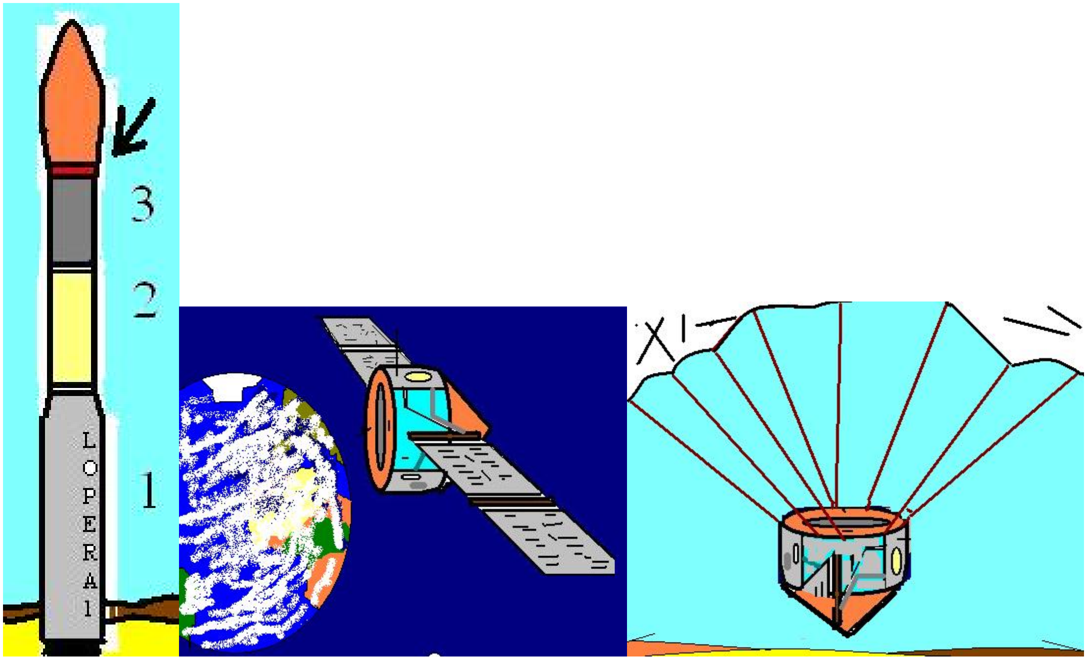
Diseño de un satélite artificial:
El **LOPERA 1**



Trabajo realizado por:
<u>**Alumnas** de 4º ESO</u>: *Maria Pilar Campuzano López,*
Mari Carmen Corpas Mena y
Sara López Riáñez.
<u>**Profesor**</u>: *Juan Alfonso Díaz Conejo*
Instituto de Enseñanza Secundaria **Gamonares** de **Lopera** (Jaén)

INDICE

Capítulo	**Pagina**

PRESENTACION DEL TRABAJO

En este trabajo nos planteamos la **construcción de un satélite artificia**l, el **LOPERA 1**. Estaría diseñado para dar dos vueltas a la Tierra siguiendo un meridiano para luego caer nuevamente.

En este trabajo calcularemos:

-La **velocidad orbital** a partir de un dato de altura en la que queremos que orbite nuestro satélite.

-El **despegue** del cohete con su trayectoria ascendente en sus 3 fases de aceleración, y en su 4ª fase sin propulsión en la cual entrará en órbita.

-El consumo de **combustible** en su fase de despegue y la cantidad de dicho combustible requerida, dato imprescindible para el ...

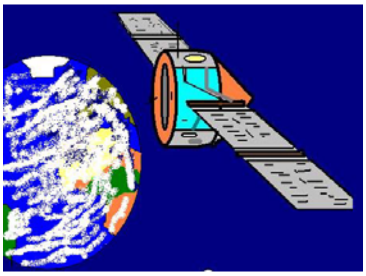
- ... cálculo del **tamaño de los depósitos** que ha de llevar el cohete, estimación muy importante para el diseño de tamaño de éste.

-El área de los **paneles solares** que suministrarán energía eléctrica a nuestro satélite.

-El **calor específico** del material que ha de constituir el recubrimiento del satélite para su feliz vuelta a casa.

Todas las ecuaciones utilizadas (cinemática, dinámica de Newton, fuerza gravitatoria, calor y temperatura- termodinámica-, etc) han sido estudiadas por los alumnos en los cursos de **4º y 3º de ESO**. El profesor sólo incluye algunas expresiones de la velocidad, al no poder ser deducidas por los alumnos ya que desconocen el concepto de derivada, e incluye el **teorema de las fuerzas vivas** y el **teorema de conservación del momento lineal**, al ser teoremas que se estudian en bachillerato.

Todos los **dibujos e ilustraciones** que aparecen en este trabajo han sido dibujada por nosotros utilizando el **Paint**



El **objetivo** de este trabajo era ver como las alumnas eran protagonistas de una aventura en la que ponían en juego sus conocimientos de física ya adquiridos.

