Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 3 (Junio) de 2009

[2'5 puntos] Calcula el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano),

$$\lim_{x\to 1} [\ 1/Ln(x) - 2/(x^2 - 1)\ ]$$

Solución

Calcula el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano),

$\lim_{x\to 1} [\ 1/Ln(x) - 2/(x^2 - 1)\ ]$

La Regla de L'Hopital (L'H), que dice si $\lim_{x\to a} [(f(x)/g(x)] = 0/0$, y existe $\lim_{x\to a} [(f'(x)/g'(x)]$ entonces se verifica que $\lim_{x\to a} [\ f(x) / g(x)\ ] = \lim_{x\to a} [\ f'(x) / g'(x)\ ]$. También se puede aplicar si $x \to +\infty$, y si sale ∞/∞.

$\lim_{x\to 1} [\ 1/Ln(x) - 2/(x^2 - 1)\ ] = \lim_{x\to 1} [\ (x^2 - 1 - 2Ln(x)\ ) / (\ Ln(x).(x^2 - 1)\ ]$ = 0/0, L'H

$\lim_{x\to 1} [\ (2x - 2/x\ ) / (\ 2x.Ln(x) + (x^2 - 1)/x\ ] = 0/0$, L'H

$\lim_{x\to 1} [\ (2 + 2/x^2\ ) / (\ 2.Ln(x) + 2x/x + (x^2 + 1)/x^2\ ] = (2 + 2) / (0 + 2 + 2) = 4/4 = 1.$

Ejercicio 2 de la Opción A de Junio de 2009

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = x|x - 1|$.

(a) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

(b) [0'75 puntos] Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Solución

(a)

Esboza la gráfica de $f(x) = x|x - 1|$.

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; \quad f(x) = x.|x-1| = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x < 1 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Si $x < 1$, $f(x) = -x^2 + x$ es una parábola con las ramas hacia abajo (el nº que multiplica a x^2 es negativo), y con la abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0$

$f'(x) = -2x + 1$, $f'(x) = 0$ nos dá $x = 1/2$. $f(1/2) = -(1/2)^2 + 1/2 = 1/4$

Vértice V(1/2, 1/4)

Cortes

Para $x = 0$, $f(0) = 0$. Punto (0,0)

Para $f(x) = 0$, tenemos $-x^2 + x = 0 = x(-x + 1)$, de donde $x = 0$ y $x = 1$ y los puntos de corte serían (0,0) y (1,0).

Un cuadro de valores sería

x	$f(x) = -x^2 + x$
1^-	0
1/2	1/4
0	0
-1	-2

Si x > 1, $f(x) = x^2 - x$ es una parábola con las ramas hacia arriba (el nº que multiplica a x^2 es negativo), y con la abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x - 1$, $f'(x) = 0$ nos dá $x = 1/2$ (fuera de su dominio). $f(1/2) = (1/2)^2 - 1/2 = -1/4$

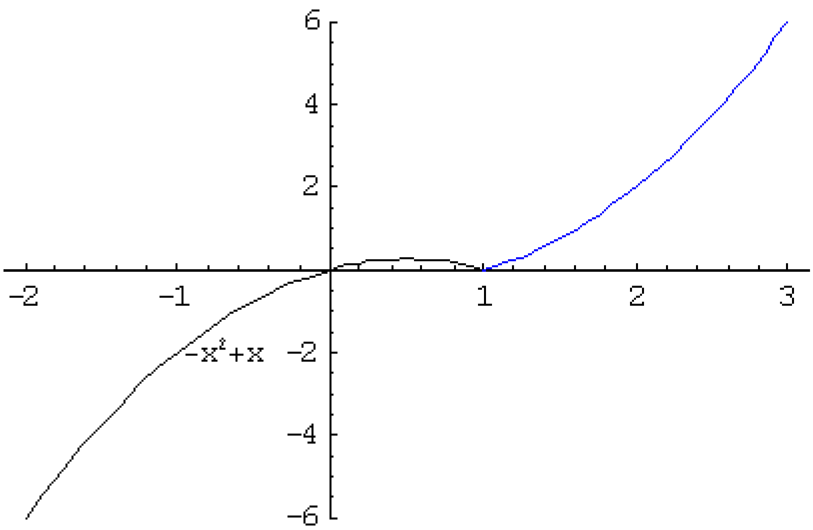
Vértice V(1/2, –1/4)

