Relación de ejercicios sobrantes de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (Segundo de Bachillerato L.O.G.S.E.)

Nota: Esta relación de ejercicios la ha elaborado la Ponencia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II con los ejercicios propuestos sobrantes para que, si los correspondientes Departamentos lo consideran oportuno, hagan uso de ellos teniendo en cuenta en este caso que estos ejercicios son sobrantes bien por sobreabundancia de aportaciones o bien por ser considerados de dificultad inadecuada.

1. *Una empresa necesita transportar* $400\,m^3$ *de agua. Dispone de* 8 *camiones con* $40\,m^3$ *de capacidad de carga y* 10 *con* $50\,m^3$*, pero sólo dispone de 9 conductores. El desplazamiento de un camión grande cuesta* 40000 *pts. y el de uno pequeño cuesta* 30000 *pts.*

   (a) *Exprese la función objetivo y las restricciones del problema.*

   (b) *Represente gráficamente el recinto definido.*

   (c) *¿Cuántos camiones de cada tipo tendrán que alquilarse para que el transporte resulte lo mas económico posible? ¿Cuánto costará dicho transporte?*

2.

   (a) *Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema:*
   "Los sueldos del padre, la madre y un hijo, suman 420000 *pts. La madre gana el mismo sueldo que el padre, pero el* 60% *más que el hijo. Se trata de calcular Cuánto gana cada uno.*

   (b) *Resuelva el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & y & + & 2z & = & -2 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. *Una compañía aérea pretende diseñar la distribución de las plazas de un nuevo modelo de avión, repartiendo los* $72\,m^2$ *de superficie útil de la nave entre plazas de clases Preferente y Turista. La normativa vigente obliga a incluir un mínimo de 9 plazas de Preferente y 30 de Turista; además, por razones de seguridad, el número de pasajeros no debe exceder al número de metros cuadrados de la superficie útil. Cada plaza Preferente ocupa* $1.5\,m^2$ *y produce un beneficio anual de 850 euros, mientras que cada plaza Turista ocupa* $0.9\,m^2$ *y produce un beneficio de 650 euros.*

   (a) *Plantee el problema dibujando la región factible y hallando sus vértices.*

   (b) *Encuentre la distribución de plazas más rentable para la compañía.*

4. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   (a) *Calcule* $A \times A^t$. *(Recuerde que* $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$*)*

   (b) *Deduzca que* A *tiene inversa y calcúlela.*

   (c) *Calcule* A^2 *para* $\alpha = \frac{\pi}{4}$. *(Recuerde que* $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$*)*

5. *Una fábrica de juguetes produce dos tipos de camiones de juguete: normal y de lujo. En la fabricación de un modelo normal se emplean dos horas para armarlo y dos horas más para el acabado. Para los modelos de lujo se emplean dos horas para armarlo y cuatro horas más para el acabado. La fábrica tiene 2 máquinas para armar y 3 máquinas para acabar, cada una de las cuales dispone de 40 horas por semana. Se obtienen ganancias de 300 pts. en cada modelo normal y de 400 pts. en cada modelo de lujo. Suponiendo que se venden todos los modelos fabricados, ¿cuántos camiones de cada modelo se deben fabricar a la semana para hacer máximas las ganancias?*

6. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1+y \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & 3y \\ 1 & -1-x \end{pmatrix}$$

   Al multiplicar convenientemente dos de ellas e igualar el producto a la matriz restante se obtienen las ecuaciones de tres rectas.
   Estudie la posición relativa de estas rectas, dos a dos.

7. *Los precios en miles de pesetas de los artículos* a, b *y* c *en dos comercios* 1 *y* 2 *se indican respectivamente en la primera y segunda fila de la matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *La matriz* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *significa que se compran dos artículos* a, *uno* b *y tres* c *en un mismo comercio.*
Calcule las matrices $G = P \times C^t$ *y* $H = C \times P^t$ *e interpreta el significado de los elementos de* G *y* H.

(b) *Determine las dimensiones que debe tener una matriz* M *para que la matriz* $M \times P$ *sea cuadrada y discute razonadamente si puede definirse el producto* $C \times M \times P$

8. *En una mesa de una cafetería se sirvieron* 4 *cafés,* 2 *refrescos y* 1 *té, cobrando por ello* $745\,pts$. *En otra mesa se pagaron* $865\,pts$. *por* 3 *cafés,* 3 *refrescos y* 2 *tés. En la barra, donde el precio es un* 10% *más barato, tres amigos tomaron un café, un refresco y un té, pagando por ello* $298\,pts$. *¿Qué cuesta cada bebida?*

9. *Sea la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcule la matriz inversa* A^{-1}.