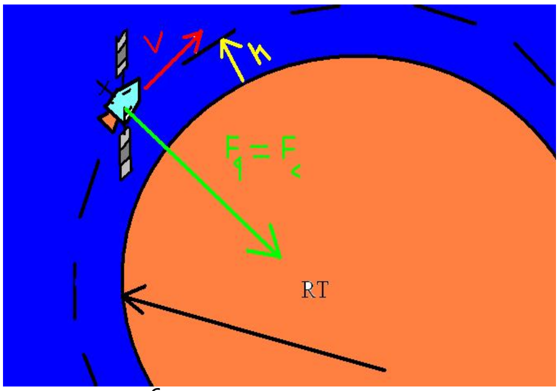
Alumnas de 4º ESO: *Maria Pilar Campuzano López, Mari Carmen Corpas Mena y Sara López Riáñez.*

Profesor: *Juan Alfonso Díaz Conejo*

Instituto de Enseñanza Secundaria Gamonares de Lopera Jaén

CALCULO DE VELOCIDAD ORBITAL

Vamos a calcular a qué velocidad debe orbitar nuestro satélite artificial si queremos que vuele a una altura de 290 km sobre el nivel del mar.



$h = 290000 \text{ m} = 0.29 \times 10^6 \text{ m}$

Planteamos la ecuación de la fuerza gravitatoria, por tratarse de un efecto gravitatorio, y además escribimos la de la fuerza centrípeta al tratarse de un movimiento circular. Si nos fijamos, son dos modos de describir un mismo fenómeno, luego ambas fuerzas deben ser iguales.

$$Fg = \frac{G\, m_T\, m_S}{(R_T + h)^2}$$

$$Fc = \frac{m\, v^2}{R_T + h}$$

$$Fg = Fc = \frac{G\, m_T\, m_S}{(R_T + h)^2} = \frac{m\, v^2}{R_T + h}$$

De ahí despejaríamos la velocidad de nuestro satélite artificial que es lo que queremos averiguar.

$$v = [\, G\, m_T / (R_T + h)\,]^{1/2}$$

En vez de trabajar con m_T, voy a basarme en el conocimiento que tengo de **g** en la superficie de la Tierra (9.8 m/s^2)

$$g_0 = \frac{G\, m_T}{R_T^2} \quad ; \qquad G\, m_T = g_0\, R_T^2 \quad ;$$

Sustituyendo en la velocidad orbital obtendríamos una expresión tal como esta:

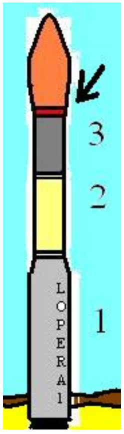
$$v = [\, g_0\, R_T^2 / (R_T + h)]^{1/2} = R_T\, [\, g_0 / (R_T + h)]^{1/2}$$

Sustituyamos pues nuestros datos:

$v = 6.4 \times 10^6 \text{ m} \cdot [\, 9.8 \text{ m/s}^2 / (6.4 \times 10^6 \text{ m} + 0.29 \times 10^6 \text{ m})\,]^{1/2} =$
7742 m / s = v

DESPEGUE

Para poder llevar a nuestro satélite a una órbita tal como la propuesta, tenemos que conseguir que alcance dicha altura y se mantenga a la velocidad calculada en el apartado anterior. Para conseguir esto está la fase de despegue.
Uno de los problemas a solucionar es la enorme aceleración que necesitamos, y para ello utilizamos una lanzadera o cohete, tal como el que diseñamos a continuación.

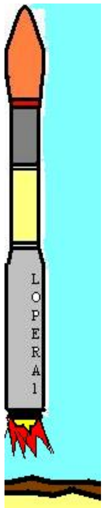


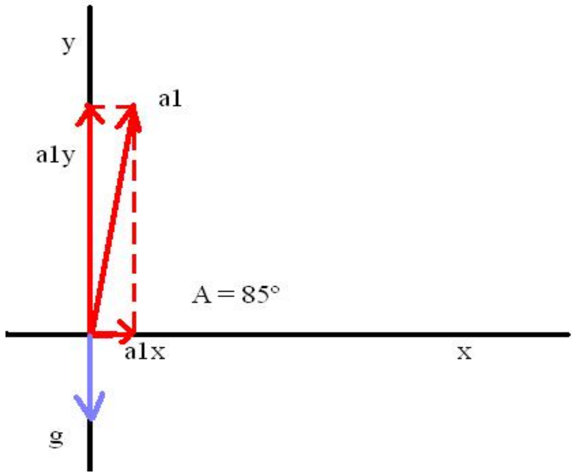
Si nos fijamos, el cohete va a ser muy grande, casi 21 m de altura y 137000 kg de masa en relación a lo que va a colocar en órbita, que va a ser nuestro satélite de apenas 388 kg. La razón de todo esto es lo descrito anteriormente, y es que para conseguir una velocidad y una altura tan alta en tan poco tiempo, hemos de diseñar un despegue por o fases. Analicémoslas una a una.

1ª FASE

Despega el cohete entero donde los motores que se utilizan son los que aparecen señalados en el dibujo como 1. El hidrógeno líquido y el oxígeno líquido *(ver sección combustible)*, van a ser capaces de desarrollar una fuerza de 3040×10^3 N durante 53 segundos. Una vez completada la primera fase, la parte 1 del cohete se desprenderá ya que no nos sirve para nada, y arrastrar una masa inútil sería un inconveniente para nuestros fines.

Los datos con los que vamos a trabajar en esta primera fase son: masa del cohete m_0, fuerza desarrollada F_1 y tiempo de duración de la fase t_1.