Cortes

Para x = 0, f(0) = 0. Punto (0,0). (fuera de su dominio)
Para f(x) = 0, tenemos $x^2 - x = 0 = x(x - 1)$, de donde x = 0 y x = 1 y los puntos de corte serían (0,0) (fuera de su dominio) y (1,0).
Un cuadro de valores sería

x	$f(x) = x^2 - x$
1/2	-1/4 Este es el vértice pero no está en su dominio
1	0
2	2
3	6

Un esbozo de la gráfica de la función es (en azul $x^2 - x$)



(b)

Comprueba que la recta de ecuación y = x es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

La recta tangente en x = 0 es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

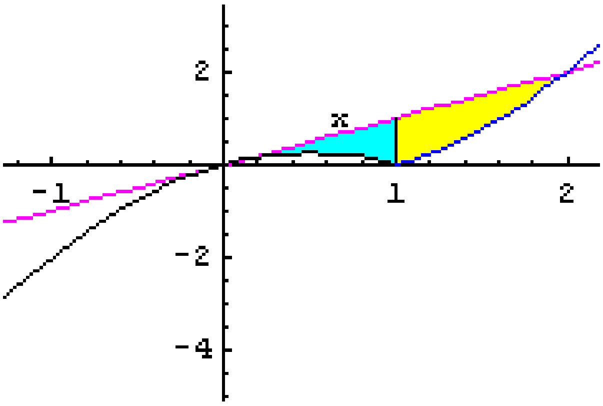
En x = 0, la función es $f(x) = -x^2 + x$ porque estamos en la rama x < 1

$f'(x) = - 2x + 1$, luego f(0) = 0 y f '(0) = 1 y la recta tangente es y – 0 = 1(x – 0), es decir la recta que me han dado y = x

(c)

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Como vemos en la gráfica



Área = $\int_0^1 [x - (-x^2+x)]dx + \int_1^a [x - (x^2 - x)]dx = (*)$

Donde "a" es una de las soluciones de $x = x^2 - x$, es decir $x^2 - 2x = 0$, que nos dá $x = 0$ y $x = 2$, luego

$= (*) = \int_0^1 [x^2]dx + \int_1^2 [-x^2 + 2x]dx = [x^3/3]_0^1 + [-x^3/3 + x^2]_1^2 =$

$= 1/3 + [(-8/3 + 4) - (-1/3 + 1)] = 4 - 1 - 8/3 + 1/3 + 1/3 = 3 - 2 = 1\ u^2$

Ejercicio 3 de la Opción A de Junio de 2009

Sean F_1, F_2, F_3, las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
(a) [0'5 puntos] El determinante de B^{-1}.
(b) [0'5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
(c) [0'5 puntos] El determinante de 2B.
(d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Solución

$B = (F_1, F_2, F_3)$ con $\det(B) = -2$.

(a)

El determinante de B^{-1}.

Como $B.B^{-1} = I_3$, entonces $|B.B^{-1}| = |I_3| = \text{(vii)} = 1 = \text{(vi)} = |B|.|B^{-1}| = -2.|B^{-1}|$, por tanto $|B^{-1}| = -1/2$

(b)

Determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

$\det((B^t)^4) = \text{(viii)} = \det(B^4) = \text{(vi)} = \det(B).\det(B).\det(B).\det(B) = (-2)^4 = 16$

(c)

El determinante de 2B.

$2B = 2.(F_1, F_2, F_3) = (2F_1, 2F_2, 2F_3)$, luego

$det(B) = det(2F_1, 2F_2, 2F_3) = (ii) = 2.2.2.det(F_1, F_2, F_3) = 8.(-2) = -16,$

(d)

El determinante de la matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

$det(5F_1 - F_3, 3F_3, F_2) = (iii) = det(5F_1, 3F_3, F_2) + det(-F_3, 3F_3, F_2) = (ii\ y\ iv) =$

$= 5.3.det(F_1, F_3, F_2) + 0 = (i) = -15.\ det(F_1, F_2, F_3) = (-15).(-2) = 30.$

Propiedades utilizadas

(i) Si cambiamos entre sí dos filas el determinante cambia de signo.
(ii) Si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante.
(iii) Si una fila de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha fila el primer y segundo sumando respectivamente.
(iv) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales el determinante es cero
(v) Si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante como factor común, multiplicando al determinante.
(vi) El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto del los determinantes de dichas matices
(vii) El determinante de la matriz identidad vale 1.
(viii) El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Ejercicio 4 de la Opción A de Junio de 2009

[2'5 puntos] Se considera la recta "r" definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta "s" definida por $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a "r" y "s".

