Aplicaciones de la Trigonometría

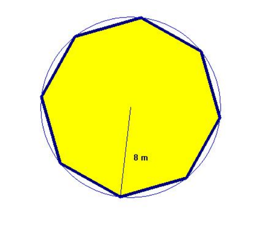
José Antonio Salgueiro González
Departamento de Matemáticas
IES Bajo Guadalquivir
Lebrija - Sevilla
dpto_mates_bg@terra.es

23 de marzo de 2007

1. Ejemplos

Ejemplo

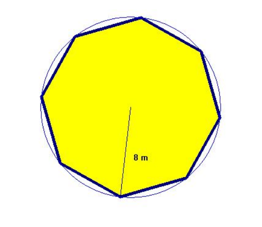
Hallar el área de un *octógono* *regular inscrito en una circunferencia de* $8\,m$ *de radio.*



Solución.- Uniendo el centro con los vértices, el octógono queda dividido en ocho triángulos isósceles iguales.

Ejemplo

Hallar el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 8 m

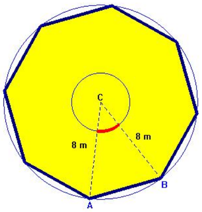


de radio.

Solución.- Uniendo el centro con los vértices, el octógono queda dividido en ocho triángulos isósceles iguales.

El ángulo en el vértice C será la octava parte de una circunferencia, es decir:

$$C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$



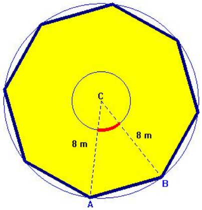
Obviamente, el área del octógono será ocho veces el área del triángulo ABC. Por ello, necesitaremos calcular la base y altura de este triángulo.

Al ser isósceles, la altura relativa al vértice C coincidirá con la mediana y la bisectriz.

Al trazar h, tanto C como AB quedan divididos en dos mitades.

El ángulo en el vértice C será la octava parte de una circunferencia, es decir:

$$C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$



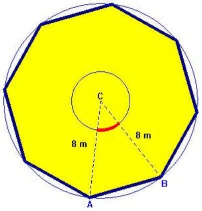
Obviamente, el área del octógono será ocho veces el área del triángulo ABC. Por ello, necesitaremos calcular la base y altura de este triángulo.

Al ser isósceles, la altura relativa al vértice C coincidirá con la mediana y la bisectriz.

Al trazar h, tanto C como AB quedan divididos en dos mitades.

El ángulo en el vértice C será la octava parte de una circunferencia, es decir:

$$C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$



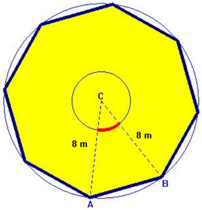
Obviamente, el área del octógono será ocho veces el área del triángulo ABC. Por ello, necesitaremos calcular la base y altura de este triángulo.

Al ser isósceles, la altura relativa al vértice C coincidirá con la mediana y la bisectriz.

Al trazar h, tanto C como AB quedan divididos en dos mitades.

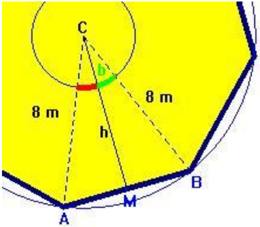
El ángulo en el vértice C será la octava parte de una circunferencia, es decir:

$$C = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$



Obviamente, el área del octógono será ocho veces el área del triángulo ABC. Por ello, necesitaremos calcular la base y altura de este triángulo.
Al ser isósceles, la altura relativa al vértice C coincidirá con la mediana y la bisectriz.
Al trazar h, tanto C como AB quedan divididos en dos mitades.

Polígono regular inscrito en circunferencia



El triángulo BMC es rectángulo en M.
¿Por qué?

$$b = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ = 22^\circ 30'$$

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} 22^\circ 30' = \frac{\overline{MB}}{8} \Rightarrow$$

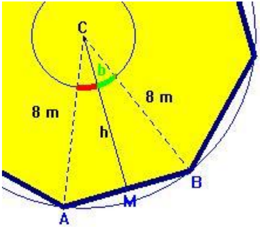
$$\Rightarrow \overline{MB} = 8 \cdot \operatorname{sen} 22^\circ 30' = 3{,}061$$

$$\cos b = \cos 22^\circ 30' = \frac{h}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 8 \cdot \cos 22^\circ 30' = 7{,}391$$

