

RELACIÓN DE EJERCICIOS SOBANTES DE MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (Segundo Bachillerato L.O.G.S.E.)

Ponencia Andaluza, Febrero 2002.

Nota: Esta relación de ejercicios la ha elaborado la Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II con los ejercicios propuestos sobrantes, para que, si los correspondientes Departamentos lo estiman oportuno, hagan uso de ellos. Se debe tener en cuenta, en este caso, que estos ejercicios son sobrantes bien por sobreabundancia de aportaciones o bien por ser considerados de dificultad inadecuada.

RELACIÓN DE EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS 2001-02.

1. Dado el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \geq -8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Determine el conjunto de sus soluciones.
- Obtenga en ese conjunto de soluciones el máximo y el mínimo, si existen, para la función lineal $f(x, y) = y + 3x$.
- Añada una nueva inecuación al sistema para que el conjunto de soluciones sea acotado.

2. Dados a y b , números reales cualesquiera, se definen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule $A \cdot B$.
- ¿Qué relación debe existir entre a y b para que A y B sean inversas?
- Calcule A^{2002} .

3. Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = A^t.$$

- Calcule $(A + B) \cdot (A - B)$.
- Calcule $A^2 - B^2$.
- Determine los valores de x , si existen, para los que las matrices calculadas en los apartados anteriores coincidan.

4. Las matrices A y B verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^t - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

- Calcule $(A + B) \cdot (A - B)$, A y B .
- Calcule $(A + B)^{25}$ y $(A^t - B^t)^{100}$.

5.

- Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

Dos hijos deciden hacer un regalo a su madre que cuesta 100 €; para ello cuentan con la colaboración del padre. Como todos no disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: *El padre paga el triple de lo que pagan juntos los dos hijos, y por cada 2 € que paga el hermano pequeño, el mayor paga 3 €*. Se desea saber cuanto tendrá que poner cada uno.

b) Clasifique y resuelva, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ y + z = 5 \\ x - y + z = -2 \end{array} \right\}$$

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Tiene inversa? Justifique la respuesta.

b) Calcule la matriz A^2 . ¿Tiene alguna relación con la matriz A ?

c) Calcule todas las matrices de orden dos, no nulas, de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, verificando que $X^2 = X$.

7.

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, clasificándolo según el número de soluciones:

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y - z = 6 \\ 2x + y + 3z = -3 \\ 3x - 11y - 8z = 33 \end{array} \right\}$$

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A - B = C$, siendo A, B, C las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule A^2 , A^3 y A^4 .
- b) Usando los resultados del apartado anterior determine A^{-1} .
- c) Usando los resultados del apartado a) calcule A^{2002} .

9. Sea la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde x indica un número real.

- a) Calcule el valor o valores de x para los que A no tiene inversa.
- b) Para $x = 1$ determine A^{-1} y calcule $(A \cdot A^t)^{2002}$.
- c) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial:
 $A \cdot X \cdot A = 2 \cdot A$.

10.

- a) Resuelva y clasifique el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

- b) Añada una ecuación al sistema anterior de forma que el sistema obtenido sea incompatible.

11. Determine las edades actuales de tres hermanos sabiendo que juntas suman 34 años, que hace 4 años el mayor de los hermanos tenía dos años más que los otros dos juntos y que dentro de dos años la edad del más pequeño será la tercera parte de la de sus dos hermanos juntas.

12. Se define la matriz escalar de orden tres

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

con k número real no nulo.

- a) Determine la matriz escalar E de orden tres tal que $|E|=8$.
- b) Compruebe si $E^2 = Adj(E)$, siendo $Adj(E)$ la matriz adjunta de la matriz E .
- c) Compruebe si una matriz escalar de orden dos y $k=3$ verifica la propiedad conmutativa del producto de matrices con cualquier otra de orden dos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

13. Optimice $F(x, y) = x - y$ en la siguiente región factible:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x - y \geq -2 \\ x + y \geq 3 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

14. Optimice $F(x, y) = -2x - 2y$ en la siguiente región factible:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq 4 \\ x + y \geq 5 \\ x \leq 4 \end{array} \right\}$$

15. Un restaurante abre a las 9 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han marchado. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes en función del número de horas que lleva abierto el establecimiento.