Solución

De la recta "r" Tomamos el punto A(1,1,-2) y el vector director **u** = (0,0,1)

De la recta "s" Tomamos el punto B(0,-1,-1) y el vector director **v** = (1,1,0)

Forma 1: Como intersección de dos planos

Un vector perpendicular **n** a ambas rectas es su producto vectorial (x), es decir

$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(0) = (-1,1,0)$

El plano π_1 contiene a la recta "r" y al vector **n.**

El plano π_2 contiene a la recta "s" y al vector **n.**

$\pi_1 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y-1)(1) + (z+2)(0) =$

$= -x - y + 2 = 0$

$\pi_2 = \det(\mathbf{BX}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x)(0) - (y+1)(0) + (z+1)(2) =$

$= 2z + 2 = 0$

La recta pedida "t" en forma implícita es

$x + y - 2 = 0$
$z + 1 = 0$

Forma 2: Calculando los puntos de intersección X e Y de la recta "t" con "r" y "s"

Un punto genérico de "r" es $X(1,1,\lambda-2)$

Un punto genérico de "s" es $Y(\mu, \mu -1,-1)$

Formamos el vector **XY** y le imponemos la condición de ser perpendicular a los vectores **u** y **v** (producto escalar 0)

$\mathbf{XY} = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1)$

$\mathbf{XY.u} = 0 = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1)\mathbf{.}(0,0,1) = - \lambda+1 = 0$, de donde $\lambda = 1$ y el punto es $X(1,1,-1)$

$\mathbf{XY.v} = 0 = (\mu -1, \mu -2,- \lambda+1)\mathbf{.}(1,1,0) = \mu -1 + \mu -2 = 2\mu - 3 = 0$, de donde $\mu = 3/2$ y y el punto es $Y(3/2,3/2 - 1,-1) = Y(3/2,1/2 ,-1)$

La recta pedida es la que tiene por punto X y como vector **XY** o alguno proporcional

$X(1,1,-1)$

$\mathbf{XY} = (3/2 -1, 3/2 -2,- 1+1) = (1/2, -1/2,0)$, uno proporcional es $(1,-1,0)$, la ecuación de la recta "t" perpendicular a ambas pedida, en paramétricas, es

$x = 1 + m$

y = 1 - m
z = -1, con "m" de R

Ejercicio 1 de la Opción B de Junio de 2009

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) [0'75 puntos] Estudia su continuidad y derivabilidad.
(b) [1'25 puntos] Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.
(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

(a)

Estudia su continuidad y derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1/(x-1) es continua y derivable en R-{1}, en particular en x < 0

$x^2 - 3x - 1$ es continua y derivable en R, en particular en x > 0

Falta estudiar continuidad y derivabilidad en x = 0

f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x)$

$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^2 - 3x - 1) = -1$.

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (1/(x-1)) = -1$.

Por tanto f(x) es continua en x = 0.

f(x) es derivable en x = 0 si $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} (-1/(x-1)^2) = -1$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} (2x - 3) = -3$, como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, no existe f'(0).