(b) *Determine si existen valores de* a *y* b *tales que* $A^{-1} = aI + bA$ *donde* I *es la matriz unidad de orden* 3 *y hállense en su caso.*

10.

(a) *Encuentre* 3 *números* x, y, z *no nulos, tales que la matriz* $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ *coincida con su inversa y calcule* A^{10}.

(b) *Determine las posiciones en el plano de las rectas*

$$r:\ 3x + y = 2\ ; \qquad s:\ x - 3y = 0\ ; \qquad t:\ 2x - y = 1.$$

11.

(a) *Forme un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga como solución* $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

(b) *Clasifique el sistema anterior.*

(c) *Forme un sistema homogéneo que admita como solución* $x = 2,\ y = -1,$ $z = 3$.

12. *Un individuo va a comprar a la ferretería 2 bolsas de tacos, 4 cajas de tornillos y 1 bote de pegamento, y en caja paga por todo* $240\,pts$. *Otro cliente compra una bolsa de tacos y 2 cajas de tornillos pero devuelve un bote de pegamento, por lo que paga* $90\,pts$. *Un tercer cliente va a comprar 3 bolsas de tacos y devuelve 2 botes de pegamento, por lo que paga* $50\,pts$. *¿Cuánto vale cada bolsa de tacos, cada caja de tornillos y cada bote de pegamento?*

13. *Dado el sistema de ecuaciones* E_1 , E_2 , E_3 , E_4 *siguiente*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} & - & 3y & + & 3z & - & t & = & -8 & E_1 \\ & & y & - & 3z & + & t & = & 4 & E_2 \\ x & - & 2y & + & 2z & - & t & = & 3 & E_3 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 14 & E_4 \end{array}\right.$$

se pide:

(a) *Obtenga otro equivalente en el que la tercera ecuación sea* $2E_3 - E_1$.

(b) *Clasifique el sistema según sus soluciones.*

14. *Un señor desea invertir* 1000000 *de euros en tres productos* A, B , C *a un interés del* 4%, 5% *y* 3% *anual, respectivamente. Al cabo de un año le produce una ganancia de* 43000 *euros. Si la cantidad invertida en* B *es igual a la suma de las cantidades invertidas en* A *y* C *juntas, obtenga el sistema de ecuaciones resultante.*

15. *El siguiente sistema es compatible indeterminado*

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -2 \end{array}\right.$$

(a) *Modifique razonadamente una ecuación para que el sistema resultante sea incompatible.*

(b) *Modifique razonadamente una ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.*

16.

(a) *Halle el valor de* m *para que la derivada de la función* $f(x) = \frac{2x^2+mx-1}{3x+m}$ *valga* 4 *para* $x = 0$.

(b) *Halle los intervalos de crecimiento de la función* $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

17. *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) *Represéntela gráficamente, indicando las asíntotas si las hay.*

(b) *Razone si en la gráfica del apartado anterior existe algún punto en el que la recta tangente sea paralela a la recta* $y = x + 3$ *y, en su caso, obtenga las coordenadas.*

18. *Sea la función* $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

(a) *Halle los valores de* x *para los que* f *es cóncava.*

(b) *Dibuje la gráfica de la función.*

(c) *Sea* $g(x) = f(x) + k$ *¿Cuánto debe valer* k *para que la gráfica de* g *corte en un sólo punto al eje de abscisas? Lo mismo para dos puntos.*

19. *Un euro (e) equivale aproximadamente a* 165 *pesetas (p)*

(a) *Exprese analíticamente la función que transforma euros en pesetas* ($p = f(e)$.)

(b) *Lo mismo para transformar pesetas en euros* ($e = g(p)$.)

(c) *Use la función adecuada para determinar cuántos euros son* 1000 *pesetas.*

20. *Dada la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por la expresión:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1 & x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 4 & x > 2 \end{cases}$$

(a) *Represéntela gráficamente.*

(b) *Calcule los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos de la función.*

(c) *¿Es continua la función en* $x = 2$*? Justifique la respuesta.*

21. *De una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por la expresión* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *se sabe que tiene un extremo relativo en el punto* $(1, 4)$ *y que la ecuación de la tangente a su gráfica en el punto de abscisa* $x = 3$ *es* $y = 4x - 4$.

(a) *Determine el valor que toma* f *en* $x = 3$ *y los valores que toma la función derivada de* f *en* $x = 3$ *y* $x = 1$.

(b) *Explique razonadamente si* $(1, 4)$ *es un máximo o un mínimo de* f.

(c) *Calcule los coeficientes* a, b, c *del polinomio de segundo grado que define la función* f.

22. *Sea la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por la expresión*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x < 3 \\ \ln\left(\frac{x}{3}\right) & x \geq 3 \end{cases}$$

(a) *Estudie su continuidad*

(b) *Represente gráficamente* f.