- a) Determine el número máximo de clientes que va una determinada noche al restaurante.
- b) Si deseamos ir cuando haya más de 50 personas y menos de 80, ¿entre que horas debemos hacerlo?
- c) ¿A que hora cierra el restaurante?

16. La temperatura en grados centígrados a lo largo de una varilla de 4cm de longitud, viene dada por

$$T(x) = 25 + 0.02e^{2x(3-x)}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

- Halle en que puntos se alcanza la temperatura máxima y mínima.
- Calcule en que puntos del interior de la varilla, la tasa de variación de la temperatura es máxima.
- Halle los puntos donde se alcanzan $26^\circ C$ de temperatura. (Indicación: Aproxime $L 10$ por 2.3).

17. Una empresa dedicada a la fabricación de material fotográfico oferta una máquina de revelado garantizando que en el momento de su compra es capaz de pasar a papel 13 fotografías por minuto.

Sus cualidades se van deteriorando con el paso del tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto que es capaz de revelar varía en función del número de años transcurridos desde su compra según la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -0.5x + 13 & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ \frac{5(x+14)}{x+4} & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

- Compruebe que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina.
- Justifique que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto, y que no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea la máquina.

18. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x^2 + x \geq x^3 + 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x^2 + x < x^3 + 1 \end{cases}$$

- Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.
- Halle la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que pasa por el punto $(1, 2)$.
- Represente gráficamente la función.

19. Siendo $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la función dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3a & \text{si } x < 0 \\ bx^2 + 3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Calcule a y b para que la función sea continua en todo \mathbf{R} .
- Represente la gráfica de esta función para $a = 2$ y $b = 0$.
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función del apartado b) en el punto de abscisa $x = 5$.

20.

- Halle una función polinómica de tercer grado

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que presenta sus extremos relativos en el origen de coordenadas y en el punto (1, 1).

- Sea

$$g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$$

una función derivable, cuya derivada es $g'(x) = Lx \quad \forall x > 0$.

Calcule los valores para los que la función g presenta extremos relativos y los intervalos de crecimiento – decrecimiento.

21. Se desea construir una caja metálica cerrada con forma paralelepípedica y base cuadrada.

El precio del material de las bases es $50 \text{ pts}/m^2$ y el de las caras laterales $80 \text{ pts}/m^2$.

Sabiendo que el volumen de la caja es $100m^3$ calcule las dimensiones (x : lado de la base, y : altura) para que el coste del material empleado sea mínimo, es decir, se trata de minimizar $50.2x^2 + 80.4xy$.

22. De una encuesta realizada en un I.E.S. se deduce que el 60% de sus estudiantes son asiduos espectadores del programa *Al salir de clase*, y entre éstos, el 80% son chicas. Se conoce que el porcentaje de chicas que está estudiando en ese Centro es 58%.

- a) Cual es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea asiduo espectador del citado programa.
- b) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica y asidua espectadora?
- c) Si se elige al azar un estudiante entre las chicas, ¿cuál es la probabilidad de que sea asidua espectadora del programa?

23. Para entrar en su nuevo piso, una persona tiene que abrir sucesivamente tres puertas con llaves distintas, pero ha olvidado qué llave abre cada puerta, por lo que va probándolas al azar hasta que consigue abrirlas todas.

- a) Dibuje un diagrama que describa cuántas pruebas puede necesitar para abrir las tres puertas.
- b) Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

A : “abrir la segunda puerta en la tercera prueba”.

B : “abrir las tres puertas antes de la quinta prueba”.

24.

- a) Se lanzan 10 dados cúbicos al aire. Determine la probabilidad de obtener al menos un cinco.
- b) Se lanzan 4 monedas al aire. Determine la probabilidad de obtener distinto número de caras que de cruces.

