

Apuntes de Trigonometría Elemental

José Antonio Salgueiro González

IES Bajo Guadalquivir - Lebrija

Agradecimientos

A Rocío, que con su apoyo hace posible la realización de este proyecto

Índice general

Agradecimientos	1
1. Introducción a la Trigonometría	5
1.1. Ángulos y medidas	5
1.2. Razones trigonométricas	9
1.2.1. Razones trigonométricas de 45°	10
1.2.2. Razones trigonométricas de 30° y 60°	11

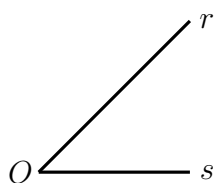
Capítulo 1

Introducción a la Trigonometría

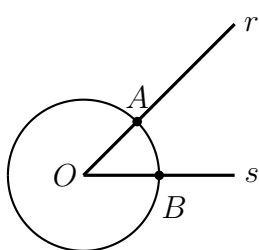
La palabra *Trigonometría* procede de las voces griegas *tri-gonon-metron*, que significa “medida de tres ángulos”. El objetivo prioritario de esta rama de las Matemáticas es el estudio de las medidas de los ángulos y lados de los triángulos.

1.1. Ángulos y medidas

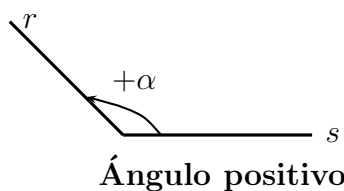
Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas, r y s , con un origen común O .



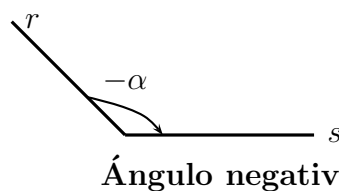
Las semirrectas r y s son los *lados* de ambos ángulos y O el *vértice*.



Tracemos una circunferencia con centro en O y radio arbitrario. Se determinan dos puntos, A y B , sobre r y s , respectivamente. A partir del punto A se puede llegar al B siguiendo la circunferencia de dos maneras. Fijaremos el siguiente convenio: si el recorrido se hace en forma contraria al seguido por las agujas de un reloj, diremos que el ángulo está **orientado positivamente**. En caso contrario, diremos que está **orientado negativamente**.



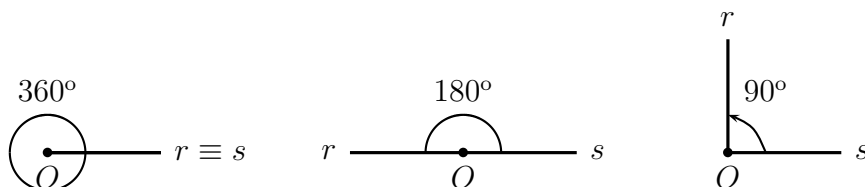
Ángulo positivo



Ángulo negativo

Existen varias formas de medir ángulos, que dependen del valor que se le asigne a un **ángulo completo** o **giro**.

Sistema sexagesimal Un grado sexagesimal es cada una de las 360 partes iguales en las que se divide una circunferencia, mediante sectores circulares iguales. De esta forma, una circunferencia abarca un ángulo de 360° . El ángulo definido por media circunferencia se llama **llano**, y medirá 180° . La mitad de un llano se llama **recto** y mide 90° .



Ángulo completo

Ángulo llano

Ángulo recto

Los ángulos menores que un recto se llaman **agudos** y los mayores **obtusos**.

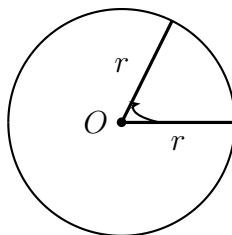
Dos ángulos son **complementarios** si suman un recto, y **suplementarios** cuando suman un llano. Por ejemplo, los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo son complementarios.

De igual forma, un grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales llamadas **minutos** ($1^\circ = 60'$), y cada minuto, a su vez, se divide en otras 60 partes iguales, que se llaman **segundos** ($1' = 60''$).

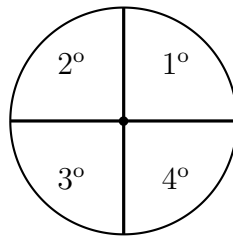
Por último, el **tamaño de los ángulos** no depende de la longitud de sus lados, sino de su mayor o menor abertura.

Sistema centesimal Si un ángulo completo se divide en 400 partes iguales, cada una de ellas es un **grado centesimal o gradián** (1^g). Cada grado centesimal es igual a 100^m centesimales, y cada minuto es igual a 100 segundos centesimales, 100^s . Por eso, deberíamos decir que un ángulo recto es la cuarta parte de un giro, pues valdrá 90^g o 100^g . Los grados centesimales se usan, sobre todo, en *Topografía*.

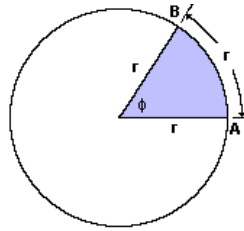
Radianes Se llama **ángulo central** el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios.