Con estos valores, debes obtener que la superficie del octógono es

$$\boxed{S = 181{,}02\, m^2}$$



El triángulo BMC es rectángulo en M.
¿Por qué?

$$b = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ = 22^\circ 30'$$

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} 22^\circ 30' = \frac{\overline{MB}}{8} \Rightarrow$$

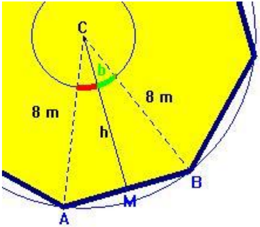
$$\Rightarrow \overline{MB} = 8 \cdot \operatorname{sen} 22^\circ 30' = 3{,}061$$

$$\cos b = \cos 22^\circ 30' = \frac{h}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 8 \cdot \cos 22^\circ 30' = 7{,}391$$

Con estos valores, debes obtener que la superficie del octógono es

$$\boxed{S = 181{,}02\, m^2}$$



El triángulo BMC es rectángulo en M.
¿Por qué?

$$b = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ = 22^\circ 30'$$

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} 22^\circ 30' = \frac{\overline{MB}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{MB} = 8 \cdot \operatorname{sen} 22^\circ 30' = 3{,}061$$

$$\cos b = \cos 22^\circ 30' = \frac{h}{8} \Rightarrow$$

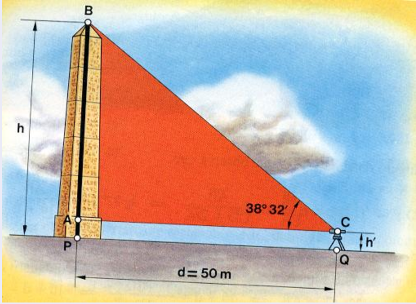
$$\Rightarrow h = 8 \cdot \cos 22^\circ 30' = 7{,}391$$

Con estos valores, debes obtener que la superficie del octógono es

$$\boxed{S = 181{,}02\, m^2}$$

Ejemplo

Para determinar la altura de un monumento, a 50 m *de distancia de su base se dispone un teodolito, y desde el mismo se lanza una visual al punto más alto del monumento, observándose que forma un ángulo de* $38^o 32'$ *con la horizontal. Considerando que el anteojo del teodolito se encuentra a* 1,70 m *de altura sobre el suelo,calcular la altura del monumento.*



Solución.- La altura del monumento viene dada por el segmento $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP} = \overline{BA} + h' = \overline{BA} + 1'70$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo BAC se tiene:

$$\operatorname{tg} 38^{o}32' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BA}}{50} \Rightarrow \overline{BA} = 50 \cdot \operatorname{tg} 38^{o}32' = 39{,}819$$

Con este resultado, debes obtener que la altura del monumento es

$$\boxed{h = 41{,}52\ m}$$

Solución.- La altura del monumento viene dada por el segmento $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP} = \overline{BA} + h' = \overline{BA} + 1'70$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo BAC se tiene:

$$\operatorname{tg} 38^\circ 32' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BA}}{50} \Rightarrow \overline{BA} = 50 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ 32' = 39{,}819$$

Con este resultado, debes obtener que la altura del monumento es

$$\boxed{h = 41{,}52\, m}$$

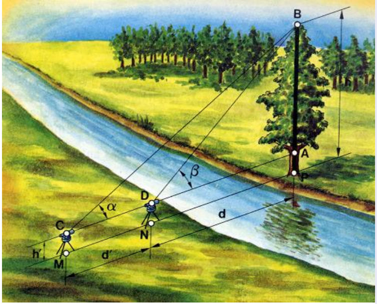
Solución.- La altura del monumento viene dada por el segmento $\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP} = \overline{BA} + h' = \overline{BA} + 1'70$. Por otra parte, en el triángulo rectángulo BAC se tiene:

$$\operatorname{tg} 38^\circ 32' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BA}}{50} \Rightarrow \overline{BA} = 50 \cdot \operatorname{tg} 38^\circ 32' = 39{,}819$$

Con este resultado, debes obtener que la altura del monumento es

$$\boxed{h = 41{,}52\, m}$$

Método de la doble observación



Ejemplo

Con objeto de determinar la altura de un árbol situado en un lugar inaccesible, se dispone un teodolito en un punto accesible y desde el mismo se lanza una visual al punto más alto del árbol, obteniéndose un ángulo de inclinación de $22^{\circ}47'$. A continuación, se adelanta el teodolito una distancia de 10 metros en dirección al árbol y se vuelve a lanzar otra visual al mismo punto, obteniéndose, en este caso, un ángulo de $31^{\circ}19'$. Calcular la altura del árbol, considerando que el anteojo del teodolito mide $1'50\ m$.