25. Don Nicanor vive en una ciudad donde está nublado un 60% de los días y soleado el resto. Cuando está nublado, Don Nicanor coge el paraguas un 95% de las veces, y lo hace solo el 3% de los días en los que hace sol. Si escogemos un día al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Nicanor no haya cogido el paraguas ese día?
- b) Sabemos que ha cogido el paraguas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté nublado?

26. Dado un espacio muestral Ω se consideran los sucesos A , B y C de forma que

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

Sabiendo que los tres sucesos son mutuamente independientes:

- a) Calcule $P(A \cup B)$.
- b) Calcule $P(B \cup C^c)$
- c) Calcule la probabilidad de que ocurran exclusivamente dos de los tres sucesos.

27. Si $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B) = 0.6$, calcule $P\left[\left(A \cap B\right) \cup \left(A^c \cap B^c\right)\right]^c$.

28. Sea X la variable aleatoria que mide el peso de un pájaro adulto. La media de X es 109 g y la desviación típica 5 g.

Si escogemos una muestra aleatoria de 100 individuos de esta población, determine la probabilidad de que la suma de los pesos de los 100 individuos sea menor de 11 kilogramos.

29. La estatura de 1000 soldados sigue una distribución Normal de media 175 cm y desviación típica 6.7 cm.

- a) ¿Cuántos soldados tendrán una estatura comprendida entre 170 cm y 182 cm?
- b) ¿Cuánto miden el más pequeño y el más alto?

30. La vida útil de un ordenador sigue una distribución Normal con desviación típica de 3 meses. Se toma una muestra formada por 25 ordenadores.

- a) Calcule la probabilidad de que la media muestral tome valores que disten de la media más de un mes.
- b) Halle la longitud del intervalo de confianza centrado en la media, al 95% .

31. La estatura de una población femenina se distribuye Normalmente con media 1.68 m y desviación típica 0.08 m. Una fábrica de confecciones está interesada en la distribución de las tallas, por ello desea saber:

- a) El porcentaje de mujeres cuya estatura está comprendida entre 1.66 m y 1.70 m.
- b) El porcentaje de mujeres cuya estatura media es superior a 1.70 m, en una muestra de 100 de ellas.

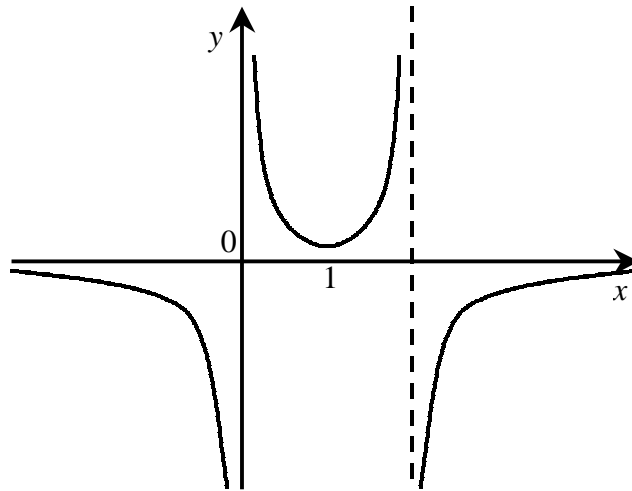
32. Un agricultor vende una determinada hortaliza con un peso medio de 81 g y una desviación típica de 15 g.

- Halle la probabilidad de que una muestra de 100 hortalizas tenga un peso inferior a 7.8 Kg.
- Se sabe que el 80% de los lotes de hortalizas que vende ese agricultor supera cierto peso. ¿Cuál es ese peso?

33. Opt. $F(x, y) = 5x + 4y$ en la siguiente región factible:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x - y \geq -2, x + y \geq 3\}$$

34. La gráfica siguiente representa una función f :



- A la vista de la gráfica, estudie la monotonía de f . Razone cuáles serían sus puntos de inflexión.
- Se sabe que f es una de las tres funciones siguientes:

$$f_1(x) = \frac{4}{x(x-2)}; f_2(x) = \frac{-4}{x(x-2)}; f_3(x) = x(x-2).$$

Diga, razonadamente, cuál de ellas es.