(b)

Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

Si x < 0, f(x) = 1/(x-1) cuya gráfica es una hipérbola, que no tiene ni máximos ni mínimo porque su 1ª derivada no se anula nunca, con una asíntota vertical en x = 1 (no está en su dominio) y una asíntota horizontal en y = 0 porque

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} [1/(x-1)] = 0$

Le damos unos cuantos valores

x	f(x) = 1/(x – 1)
0	-1
-1	-0'5
-2	-1/3

Si x > 0, f(x) = x^2 – 3x – 1 cuya gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba (el nº que multiplica a x^2 es > 0), que no tiene asíntotas y tiene un mínimo relativo (es el vértice de la parábola) que vamos a calcular

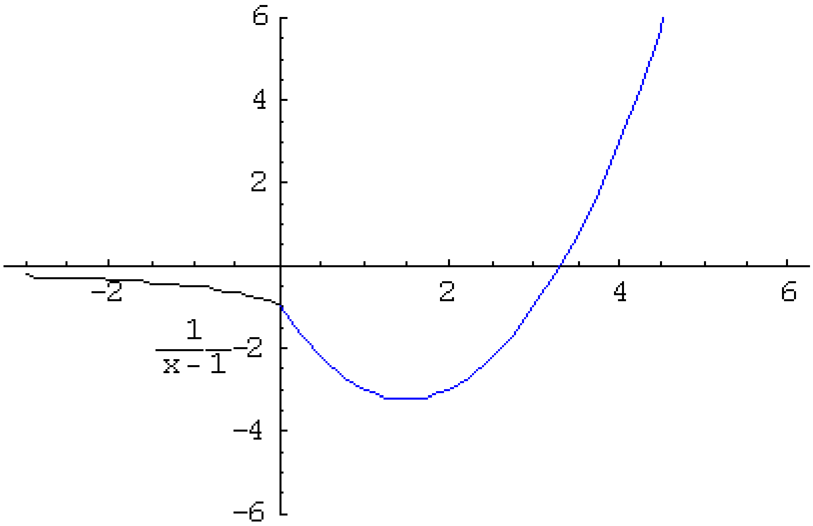
f(x) = x^2 – 3x – 1

f '(x) = 2x – 3, de donde 2x – 3 = 0 y x = 3/2 = 1'5, que es el mínimo porque f ''(x)=2>0, y vale f(3/2) = $(3/2)^2$ – 3(3/2) – 1 =
= 9/4 – 9/2 – 1 = -13/4 = -3'25
Le damos unos cuantos valores a izquierda y derecha del vértice

x	f(x) = x^2 – 3x – 1	
0	-1	
1	-3	
1'5	-3'25	Este es el vértice
2	-3	
3	-1	

(c)

Un esbozo de la gráfica es (el trozo de parábola en azul)



Ejercicio 2 de la Opción B de Junio de 2009

Considera la curva de ecuación y = x^3 - 3x.
(a) [0'5 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x=-1.
(b) [2 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta y = 2.

Solución

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$

$f(x) = x^3 - 3x$, luego $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$, luego $f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$

La recta tangente pedida es $y - 2 = 0.(x + 1)$, es decir $y = 2$

(b)

Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 3x$ y la recta $y=2$.

Como $y = 2$ es la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$, ya tenemos un límite de integración, que es -1.

Igualamos las dos funciones y obtenemos el otro

$f(x) = y$, es decir $x^3 - 3x = 2$, de donde $x^3 - 3x - 2 = 0$

Resolvemos $x^3 - 3x - 2 = 0$, y probamos por Ruffini con $x = -1$

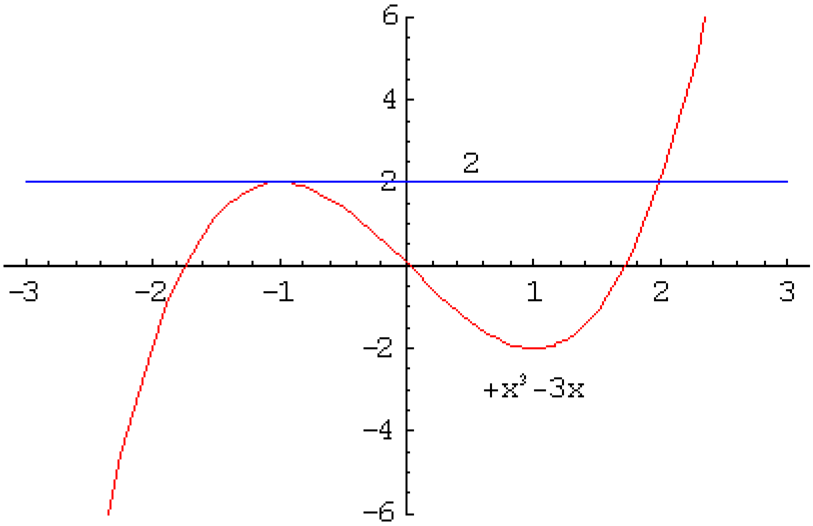
	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0