Si el ángulo central es recto, recibe el nombre de **cuadrante**. Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro cuadrantes.



Se define el **radián** como la medida del ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.



Puedes usar un transportador o semicírculo graduado para determinar de forma aproximada el valor de este ángulo en grados sexagesimales.

Ejercicio 1 En una circunferencia de 4 cm de radio, un ángulo α_1 abarca un arco de 5 cm. Otro ángulo, α_2 , abarca un arco de 2 cm. ¿Cuánto miden α_1 y α_2 en radianes?

Generalizando, si en una circunferencia de r unidades de radio, un ángulo, α , abarca un arco de longitud l , su medida en radianes se obtiene fácilmente mediante la siguiente proporción:

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow 1 \text{ rad} \\ l &\longrightarrow \alpha \text{ rad} \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Ejercicio 2 Dibuja en la circunferencia anterior un ángulo de 2 rad.

Resulta evidente la forma de dibujar 3 rad, 4 rad, etc. Pero, ¿cuántos radianes habrá que dibujar para completar la circunferencia?.

Como la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$, entonces:

$$\text{Ángulo completo} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi \simeq 6'28 \text{ rad}$$

¿Qué pasaría si la circunferencia fuera de radio 5,6,7 cm,...? Supongamos que la circunferencia es de radio r , como $L = 2\pi r$, entonces en ella caben $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$. Es decir, no depende del radio o tamaño de la circunferencia. Tenemos, por tanto, la siguiente equivalencia:

$$360^\circ = \text{Ángulo completo} = 2\pi \text{ rad} \simeq 6'28 \text{ rad}$$

que nos permite obtener la medida de cualquier ángulo conociendo su magnitud en grados sexagesimales, y recíprocamente.

Se acostumbra a expresar en función de π los ángulos en radianes, de manera que:

$$\text{Ángulo llano} = 180^\circ = \frac{360^\circ}{2} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2} = \pi \text{ rad}$$

$$\text{Ángulo recto} = 90^\circ = \frac{180^\circ}{2} = \frac{\pi \text{ rad}}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Ejercicio 3 Expresa en radianes los ángulos de 0° , 30° , 45° y 60° .

Ejercicio 4 Expresa en radianes los siguientes ángulos: 135° , 150° , 240° , 270° , 300° , 495° .

El proceso inverso se realiza mentalmente, teniendo en cuenta que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} \text{ rad} &= \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \\ \frac{5\pi}{4} \text{ rad} &= 5 \cdot \frac{180^\circ}{4} = 5 \cdot 45^\circ = 225^\circ \\ \frac{7\pi}{6} \text{ rad} &= 7 \cdot \frac{180^\circ}{6} = 7 \cdot 30^\circ = 210^\circ \\ \frac{9\pi}{2} \text{ rad} &= 9 \cdot \frac{180^\circ}{2} = 9 \cdot 90^\circ = 810^\circ \end{aligned}$$

Ejercicio 5 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos: $\frac{3\pi}{10} \text{ rad}$, $\frac{\pi}{8} \text{ rad}$, $12\pi \text{ rad}$, $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$, $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$, $\frac{\pi}{16} \text{ rad}$.

Ejercicio 6 Obtener en grados sexagesimales la medida de 1 rad .

Ejercicio 7 Obtener en radianes la medida de 1° .

Ejercicio 8 Pasar de grados sexagesimales a radianes o viceversa: $0'735 \text{ rad}$, 2 rad , $0'83 \text{ rad}$, 6 rad , $45^\circ 20'$, $59^\circ 4' 30''$, $63^\circ 25' 48''$.

1.2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Comenzamos esta sección recordando que los triángulos se pueden clasificar según sus lados y según sus ángulos, tal como se refleja en la tabla siguiente:

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS			
Según sus lados		Según sus ángulos	
Equilátero	Tres lados iguales	Acutángulo	Tres ángulos agudos
Isósceles	Dos lados iguales	Rectángulo	Un ángulo recto
Escaleno	Tres lados desiguales	Obtusángulo	Un ángulo obtuso

En un triángulo rectángulo, el ángulo recto se expresa con la letra A mayúscula, y los ángulos agudos se expresan con las letras B y C . El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los restantes lados *catetos*. Los lados se representan con las mismas letras que sus ángulos opuestos, pero en minúsculas.

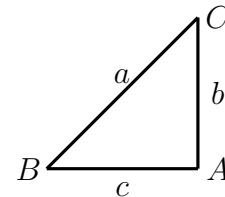


Figura 1.1: Notación

En todo triángulo rectángulo existen dos relaciones fundamentales:

1. **Relación entre los lados.** El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2. **Relación entre los ángulos.** Los dos ángulos agudos suman un recto.

$$B + C = 90^\circ$$

Ejercicio 9 A un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, le corresponde un cateto opuesto y un cateto adyacente o contiguo. En la figura 1.1:

- El cateto opuesto al ángulo B es:

- El cateto contiguo al ángulo B es:
- El cateto opuesto al ángulo C es:
- El cateto contiguo al ángulo C es:

La relación entre los lados y los ángulos de un triángulo nos la proporciona las **razones trigonométricas**, que son cocientes entre los diversos lados del triángulo. Existen seis, tres directas y tres inversas:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS			
Directas		Inversas	
SENO	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	COSECANTE	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$
COSENO	$\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$	SECANTE	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$
TANGENTE	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$	COTANGENTE	$\frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$

Por ejemplo, las razones trigonométricas del ángulo B en el triángulo de la figura 1.1 serían:

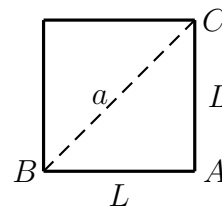
$$\begin{aligned} \text{sen } B &= \frac{b}{a} & \text{cos } B &= \frac{c}{a} & \text{tg } B &= \frac{b}{c} \\ \text{cosec } B &= \frac{a}{b} & \text{sec } B &= \frac{a}{c} & \text{cot } B &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Ejercicio 10 Escribe las razones trigonométricas del ángulo C en el triángulo rectángulo de la figura 1.1.

Ejercicio 11 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm. Halla las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

1.2.1. Razones trigonométricas de 45°

Consideremos un cuadrado de lado L . Trazando una diagonal se obtienen dos triángulos rectángulos e isósceles. Los ángulos opuestos a los lados iguales, serán iguales. Por tanto, $B = C = 45^\circ$. Con el teorema de Pitágoras, podremos calcular la hipotenusa en función del lado L del cuadrado:



$$a = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} B = \frac{L}{a} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \operatorname{cos} B = \frac{L}{a} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} B = \frac{L}{L} = 1$$

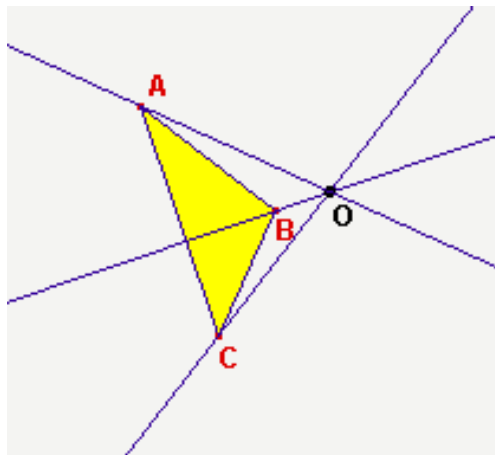
Ejercicio 12 *A partir del resultado anterior, calcula y expresa las razones trigonométricas inversas de 45° .*

Para terminar, observa que las razones trigonométricas de 45° no dependen de L , es decir, no dependen del tamaño del cuadrado.

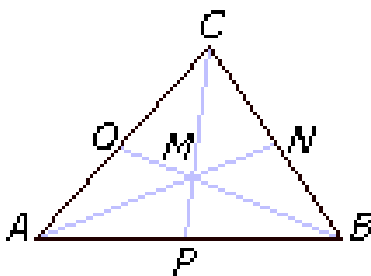
1.2.2. Razones trigonométricas de 30° y 60°

En un triángulo hay que considerar tres rectas muy importantes:

1. **Altura.** Es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



2. **Mediana.** Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

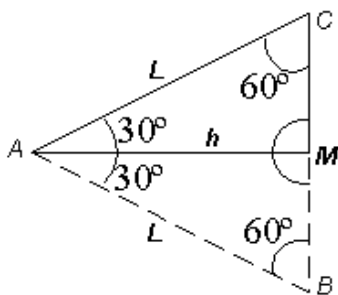


3. **Bisectriz.** Es la recta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

En un **triángulo equilátero** coinciden las alturas, medianas y bisectrices. Consideremos un triángulo equilátero de lado L . Por ser iguales sus tres lados, sus ángulos opuestos también lo serán:

$$A = B = C = 60^\circ$$

Tracemos, por ejemplo, la altura h relativa al vértice A . Por definición de altura, se obtienen dos triángulos rectángulos. Como altura y mediana coinciden aquí, BC queda dividido en dos partes iguales de longitud $\frac{L}{2}$ cada una. Por coincidir, además, con la bisectriz, el ángulo A se divide en dos de 30° .



Si nos fijamos en uno de los triángulo rectángulos, por ejemplo el CAM , tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} L^2 = h^2 + \overline{CM}^2 \\ \overline{CM} = \frac{L}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Para el ángulo de 60° se obtiene:

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } C = \frac{h}{L} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos C = \frac{\overline{CM}}{h} = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{2L\sqrt{3}}{2L} = \sqrt{3}$$

Ejercicio 13 *A partir del resultado anterior, calcula y expresa las razones trigonométricas inversas de 60° .*

Para el ángulo de 30° se obtiene:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{CM}}{h} = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L\sqrt{3}}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{2L}{2L\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 14 *A partir del resultado anterior, calcula y expresa las razones trigonométricas inversas de 30° .*

Para terminar, observa que las razones trigonométricas de 30° y 60° no dependen de L , es decir, no dependen de la magnitud del lado del triángulo.