(c) *Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva en* $x = 5$.

23. *En un laboratorio se está ensayando con* 15 *ratones blancos y* 15 *grises en tres jaulas. En la primera jaula hay* 3 *grises y* 7 *blancos, en la segunda* 5 *de cada color y en la tercera el resto.*

Desde el exterior se ha oído como se rompía una de estas jaulas, sin saber cuál ha sido, pero por un hueco de la puerta se ha visto escapar un ratón blanco.

(a) ¿De qué jaula es más probable que se haya escapado?

(b) Calcula la probabilidad de que la jaula rota haya sido la segunda.

24. *En un espacio muestral dado se consideran tres sucesos A, B, C de forma que su unión es el suceso seguro y son incompatibles dos a dos, es decir, forman un sistema completo de sucesos.*

(a) Si $p(A) = \frac{1}{6}$ y $p(B) = \frac{1}{3}$ obtenga $p\Big(A \cup B)\Big/(B \cup C)\Big)$

(b) Sabiendo que $p(A) = \frac{1}{2}$ y que $p\Big(A \cup B)\Big/(B \cup C)\Big) = \frac{1}{2}$ halle $p(B)$ y $p(C)$.

25. *En la puerta de un garaje se encuentran en fila 9 coches que han ido llegando aleatoriamente y esperan entrar para ocupar las plazas de aparcamiento vacantes que haya. En la fila hay coches de dos tipos: pequeños y grandes (estos pagan más por aparcar). El número de coches pequeños en la cola duplica al de grandes. El aparcamiento dispone sólo de 5 plazas pequeñas y de 3 grandes. Los coches grandes sólo caben en las plazas grandes. El encargado permite, aunque de mal humor, aparcar a los coches pequeños en las plazas grandes, pero sólo cuando todas las plazas pequeñas están ocupadas. Calcule la probabilidad de que el encargado quede malhumorado después de que hayan aparcado los coches que quepan.*

26. *Tenemos dos dados; el primero tiene cuatro caras numeradas del 1 al 4, el segundo tiene 8 caras numeradas del 1 al 8. Se realiza el experimento que consiste en lanzar estos dos dados y anotar la suma de las caras superiores.*

(a) Escriba el espacio muestral y calcule la probabilidad de todos los sucesos elementales de ese espacio muestral.

(b) Si sabemos que la suma es par, calcule la probabilidad de que el primer dado haya salido un 4.

27. *Para acceder a un archivo de un ordenador debe introducirse una clave con tres letras distintas en un orden fijado.*

El hijo pequeño del usuario del ordenador ha encontrado las tres letras y las ha introducido al azar en el ordenador

(a) *Determine la probabilidad de que el niño consiga acceder al archivo.*

(b) *Calcule la probabilidad de que una sola de las letras introducidas por el niño esté en su lugar.*

28. *En una clase se forman 3 grupos de trabajo* A, B, C. *El grupo* A *consta de 5 mujeres, el grupo* B *de 2 mujeres y 4 hombres y el grupo* C *de 3 mujeres y 4 hombres. Se elige al azar un grupo y de él se elige una persona. Determine:*

(a) *Probabilidad de que la persona elegida sea mujer.*

(b) *Supongamos que la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del grupo* A*?*

29. *En la experiencia aleatoria correspondiente al lanzamiento de un dado cuyas caras están numeradas de* 1 *a* 6, *se consideran los sucesos siguientes:* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, $C = \{3, 5\}$. *Determina los sucesos:*

(a) $X = A \cup B \cup \overline{C}$

(b) $Y = (A \cap \overline{B}) \cup C$

(c) $Z = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap B \cap C)$

(d) *¿Qué puede decirse de los sucesos:* $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ *y* $\overline{A} \cap B \cap C$*?*

30. *Un Centro Comercial tiene tres departamentos: pescadería, carnicería y bazar. En cada uno de ellos la proporción de mujeres es, respectivamente,* $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$. *Se consideran los dos sucesos siguientes:*
$M_1 =$ *"elegido al azar un empleado del Centro Comercial resulta ser mujer."*
$M_2 =$ *"elegido al azar un empleado del Bazar del Centro Comercial resulta ser mujer."*

(a) *Calcule* $P(M_1)$.

(b) *¿Son independientes los sucesos* M_1 *y* M_2*?*

31. *En un determinado instituto, el* 68% *de los alumnos son estudiantes de E.S.O. y el resto de Bachillerato.*

Para ir a clase, el 12% *de los alumnos de E.S.O. y el* 35% *de los de Bachillerato utilizan algún tipo de transporte, mientras que el resto va andando.*

Si tomamos al azar un alumno del centro se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya venido andando?