5 toneladas de combustible H_2 y O_2 *(ver sección combustible)*.
$F_1 = 3040 \times 10^3$ N
$m_o = 137 \times 10^3$ kg
$t_1 = 53$ s

Partiremos de la **ecuación** de la **posición** en un **movimiento uniformemente acelerado**.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

Veamos primero el eje **x**. Vamos a partir de la ecuación anterior y nos saldrá una fórmula que va a depender de la componente x de la aceleración. Utilizando el coseno lograremos convertir esta fórmula en otra dependiente de la aceleración, y ésta será muy fácil relacionarla con la fuerza desarrollada por el cohete gracias a la segunda ley de Newton.

$$x_1 = \frac{1}{2} a_{1x} t_1^2$$

$$\cos A_1 = \frac{a_{1x}}{a_1} \quad ; \quad a_{1x} = a_1 \cos A_1$$

Luego:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \cos A_1$$

Como

$$F_1 = m_o a_1 \quad ; \qquad a_1 = \frac{F_1}{m_o}$$

Luego finalmente obtenemos una expresión para x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{F_1}{m_o} t_1^2 \cos A_1$$

Repitamos la operación con **y**, sólo que aquí habrá que tener en cuenta a **g** que va hacia el lado negativo de las y, y que cuando tratemos de colocar la componentes de la aceleración en función de ésta, tendremos que trabajar con el seno.

Partiríamos de la misma ecuación de la posición, sólo que aplicándola al eje y.

$$y_1 = \frac{1}{2} (a_{1y} - g_1) t_1^2$$

$$\text{sen } A_1 = \frac{a_{1y}}{a_1} \quad ; \quad a_{1y} = a_1 \text{ sen } A_1$$

$$a_1 = \frac{F_1}{m_o}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} [\ (F_1 / m_o) \text{ sen } A_1 - g_1]\ t_1^2$$

Ya tenemos la expresión de la altura. Sustituyendo nuestros datos obtendríamos un resultado de:

$\boldsymbol{y_1 = 17416}$ **m**

Las ecuaciones que vienen a continuación han sido ***dadas por el profesor****. Los alumnos de* ***4º ESO*** *no saben el concepto de* ***derivada****, luego no pueden llegar a deducirla*.

$$v_{1x} = \frac{F_1}{m_o} t_1 \cos A_1$$

$$v_{1y} = [\ (F_1 / m_o) \text{ sen } A_1 - g_1]\ t_1$$

$$v_1 = (\ v_{1x}^2 + v_{1y}^2)^{1/2}$$

Sustituyendo la velocidad nos saldría un valor de:

$\boldsymbol{v_1 = 665}$ **m/s** $\boldsymbol{= v_{2o}}$

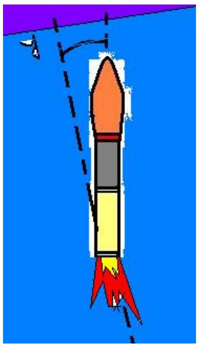
Esta velocidad sería la final de la fase 1 y la inicial de la fase 2

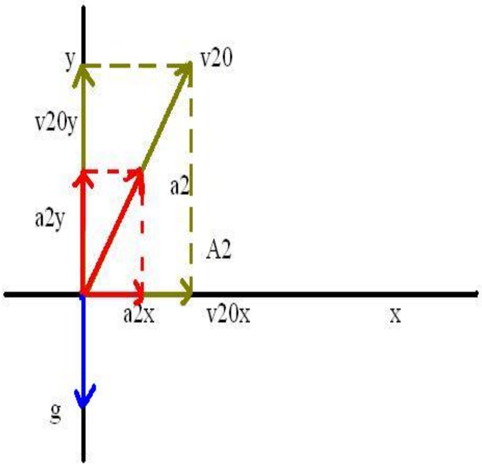
Por último, el ángulo con el que partiríamos en la segunda fase sería de:

$$A_2 = \text{ar tg } \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \mathbf{81^\circ = A_2}$$

2^a FASE

Comienza la segunda con el desprendimiento de la parte 1 del cohete y la puesta en funcionamiento del motor ubicado en la parte 2. Éste desarrollará una fuerza de 12×10^5 N a lo largo de 36 s gracias a las 2.2 toneladas de H_2 y O_2 líquido *(ver sección combustible)*. La masa de lo que queda de lanzadera que se va elevando es de 46000 kg.





Nuestra lanzadera ya guarda una inclinación respecto a la vertical calculada al final de la fase anterior. Seguiremos trabajando con la ecuación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o\, t + \frac{1}{2}\, \mathbf{a}\, t^2$$

Lo que pasa que, a diferencia de lo que sucedía anteriormente, tenemos además de aceleración una velocidad inicial.

Empecemos con la x

$$X_2 = v_{20x}\, t_2 + \frac{1}{2}\, a_{1x}\, t_2^2$$

$$\cos A_2 = \frac{v_{2ox}}{v_{2o}} \quad ; \quad v_{2ox} = v_{2o} \cos A_2$$

$$\cos A_2 = \frac{a_{2x}}{a_2} \quad ; \quad a_{2x} = a_2 \cos A_2$$

Luego:

$$X_2 = v_{2o}\, t_2 \cos A_2 + \frac{1}{2}\, a_2\, t_2^2 \cos A_2$$

Como

$$F_2 = m_2\, a_2 \quad ; \quad a_2 = \frac{F_2}{m_2}$$

Luego finalmente obtenemos una expresión para x_2:

$$X_2 = v_{2o}\, t_2 \cos A_2 + \frac{1}{2}\frac{F_2}{m_2} t_2^2 \cos A_2$$

Volvemos a repetir el proceso para hallar el valor de y_2, es decir, saber cuanto ha subido nuestra lanzadera en esta segunda fase.