Tenemos $x = -1$ y $x^2 - x - 2 = 0$, que nos da como soluciones $x = -1$ y $x = 2$, por tanto el área pedida es

Área $= \left| \int_{-1}^{2} [2 - (x^3 - 3x)]dx \right| = \left| [\, 2x - x^4/4 + 3x^2/2 \,]_{-1}^{2} \right| =$

$= | (4 - 4 + 6) - (-2 - 1/4 + 3/2) | = | 8 + 1/4 - 3/2 | = | 27/4 | = 27/4\ u^2$

La gráfica no la piden no obstante la pondré, teniendo en cuenta que una es un cúbica y la otra una constante



Ejercicio 3 de la Opción B de Junio de 2009

[2'5 puntos] Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

Solución

x cajas de 30 euros
y cajas de 20 euros
z cajas de 40 euros

Relaciones

$x + y + z = 1500$

$30x + 20y + 40z = 40500$, dividiendo por 10 tenemos, $3x + 2y + 4z = 4050$

x = 30% de 1500 = (1500).(30/100) = **450**. Luego nos queda

$y + z = 1500 – 450 = 1050$

$2y + 4z = 4050- 3(450) = 2700$. $F_2 – 2F_1$, nos da $2z = 2700 – 2.(1050) = 600$, de donde

z = 300, y por tanto **y** = 1050 – 300 = **750**

Lo que piden es el dinero que ha pagado en cada mercado

En el **primer mercado han pagado** 30.x = 30(450) = **13500 euros**
En el **segundo mercado han pagado** 20.y = 20(750) = **15000 euros**
En el **tercer mercado han pagado** 40.x = 40(750) = **12000 euros**

Ejercicio 4 de la Opción B de Junio de 2009

Considera la recta "r" definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta "s" que pasa por los puntos A(2,1, 0) y B(1, 0, -1).
(a) [1 punto] Estudia la posición relativa de ambas rectas.
(b) [1'5 puntos] Determina un punto C de la recta "r" tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares.

Solución

(a)

Estudia la posición relativa de las rectas r" definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta "s" que pasa por los puntos A(2,1, 0) y B(1, 0, -1).

De la recta "r" tomo un punto un vector director

Punto hago **z = 0,** con lo cual **y = 0** y **x = 2**.

Punto M(2,0,0)
Vector **u** el producto vectorial (x) de los vectores normales de cada plano.

u = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1) – **j**(1) + **k**(1) = (1,-1,1)

De la recta "s" tomo un punto un vector director

Punto A(2,1, 0)
Vector **v** = **AB** = (-1, -1, -1).

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales las rectas "r" y "s" se cortan o se cruzan, para lo cual vemos si es cero o no el determinante det(**MA**,**u**,**v**). Si es 0 se cortan y si no es 0 se cruzan.

M(2,0,0), A(2,1, 0) de donde **MA** = (0,1,0)

det(**MA**,**u**,**v**) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ = (1)(-1)(-1 + 1) = 0, luego las rectas "r" y "s" se cortan.

(b)

Determina un punto C de la recta "r" tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares.

Un punto genérico de "r" es C(2+λ, -λ, λ), A(2,1, 0) y B(1, 0, -1).

CA = (-λ, 1+λ, -λ)
CB = (-1 - λ, λ, -1-λ)

Para que sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser 0

CA.CB = $(-\lambda,1+\lambda,-\lambda)\cdot(-1-\lambda,\lambda,-1-\lambda) = \lambda(1+\lambda)+\lambda(1+\lambda)+\lambda(1+\lambda) = 3\lambda(1+\lambda) = 0$, de donde se obtiene como soluciones $\boldsymbol{\lambda = 0}$ y $\boldsymbol{\lambda = -1}$. Hay dos puntos que lo cumplen.

Si $\boldsymbol{\lambda = 0}$ el punto es $\mathbf{C_1(2,0,0)}$
Si $\boldsymbol{\lambda = -1}$ el punto es $\mathbf{C_2(1,1,-1)}$