

$$d'(x)=\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16^2}}.x-\sqrt{x^4+16^2}.1}{x^2}=\frac{\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+16^2}}-\sqrt{x^4+16^2}}{x^2}=\frac{\frac{2x^4-x^4-16^2}{\sqrt{x^4+16^2}}}{x^2}=\frac{x^4-16^2}{x^2.\sqrt{x^4+16^2}}=0$$

Luego: $x^4-16^2=0 \Rightarrow x^4=16^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{16^2}=\pm 4$, pero como $x>0 \Rightarrow x=+4$

Para determinar si tenemos un valor máximo o mínimo para *d*, calculamos su derivada segunda:

$$d''(x)=\left(\frac{x^4-16^2}{x^2.\sqrt{x^4+16^2}}\right)'=\frac{4x^3.x^2.\sqrt{x^4+16^2}-\left(x^4-16^2\right).\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)'}{\left(x^2\times\sqrt{x^4+16^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^5.\sqrt{x^4+16^2}-\left(x^4-16^2\right).\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)'}{\left(x^2.\sqrt{x^4+16^2}\right)^2}$$

Como $d''(4)=\dfrac{4.4^5.\sqrt{4^4+16^2}-0}{\left(4^2.\sqrt{4^4+16^2}\right)^2}>0$, para $x=+4$, la diagonal del rectángulo tiene un valor mínimo. Para este valor de *x*, $y=\dfrac{16}{4}=4$; luego el rectángulo de área 16 que tiene una diagonal de menor longitud es un cuadrado de lado 4.

Ejercicio 2.

[2'5 puntos] Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$.

Halla la primitiva *F* de *f* que cumple *F(0) = 3.* (Sugerencia: Utiliza el cambio de variable $t=\dfrac{3}{2}x^2$)

Solución

Calculamos la integral indefinida de la función dada (conjunto de todas sus primitivas), utilizando el cambio de variable propuesto:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx=\left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}x^2\Rightarrow x^4=\dfrac{4}{9}t^2 \\ dt=3x\,dx\Rightarrow x\,dx=\dfrac{1}{3}dt \end{array}\right\}=\int\frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{4-9\frac{4}{9}t^2}}=\int\frac{dt}{3\sqrt{4-4t^2}}=\int\frac{dt}{3\sqrt{4\left(1-t^2\right)}}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{6}\text{arcsen}t+k=\frac{1}{6}\text{arcsen}\left(\frac{3}{2}x^2\right)+k$$

Como: $F(0)=3\Rightarrow F(0)=\dfrac{1}{6}\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{2}0^2\right)+k=0+k=3\text{Þ}k=3$

Por tanto: $F(x)=\dfrac{1}{6}\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)+3$

Ejercicio 3.

[2'5 puntos] Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Determina la matriz X que verifica AX – B^t = 2C (B^t es la matriz traspuesta de B)

Solución

$AX-B^t=2C\Rightarrow AX=2C+B^t$

Si existe $A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\left(2C+B^t\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=1-2+1+4=4\neq 0\Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\text{adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11}=+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1 & A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1 & A_{13}=+\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1 \\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2 & A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2 & A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2 \\ A_{31}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1 & A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3 & A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{adj}(A)\right)^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}; \quad B^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(2C+B^t\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -4\\ 0 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-6-0 & 1+4-7\\ 1-6-0 & -1+4-21\\ -1-6-0 & 1+4-35\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & -2\\ -5 & -18\\ -7 & -30\end{pmatrix}$$

Luego: $X=\begin{pmatrix}\frac{-7}{4} & \frac{-2}{4}\\ \frac{-5}{4} & \frac{-9}{2}\\ \frac{-7}{4} & \frac{-15}{2}\end{pmatrix}$

Ejercicio 4.

Considera la recta r definida por $\begin{cases}x-y+3=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases}2y+1=0\\ x-2z+3=0\end{cases}$

a) [1'5 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s

b) [1 punto] ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razona la respuesta..

Solución

Calculamos en primer lugar una determinación lineal (vector director y punto por el que pasa) de cada una de las rectas.

Recta r: $\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(1,1,2)$; $\left.\begin{cases}x-y+3=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}\right\} x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow z=2\Rightarrow A(0,3,2)$

Recta s: $\vec{d}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-2\vec{k}=(-4,0,-2)$; $\left.\begin{cases}2y+1=0\\ x-2z+3=0\end{cases}\right\} y=-\frac{1}{2}; z=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow B(-3,-\frac{1}{2},0)$

a) Si el plano contiene a r, uno de sus vectores directores será $\vec{d}=(1,1,2)$ y su punto base, $A(0,3,2)$.

Si el plano es paralelo a s, el otro vector director será $\vec{d}'=(-4,0,-2)$

Por tanto, la ecuación del plano pedido es:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-0 & 1 & -4\\ y-3 & 1 & 0\\ z-2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2x-8(y-3)+4(z-2)+2(y-3)=-2x-6y+4z+10=0$$

$$\pi\equiv x+3y-2z-5=0$$

b) Para que contenga a r, debe formar parte del haz de planos que contienen a r:

$$x-y+3+\lambda\left(x+y-z-1\right)=0$$

Luego el plano sería de la forma: $(1+\lambda)x+(-1+\lambda)y-\lambda z+\left(3-\lambda\right)=0$

y su vector normal sería: $\vec{n}=(1+\lambda,-1+\lambda,-\lambda)$

Para que sea perpendicular a s, el vector normal del plano y el director de la recta, han de ser linealmente dependientes, es decir, $rango(\vec{d}\,',\vec{n}) = 1 \Rightarrow rango\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 1+\lambda & -1+\lambda & -\lambda \end{pmatrix} = 1$

Para ello:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1+\lambda & -1+\lambda \end{vmatrix} = 4-4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda+2+2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Como los valores de λ son distintos, los dos determinantes nunca podrán ser cero simultáneamente, luego el rango no podrá ser 1. Por tanto $\vec{d}\,'$ y $\vec{n}$ son siempre linealmente independientes y no existe ningún plano que contenga a *r* y sea perpendicular a *s*