$$y_2 = v_{2oy}\, t_2 + \frac{1}{2}(a_{2y} - g_2)\, t_2^2$$

$$\text{sen } A_2 = \frac{v_{2oy}}{v_{2o}} \quad ; \quad v_{2oy} = v_{2o} \text{ sen } A_2$$

$$\text{sen } A_2 = \frac{a_{2y}}{a_2} \quad ; \quad a_{2y} = a_2 \text{ sen } A_2$$

$$a_2 = \frac{F_2}{m_2}$$

$$y_2 = v_{20}\, t_2 \text{ sen } A_2 + \frac{1}{2}\left[(F_2 / m_2) \text{ sen } A_2 - g_2 \right] t_2^2$$

Ya tenemos la expresión de la altura. Antes de sustituir vamos a hacer una estimación del valor de g_2.

$$g_2 = \frac{G\, m_T}{(R_T + y_1)^2}$$

En vez de trabajar con m_T, voy a basarme en el conocimiento que tengo de g en la superficie de la Tierra (9.8)

$$g_0 = \frac{G\, m_T}{R_T^2} \quad ; \quad G\, m_T = g_0 R_T^2 \quad ;$$

Me quedaría:

$$g_2 = \frac{g_o R_T^2}{(R_T + y_1)^2} = g_o [R_T / (R_T + y_1)]^2 = 9.78 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo nuestros datos obtendríamos un resultado de:

y_2 = 34000 m

Llevaríamos una altura total de

Y (fase1 + fase2) = $y_1 + y_2$ = 17416 m + 34000 m = 51416 m

Las ecuaciones que vienen a continuación han sido ***dadas por el profesor****. Los alumnos de* ***4º ESO*** *no saben el concepto de* ***derivada****, luego no pueden llegar a deducirla*.

$$v_{2x} = v_{2o} \cos A_2 + \frac{F_2}{m_2} t_2 \cos A_2$$

$$v_{2y} = v_{2o} \text{ sen } A_2 \quad [\, (F_2 / m_2) \text{ sen } A_2 - g_2]\, t_2$$

$$v_2 = (v_{2x}^2 + v_{2y}^2)^{1/2}$$

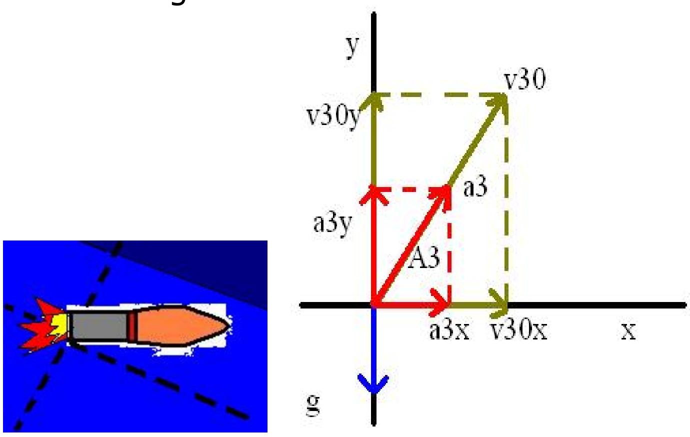
Sustituyendo la velocidad nos saldría un valor de:

$\mathbf{v_2 = 1225\ m/s = v_{3o}}$

Esta velocidad sería la final de la fase 2 y la inicial de la fase 3
Por último, el ángulo con el que partiríamos en la segunda fase sería de:
$A_3 = \text{ar tg } \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \mathbf{76\,^{o} = A_3}$

3ª FASE

Comienza la tercera fase con el desprendimiento de la parte 2 del cohete y la puesta en funcionamiento del motor ubicado en la parte 3. Éste desarrollará una fuerza de 313 x 10^3 N a lo largo de 60 s gracias a las 0.7 toneladas de H_2 y O_2 líquido *(ver sección combustible)*. La masa de lo que queda de lanzadera que se va elevando es de 19100 kg.



Seguiremos trabajando con la ecuación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o\, t + \frac{1}{2}\, \mathbf{a}\, t^2$$

Las ecuaciones son semejantes a las de la fase 3, sólo cambiarían los parámetros (subíndices)

$$X_3 = v_{3o}\, t_3 \cos A_3 + \frac{1}{2} \frac{F_3}{m_3} t_3^2 \cos A_3$$

$$y_3 = v_{30}\, t_3 \,\text{sen}\, A_3 + \frac{1}{2}\left[(F_3 / m_3)\,\text{sen}\, A_3 - g_3 \right] t_3^2$$

Calculamos g_3 como lo hicimos anteriormente con g_2, sólo que ahora hemos de tener en cuenta y_2.

$$g_3 = \frac{g_o R_T^2}{(R_T + y_1 + y_2)^2} = g_o \left[R_T / (R_T + y_1 + y_2)\right]^2 = 9.65\ m/s^2$$

Sustituyendo nuestros datos obtendríamos un resultado de:

$y_3 = 82391$ m

Llevaríamos una altura total de

$$Y\,(\text{fase1} + \text{fase2} + \text{fase3}) = y_1 + y_2 + y_3 = 133807\ m$$

*Las ecuaciones que vienen a continuación han sido **dadas por el profesor**. Los alumnos de **4º ESO** no saben el concepto de **derivada**, luego no pueden llegar a deducirla*.

$$v_{3x} = v_{3o} \cos A_3 + \frac{F_3}{m_3} t_3 \cos A_3$$

$$v_{3y} = v_{3o}\,\text{sen}\, A_3 \quad \left[(F_3 / m_3)\,\text{sen}\, A_3 - g_3 \right] t_3$$

$$v_3 = (v_{3x}^2 + v_{3y}^2)^{1/2}$$

Sustituyendo la velocidad nos saldría un valor de:

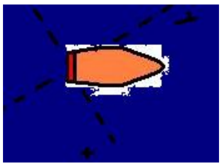
$v_3 = 1567 m/s = v_{4o}$

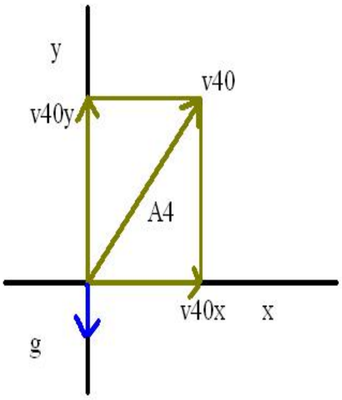
Esta velocidad sería la final de la fase 3 y la inicial de la fase 4
Por último, el ángulo con el que partiríamos en la segunda fase sería de:

$$A_4 = \text{ar tg}\ \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \mathbf{70^{\circ} = A_4}$$

4ª FASE: SIN PROPULSION

La situación planteada ahora es parecida a la del tiro oblicuo donde la única aceleración que hay es g





Vamos a hacer primero una estimación de g_4 como hemos hecho en las fases precedentes.

$$g_4 = g_o \left[R_T / (R_T + y_1 + y_2 + y_3)\right]^2 = 9.38 \text{ m/s}^2$$

Utilizaremos la ecuación del movimiento uniforme y rectilíneo para el eje x y la del movimiento uniformemente acelerado para el eje y

$$r = r_o + v_o\, t$$

$$r = r_o + v_o\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

Empecemos con el eje x

$$x_4 = v_{4ox}\, t$$

$$\cos A_4 = \frac{v_{4ox}}{v_{4o}} \;;\quad v_{4ox} = v_{4o} \cos A_4$$

$$x_4 = v_{4o}\, t \cos A_4$$

Pasemos a deducir ahora la ecuación del eje y

$$y_4 = v_{4oy}\, t - \frac{1}{2}\, g_4\, t^2$$

$$\text{sen } A_4 = \frac{v_{4oy}}{v_{4o}} \;;\quad v_{4oy} = v_{4o} \text{ sen } A_4$$

$$y_4 = v_{4o}\, t \text{ sen } A_4 - \frac{1}{2}\, g_4\, t^2$$

Una vez alcanzamos la altura máxima, estaríamos ya en trayectoria orbital. Cuando lleguemos a esta situación, caracterizada porque v_y = 0, nuestro cohete se desprenderá de la última parte y pondrá en funcionamiento su motor de hidracina para ajustar la velocidad a la calculada el inicio de este trabajo.

Pero vayamos por partes, vamos a calcular primero el tiempo que tarda nuestro cohete en llegar a la altura máxima. Para ello, igualaremos v_y a 0.
*Dado que los alumnos de **4º ESO** no saben **derivar**, el **profesor** les dará las siguientes **ecuaciones**.*

$v_{4x} = v_{4o} \cos A_4$
$v_{4y} = v_{4o} \text{ sen } A_4 - g_4 t$

Si despejamos el tiempo de la ecuación de v_{4y} una vez igualada a 0

$$t = \frac{v_{4o} \text{ sen } A_4}{g_4} = 157 \text{ s}$$

Sustituimos en la altura y_4:

$$y_4 = v_{4o}\, t \text{ sen } A_4 - \frac{1}{2} g_4 t^2 = \mathbf{155579\ m = y_4}$$

La altura total a la que habría llegado nuestro satélite sería:

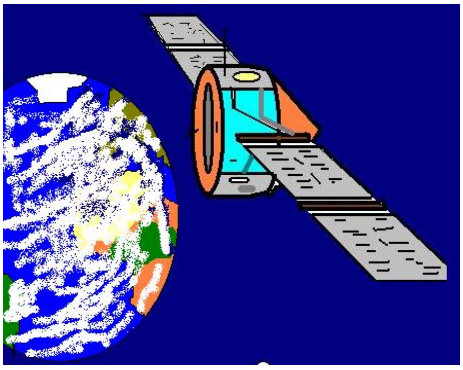
Y (fase1 + fase2 + fase3 + fase 4) $= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 =$ **289386 m = y (total)**

Calculamos ahora la velocidad que llevaría:

$v_{4x} = v_{4o} \cos A_4 =$ **536 m/s =** $\mathbf{v_{4f}}$

ENTRADA EN ÓRBITA

Se desprende la nariz y nos queda ya nuestro satélite. Como vemos, aún no hemos desplegado los paneles solares.
Nuestro satélite cuenta con 4 tanques con 136.5 kg del propelente hidracina N_2H_4 cada uno.
Una vez se haya desprendido de la nariz, nuestro satélite pasaría de los 19100 kg con los que inició esta última fase a los 1320 kg que tendría en estos últimos instantes.
Si quitáramos la hidracina, nuestro satélite tendría una masa real de 388 kg. Este constaría de unos paneles solares que se abrirían una vez puesto en órbita, y que se desprenderían una vez cubiertas las dos órbitas previstas alrededor de la Tierra.
Nuestro satélite también iría equipado con un ordenador que tendría un programa de actuación (orientación de placas solares, orientación de la cámara, etc), una cámara fotográfica, el depósito de hidrazina, y el pequeño motor, indispensable para las aceleraciones y desaceleraciones de la velocidad orbital, para luego, inducir a nuestro satélite a la vuelta a casa.