(b) Si el centro tiene 500 estudiantes, ¿cuántos alumnos de Bachillerato vienen andando?

32. Se ha podido comprobar que el tiempo ante la televisión de los niños entre dos y cinco años es una variable aleatoria con desviación típica 1.5 horas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 64 niños, obteniéndose un tiempo promedio de 2.2 horas.

(a) Construya un intervalo de confianza para el tiempo medio ante la televisión de estos niños con un nivel de confianza del 95%.

(b) ¿Cuál debería haber sido el tamaño de la muestra para no cometer un error en la estimación superior a 15 minutos, supuesto el mismo nivel de confianza?

33. Sabemos que el peso de los jóvenes españoles es una variable aleatoria que sigue una Ley Normal cuya varianza σ^2 es conocida, y queremos hacer un intervalo de confianza para estimar el peso medio de los jóvenes españoles. Razone como afecta a la amplitud del intervalo el hecho de que sean grandes o pequeños los siguientes aspectos.

(a) El tamaño de la muestra elegida para hacer el intervalo.

(b) El nivel de confianza elegido para hacer el intervalo.

(c) El valor de σ^2.

(d) La variabilidad del peso de los jóvenes españoles.

34. En la fabricación de una pieza intervienen dos máquinas: la máquina A produce una pieza cilíndrica y la máquina B secciona las piezas con una longitud determinada. Ambos procesos son independientes.
El diámetro (en mm) de la pieza producida en A se distribuye según una normal $N(23; 0.5)$ y la longitud producida por B se distribuye según un normal $N(11.5; 0.4)$.

(a) Calcule que porcentaje de piezas tienen un diámetro entre 22 y 23.5 mm.

(b) Encuentre el porcentaje de piezas que tienen una longitud entre 11 y 12.2 mm.

(c) Suponiendo que sólo podemos aceptar las piezas cuyas medidas están en los apartados anteriores, calcule que porcentaje de piezas aceptables se consiguen.

35. Las temperaturas máximas diarias observadas durante el mes de Junio en una estación meteorológica pueden representarse por una variable aleatoria que sigue una Ley Normal cuya desviación típica es $\sigma = 3^0\,C$.

(a) Si se anotan las temperaturas máximas de 20 días de Junio y se encuentra una media de $25^0\,C$, determine el intervalo de confianza del 95% de de la media muestral de la citada Ley Normal.

(b) Calcule el mínimo tamaño muestral que debe tomarse para construir un intervalo de confianza al 97.5% para la media de esta ley con un error inferior a $2^0\,C$.

36. Se quiere construir un intervalo de confianza para el precio medio de un artículo de consumo diario en los comercios de cierta ciudad.

Para ello se toma una muestra de más de 30 comercios para observar en ellos los precios de ese artículo.

Si estos precios siguen una distribución de probabilidad de varianza $64\,pts^2$, calcule el mínimo número de comercios que deben observarse para que el error de un intervalo de confianza del 97.5% para el precio medio no supere las 3 pts.

37. Un fabricante de baterías de automóviles sabe que la vida de éstas sigue una ley normal y quiere informar sobre el promedio de vida en meses para sus baterías. Si elegida una muestra de seis de estas se tienen las siguientes duraciones (en meses):

$$33 \qquad 44 \qquad 37 \qquad 31 \qquad 39 \qquad 42$$

(a) Determine un intervalo de confianza del 95% para dicho promedio de vida en meses.

(b) Suponiendo que la duración de estas baterías tiene una desviación típica conocida $\sigma = 5$ meses. Indique si es válida la afirmación del fabricante: "Mis baterías duran 42 meses".

38. *En* 10 *talleres elegidos al azar se ha pedido presupuesto para efectuar una cierta revisión a un mismo automóvil, obteniéndose los siguientes precios en euros:*

$$160.25 \ ; \ 162.15 \ ; \ 158.75 \ ; \ 169.50 \ ; \ 170.10$$

$$165.20 \ ; \ 172.35 \ ; \ 175.00 \ ; \ 168.30 \ ; \ 167.10$$

Si tales precios pueden representarse por una variable aleatoria que sigue una ley normal de varianza $\sigma^2 = 25\,\varepsilon^2$, *determine cuáles están incluidos en el intervalo de confianza de nivel* 95% *que se obtiene con esta muestra para la citada ley normal.*

39. *De una población normal con varianza* 9, *se ha tomado una muestra y para dicha muestra, el intervalo* $(66.465\,,\,67.935)$ *representa un intervalo de confianza al* 95% *para la media.*

(a) *Determine la media muestral y el tamaño de dicha muestra.*

(b) *Construya un intervalo de confianza al* 99% *para la media.*