Solución.- La altura del árbol será $\overline{BA}+t$, siendo t la altura del teodolito, es decir, $\overline{BA}+1'50$. Ahora bien, en el triángulo BAD:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 31^\circ 19' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{d}$$

Por otra parte, en el triángulo BAC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 22^\circ 47' = \frac{\overline{BA}}{d+10}$$

Llamando $\overline{BA}=x$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} 31^\circ 19' & = & \dfrac{x}{d} \\ \operatorname{tg} 22^\circ 47' & = & \dfrac{x}{d+10} \end{array}\right\}$$

Solución.- La altura del árbol será $\overline{BA}+t$, siendo t la altura del teodolito, es decir, $\overline{BA}+1'50$. Ahora bien, en el triángulo BAD:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 31^{\circ}19' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{d}$$

Por otra parte, en el triángulo BAC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 22^{\circ}47' = \frac{\overline{BA}}{d+10}$$

Llamando $\overline{BA}=x$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} 31^{\circ}19' & = & \dfrac{x}{d} \\ \operatorname{tg} 22^{\circ}47' & = & \dfrac{x}{d+10} \end{array}\right\}$$

Solución.- La altura del árbol será $\overline{BA}+t$, siendo t la altura del teodolito, es decir, $\overline{BA}+1'50$. Ahora bien, en el triángulo BAD:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 31^{\circ}19' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{d}$$

Por otra parte, en el triángulo BAC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 22^{\circ}47' = \frac{\overline{BA}}{d+10}$$

Llamando $\overline{BA}=x$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} 31^{\circ}19' & = & \dfrac{x}{d} \\[2ex] \operatorname{tg} 22^{\circ}47' & = & \dfrac{x}{d+10} \end{array}\right\}$$

Solución.- La altura del árbol será $\overline{BA} + t$, siendo t la altura del teodolito, es decir, $\overline{BA} + 1'50$. Ahora bien, en el triángulo BAD:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 31^\circ 19' = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{d}$$

Por otra parte, en el triángulo BAC:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 22^\circ 47' = \frac{\overline{BA}}{d + 10}$$

Llamando $\overline{BA} = x$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{tg} 31^\circ 19' & = & \dfrac{x}{d} \\[2ex] \operatorname{tg} 22^\circ 47' & = & \dfrac{x}{d+10} \end{array}\right\}$$

Equivalente a

$$\left.\begin{aligned} 0,61 &= \frac{x}{d} \\ 0,42 &= \frac{x}{d+10} \end{aligned}\right\}$$

Que podemos resolver por el método de igualación despejando x en ambas ecuaciones:

$$0,61d = 0,42(d+10) \Leftrightarrow 0,19d = 4,2 \Leftrightarrow d = 22,11$$

Por tanto, la altura del árbol es

$$\boxed{\overline{BA} + 1,50 = x + 1'50 = 13,484 + 1'50 = 14,98\ m}$$

Equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcl} 0,61 & = & \dfrac{x}{d} \\ 0,42 & = & \dfrac{x}{d+10} \end{array}\right\}$$

Que podemos resolver por el método de igualación despejando x en ambas ecuaciones:

$$0,61d = 0,42(d+10) \Leftrightarrow 0,19d = 4,2 \Leftrightarrow d = 22,11$$

Por tanto, la altura del árbol es

$$\boxed{\overline{BA} + 1,50 = x + 1'50 = 13,484 + 1'50 = 14,98\ m}$$

Equivalente a

$$\left.\begin{aligned} 0,61 &= \frac{x}{d} \\ 0,42 &= \frac{x}{d+10} \end{aligned}\right\}$$

Que podemos resolver por el método de igualación despejando x en ambas ecuaciones:

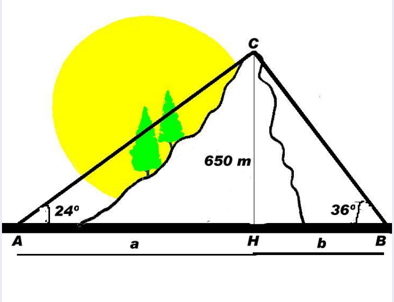
$$0,61d = 0,42(d+10) \Leftrightarrow 0,19d = 4,2 \Leftrightarrow d = 22,11$$

Por tanto, la altura del árbol es

$$\boxed{\overline{BA} + 1,50 = x + 1'50 = 13,484 + 1'50 = 14,98\ m}$$

EJEMPLO

Una montaña de 650 *m de altura separa dos pueblos A y B. Desde A se ve la cima C de la montaña con un ángulo de elevación de* 24º*, y desde B con* 36º*. ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos?*



Estrategia de la altura

Como el ángulo $C = 180^o - (24^o + 36^o) = 120^o$, el triángulo ABC no es rectángulo y, por tanto, no podemos usar las razones trigonométricas. En estos casos suele emplearse la estrategia de la altura, que consiste en trazar una de las alturas y dividir el triángulo en otros dos que ya serán rectángulos. En el triángulo AHC:

$$\operatorname{tg} 24^o = \frac{h}{a} = \frac{650}{a} \Rightarrow a = \frac{650}{\operatorname{tg} 24^o} = 1459,92$$

Por otra parte, en el triángulo CHB:

$$\operatorname{tg} 36^o = \frac{h}{b} = \frac{650}{b} \Rightarrow b = \frac{650}{\operatorname{tg} 36^o} = 894,65$$

Se deduce, que la distancia entre los pueblos es

$$\boxed{a + b = 2354,57\ m}$$

Estrategia de la altura

Como el ángulo $C = 180^\circ - (24^\circ + 36^\circ) = 120^\circ$, el triángulo ABC no es rectángulo y, por tanto, no podemos usar las razones trigonométricas. En estos casos suele emplearse la estrategia de la altura, que consiste en trazar una de las alturas y dividir el triángulo en otros dos que ya serán rectángulos. En el triángulo AHC:

$$\operatorname{tg} 24^\circ = \frac{h}{a} = \frac{650}{a} \Rightarrow a = \frac{650}{\operatorname{tg} 24^\circ} = 1459,92$$

Por otra parte, en el triángulo CHB:

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{h}{b} = \frac{650}{b} \Rightarrow b = \frac{650}{\operatorname{tg} 36^\circ} = 894,65$$

Se deduce, que la distancia entre los pueblos es

$$\boxed{a + b = 2354,57\ m}$$

Estrategia de la altura

Como el ángulo $C = 180^\circ - (24^\circ + 36^\circ) = 120^\circ$, el triángulo ABC no es rectángulo y, por tanto, no podemos usar las razones trigonométricas. En estos casos suele emplearse la estrategia de la altura, que consiste en trazar una de las alturas y dividir el triángulo en otros dos que ya serán rectángulos. En el triángulo AHC:

$$\operatorname{tg} 24^\circ = \frac{h}{a} = \frac{650}{a} \Rightarrow a = \frac{650}{\operatorname{tg} 24^\circ} = 1459,92$$

Por otra parte, en el triángulo CHB:

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{h}{b} = \frac{650}{b} \Rightarrow b = \frac{650}{\operatorname{tg} 36^\circ} = 894,65$$

Se deduce, que la distancia entre los pueblos es

$$\boxed{a + b = 2354,57\ m}$$

Estrategia de la altura

Como el ángulo $C = 180^o - (24^o + 36^o) = 120^o$, el triángulo ABC no es rectángulo y, por tanto, no podemos usar las razones trigonométricas. En estos casos suele emplearse la estrategia de la altura, que consiste en trazar una de las alturas y dividir el triángulo en otros dos que ya serán rectángulos. En el triángulo AHC:

$$\operatorname{tg} 24^o = \frac{h}{a} = \frac{650}{a} \Rightarrow a = \frac{650}{\operatorname{tg} 24^o} = 1459,92$$

Por otra parte, en el triángulo CHB:

$$\operatorname{tg} 36^o = \frac{h}{b} = \frac{650}{b} \Rightarrow b = \frac{650}{\operatorname{tg} 36^o} = 894,65$$

Se deduce, que la distancia entre los pueblos es

$$\boxed{a + b = 2354,57\ m}$$