Analicemos la entrada en órbita

El funcionamiento del motor de hidrazina está basado en el teorema de **conservación del momento lineal** (*explicado por el* ***profesor*** *ya que no está dentro del temario de* ***4º ESO***)

Este teorema dice que cuando el sistema está aislado, el momento lineal permanece constante. Al descomponerse la hidrazina, emite una gran cantidad de gas (hidrógeno y amoniaco). La disminución de masa que se produce en el satélite es la que provocará un aumento en la velocidad de éste.

m_g = velocidad del gas
v_g = velocidad del gas
m_s = masa del satélite
v_f = velocidad final del satélite
v_o = velocidad inicial del satélite

$$m_g v_g = (m_s - m_g)(v_f - v_o)$$

$$v_f - v_o = \frac{m_g v_g}{(m_s - m_g)}$$

$$\mathbf{v_f} = \frac{m_g v_g}{(m_s - m_g)} + v_o = \frac{942 \text{ kg} \times 3\ 10^3 \text{ m/s}}{(1320 \text{ kg} - 932 \text{ kg})} + 536 \text{ m/s} = \mathbf{7742\ m/s}$$

NOTA DEL PROFESOR

Hemos partido de unos datos correspondientes a la lanzadera VEGA de la Agencia nacional europea. Las cifras de "fuerza", tiempo de cada fase, masa de cada parte del cohete y toneladas de combustible fueron adaptadas a las necesidades de nuestra propia lanzadera.

Aun así, no dejaron de ser unos datos de referencia que se fueron ajustando a lo largo de este trabajo, sobre todo los números relacionados con la energía (fuerza desarrollada). La idea era que, una vez ajustadas dichas cifras, y en base a la variación de la energía cinética en cada tramo del despegue –teorema de las fuerzas vivas-, *ver la cantidad de H_2 y O_2 requerida a partir de los datos de calor de reacción, para luego estimar el tamaño de los depósitos de cada una de las partes del cohete.*

Respecto al hecho de que no terminen de cuadrar las cifras referidas a la altura orbital y a la velocidad con las calculadas al inicio de este trabajo, se deben a:

-En la primera fase del despegue, que es la "más energética" debido al rozamiento que causa la atmósfera en sus capas más bajas, no hemos tenido en cuenta dicho rozamiento por simplificar un poco el cálculo y por carecer de un coeficiente adecuado que poder aplicar.

-En la segunda fase, la aceleración es mucho mayor que la ofrecida en nuestros datos. La razón de esto es porque los alumnos no conocen el concepto de derivada, y por lo tanto, no podíamos describir bien el hecho de que, realmente, la aceleración no era constante, ya que conforme se va "quemando" el hidrógeno, la masa se va haciendo más pequeña y la aceleración va aumentando con gran rapidez, a pesar de que la fuerza desarrollada por el cohete sea constante.

$F = m\,a$; $a = F / m$

Si m se hace pequeño y la F es constante, a aumenta.

Finalmente comentar que, para terminar de ajustar la velocidad a la orbital, el satélite dispone de un motor catalítico de descomposición de hidracina.

La última parte supone un ajusta "algo exagerado", consecuencia del baile de cifras provocado por lo anteriormente expuesto.

EL COMBUSTIBLE LÍQUIDO

Primero vamos a calcular la cantidad de energía consumida utilizando el **teorema de las fuerzas vivas** (*introducido por el profesor ya que las alumnas no abordan el estudio de este teorema en su curso de 4º ESO*), para después, en base al calor de reacción, hallar la cantidad de H_2 y O_2 líquido necesaria. Con estos datos diseñaremos las dimensiones de los depósitos de combustible de nuestro cohete, dato fundamental en las dimensiones de éste.

Estos cálculos los haremos fase por fase, al tratarse de 3 cohetes independientes.

FASE 1

$$\boxed{v_f = 665 \text{ m/s},\ v_o = 0 \text{ m/s},\ m_o = 137 \times 10^3 \text{ kg},\ m_c = 5 \times 10^3 \text{ kg}}$$

A la masa del cohete habrá que quitarle la del combustible consumida m_c (5 toneladas)

$$W_1 = Ec_f - Ec_o = \frac{1}{2}(m_o - m_c)\,v_1^2 = = 2.91 \times 10^{10} \text{ J}$$

Ahora nos vamos a estudiar el calor de reacción para ver que cantidad de combustible necesitamos.

$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O + Q$ E = 12.792 kJ/g = 12792 J/g

En base a proporciones estableceremos la cantidad de combustible requerida.

$\frac{12972\ J}{1g} = \frac{2.91 \cdot 10^{10}\ J}{x\ g}$; $x = 2.27 \cdot 10^6$ g combustible en total.

El O_2 va a ser el reactivo limitante, así que tomaremos éste como referencia. Utilicemos **$2.20 \cdot 10^6$ g de O_2** (*valor tomado por estimación aproximada*)

$2.20 \cdot 10^6\ g\ \frac{1\ mol}{32\ g} = 68750$ moles de O_2.

De acuerdo con la estequiometría de la reacción, será el doble de moles de H_2.

$n(H_2) = 2 \cdot 68750$ moles $= 137500$ moles $\frac{2g}{1\ mol}$ = **275000 g de H_2**

Como vemos tendríamos un importante resto de H_2 que actuará como refrigerante, ya que las temperaturas que se van a alcanzar van a ser muy altas. Dicho H_2 sobrante se iría eliminando a medida que el cohete fuera ganando altura.

Calculemos ahora el tamaño de los depósitos.

1) Depósito de O_2.

$d(O_2) = 1.14\ g / cm^3$

$d = m / v$; $v = m / d = 2.20 \cdot 10^6\ g / 1.14\ g / cm^3 = 1.76 \cdot 10^6\ cm^3 = 1.76\ m^3$

r = 0.4 m (*estimación aproximada*)

$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2 =$ **3.50 m = h**

2) Depósito de H_2.

$d(H_2) = 0.07\ g / cm^3$

$d = m / v$; $v = m / d = (2.52 + 0.28) \cdot 10^6\ g / 0.07\ g / cm^3 = 4.00 \cdot 10^6\ cm^3 = 4.00\ m^3$

r = 1.5 m (*estimación aproximada*)

$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2$ = **7.53 m = h**

FASE 2

$v_{3o} = v_2 = 1225$ m/s, $v_{2o} = v_1 = 665$ m/s, $m_2 = 46 \times 10^3$ kg, $m_c = 2.2 \times 10^3$ kg

A la masa del cohete habrá que quitarle la del combustible consumida m_c (2.2 toneladas)

$$W_2 = Ec_f - Ec_o = \frac{1}{2}(m_2 - m_c)\, v_{3o}^2 - \frac{1}{2} m_2\, v_{2o}^2 = 2.27 \times 10^{10} \text{ J}$$

Ahora nos vamos a estudiar el calor de reacción para ver que cantidad de combustible necesitamos.

$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O + Q$ E = 12.792 kJ/g = 12792 J/g

En base a proporciones estableceremos la cantidad de combustible requerida.

$$\frac{12972 \text{ J}}{1\text{g}} = \frac{2.27 \cdot 10^{10} \text{ J}}{x \text{ g}} \quad ; \quad x = 1.80 \cdot 10^6 \text{ g combustible en total.}$$

El O_2 va a ser el reactivo limitante, así que tomaremos éste como referencia. Utilicemos **$1.80 \cdot 10^6$ g de O_2** (*valor tomado por estimación aproximada*)

$$1.80 \cdot 10^6 \text{ g } \frac{1 \text{ mol}}{32 \text{ g}} = 5 \cdot 10^4 \text{ moles de } O_2.$$

De acuerdo con la estequiometría de la reacción, será el doble de moles de H_2.

$$n(H_2) = 2 \cdot 5 \cdot 10^4 \text{ moles} = 100000 \text{ moles } \frac{2\text{g}}{1\text{mol}} = \mathbf{0.2 \cdot 10^6 \text{ g de } H_2}$$

Como vemos tendríamos un importante resto de H_2 que actuará como refrigerante, ya que las temperaturas que se van a alcanzar van a ser muy altas. Dicho H_2 sobrante se iría eliminando a medida que el cohete fuera ganando altura.

Calculemos ahora el tamaño de los depósitos.

1) Depósito de O_2.

d (O_2)= 1.14 g / cm^3

d = m / v; v = m / d = $1.8 \cdot 10^6$ g / 1.14 g / cm^3 = $1.40 \cdot 10^6$ cm^3 = 1.40 m^3

$r = 0.4$ m (*estimación aproximada*)

$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2$ = **2.78 m = h**

2) Depósito de H_2.

d (H_2)= 0.07 g / cm^3

d = m / v; v = m / d = (0.2+0.2) · 10^6 g / 0.07 g / cm^3 = 5.71 · 10^6 cm^3 = 5.71 m^3

$r = 0.6$ m (*estimación aproximada*)

$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2$ = **5.05 m = h**

FASE 3

$v_{4o} = v_3$ = 1567 m/s, $v_{3o} = v_2$ = 1225 m/s, $m_3 = 19.1 \times 10^3$ kg, $m_c = 0.7 \times 10^3$ kg

A la masa del cohete habrá que quitarle la del combustible consumida m_c (0.7 toneladas)

$$W_3 = Ec_f - Ec_o = \frac{1}{2} (m_3 - m_c) v_{4o}^2 - \frac{1}{2} m_3 v_{3o}^2 = 7.6 \times 10^9 \text{ J}$$

Ahora nos vamos a estudiar el calor de reacción para ver que cantidad de combustible necesitamos.

$2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O + Q$ E = 12.792 kJ/g = 12792 J/g

En base a proporciones estableceremos la cantidad de combustible requerida.

$$\frac{12972 \text{ J}}{1\text{g}} = \frac{7.6 \cdot 10^9 \text{ J}}{x \text{ g}} \quad ; \quad x = 0.59 \cdot 10^6 \text{ g combustible en total.}$$

El O_2 va a ser el reactivo limitante, así que tomaremos éste como referencia. Utilicemos **0.50 · 10^6 g de O_2** (*valor tomado por estimación aproximada*)

$$0.50 \cdot 10^6 \text{ g} \ \frac{1 \text{ mol}}{32 \text{ g}} = 15625 \text{ moles de } O_2.$$

De acuerdo con la estequiometría de la reacción, será el doble de moles de H_2.

$n(H_2) = 2 \cdot 15625$ moles = 31250 moles $\frac{2g}{1mol}$ = $\mathbf{0.0625 \cdot 10^6\ g\ H_2}$

Como vemos tendríamos un importante resto de H_2 que actuará como refrigerante, ya que las temperaturas que se van a alcanzar van a ser muy altas. Dicho H_2 sobrante se iría eliminando a medida que el cohete fuera ganando altura.

Calculemos ahora el tamaño de los depósitos.

1) Depósito de O_2.

$d (O_2)= 1.14\ g / cm^3$

$d = m / v$; $v = m / d = 5 \cdot 10^5\ g / 1.14\ g / cm^3 = 4.38 \cdot 10^5\ cm^3 = 0.44\ m^3$

r = 0.4 m (*estimación aproximada*)

$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2$ = **0.87 m = h**

2) Depósito de H_2.

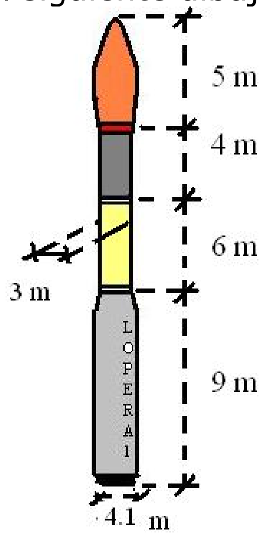
$d (H_2)= 0.07\ g / cm^3$

$d = m / v$; $v = m / d = (137500 + 62500)\ g / 0.07\ g / cm^3 = 2.85 \cdot 10^6\ cm^3 = 2.85\ m^3$

r = 0.6 m (*estimación aproximada*)

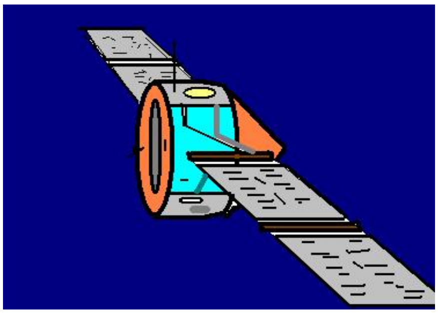
$V = \pi r^2 h$; $h = V / \pi r^2$ = **2.52 m = h**

En base a estos datos, podríamos estimar las **dimensiones del cohete** de acuerdo con el siguiente dibujo.



PANELES SOLARES

Nuestro satélite usa unas células solares para la generación de energía. Una vez esté nuestro satélite en órbita, se desplegarán los paneles que alimentarán al pequeño ordenador de abordo, a la cámara fotográfica y al iniciador del motor catalítico de hidracina N_2H_4.



La potencia producida a partir de un área A de un panel viene dada por:

$P = \phi_{sol}\, A\, \eta$ ϕ_{sol}= flujo solar

$\phi_{sol} = \dfrac{2.35 \cdot 10^{25}}{d^2}$ d =distancia al sol

η = rendimiento = 0.25

Necesitaremos una aproximada de 395 W (*dato estimado*). Despejaremos A para calcular el tamaño de nuestros paneles.

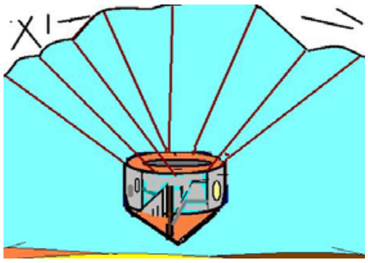
$$A = \frac{P}{\phi_{sol}\,\eta} = \frac{395\ \text{W}}{\dfrac{2.35 \cdot 10^{25}\,\text{W}}{(1.49 \cdot 10^{11}\,\text{m})^2} \cdot 0.124} = 3\ \text{m}^2$$

Colocaremos 2 alas que tendría cada una 1.5 m^2. Diseñaríamos cada ala con un ancho de 1m, luego la **longitud** de cada **ala** sería:

$$L = \frac{1.5\ \text{m}^2}{1\text{m}} = 1.5\ \text{m}$$

VUELTA A CASA

Queremos hacer llegar nuestro satélite hasta la superficie terrestre una vez ha terminado sus dos órbitas a 290 km de altura. Nuestro satélite que tiene una masa de 388 kg y se desplaza a una velocidad de 7742 m/s posee una enorme energía cinética. Para que en su vuelta a casa el paracaídas pudiera abrirse con ciertas garantías, nuestro satélite debería disminuir su velocidad a una que no debería ser superior a los 100 m/s. En este proceso de desaceleración hay una conversión de energía cinética en calor por rozamiento con la atmósfera.



Supongamos por un momento que nuestro satélite fuera completamente de hierro.

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$Q = m\, C_{Fe}\, \Delta T$$

$$\frac{1}{2} m |v_o^2 - v_f^2| = m\, C_{Fe}\, \Delta T \; ; \quad \Delta T = \frac{|v_o^2 - v_f^2|}{2\, C_{Fe}} = 65106 \text{ K}$$

La variación de temperatura se iría muy por encima de la temperatura de fusión y de ebullición del hierro, lo cual significaría la desintegración de nuestro satélite en su entrada en la atmósfera.

Para evitar esto, vamos a recubrirlo de un material especial, y vamos a calcular el **calor específico** que tendría que tener dicho material. Elegiremos un material cerámico cuya temperatura de fusión esté en torno a los 5000 ºC. Así que vamos a trabajar con una variación de temperatura de unos 4600 ºC que nos dará un amplio margen de seguridad.

$$\frac{1}{2} m |v_o^2 - v_f^2| = m\, C\, \Delta T \; ; \quad C = \frac{|v_o^2 - v_f^2|}{2\, \Delta T} = \mathbf{6510\ J/kgK = C}$$

BIBLIOGRAFIA

www.geocities.com/jdazconejo
www.esa.int