

DIMENSIONES DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA AL FINALIZAR LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. CARACTERIZACIÓN Y ANÁLISIS

A.I. Roig ; S. Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante

Resumen

La Educación Secundaria Obligatoria es el último periodo de escolarización obligatoria en la vida de los estudiantes de forma que, durante su transcurso, deberían desarrollar los conocimientos y destrezas necesarios para desenvolverse adecuadamente en el mundo extraescolar. En lo referente a la educación matemática este objetivo se advierte como de especial interés debido a la creciente importancia de la tecnología y la información en la sociedad actual. Así sería de esperar que los estudiantes, una vez finalizada la ESO, al enfrentarse a una situación problemática fuesen capaces de hacer uso de sus recursos y conocimientos matemáticos para afrontarla con éxito. En este sentido, la identificación de las variables y relaciones que conforman una manera de interpretar la situación (descripción, representación o sistema conceptual) se hace con el objeto de fundamentar una acción cognitiva (el propósito, objetivo) como puede ser decidir algo sobre el fenómeno, comunicar, interpretar, etc. La capacidad de modelizar una situación está vinculada a la posibilidad de considerar relaciones ligadas al comportamiento de las variables y a la posibilidad de establecer relaciones sistemáticas entre diferentes sistemas de representación. En esta comunicación se presentan los resultados de una investigación dirigida a determinar el desarrollo de las capacidades de modelizar y generalizar vistas como dimensiones de la competencia matemática en estudiantes de 4º de ESO.

INTRODUCCIÓN

Al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria, los estudiantes han recibido una formación matemática que se supone les prepara para la vida permitiéndoles ser autosuficientes a la hora de enfrentarse a las diferentes situaciones problemáticas que se les puedan plantear. Esto conlleva la idea de “competencia matemática”, noción que se vincula a una componente práctica relacionada con la capacidad que tiene una persona para hacer algo en particular, y también a saber cuándo, cómo y por qué utilizar determinados instrumentos (Godino, J. D., 2002; Llinares S., 2003). Se pueden considerar diferentes dimensiones del concepto de competencia matemática: comprensión conceptual de nociones matemáticas, desarrollo de destrezas procedimentales de carácter general, pensamiento estratégico...

Dentro del ámbito escolar, la conexión entre las matemáticas y el mundo real se realiza a través de las actividades de resolución de problemas contextualizados en situaciones reales. Puesto que, ante una situación problemática real, un resultado numérico no tiene sentido desligado del contexto, es necesario “darle sentido” teniendo en cuenta las condiciones impuestas por la situación. Pero numerosas investigaciones ponen de manifiesto que los estudiantes se limitan a obtener un resultado numérico que dan como solución sin considerar el contexto (Greer, 1993; Silver, 1992). Este fenómeno se conoce como “suspension of sense-making” (Verschaffel et al., 2002). Verschaffel et al. (2002) consideran que la causa de este fenómeno “*se encuentra en la cultura de la clase de matemáticas, en particular en las reglas que gobiernan la naturaleza e interpretación de los problemas*” (p.259) y creen necesaria una reconceptualización de la resolución de problemas como ejercicios de verdadera modelización matemática.

Vamos a entender como “modelo” una descripción matemática de una situación que se construye para describirla, pensar sobre ella, explicarla o realizar predicciones sobre su comportamiento y, por tanto, debe centrarse en las características estructurales de esta situación (Lesh y Lehrer, 2003). La modelización matemática se entiende como el proceso por el cual se interpreta matemáticamente situaciones para tomar algún tipo de decisión lo que implica centrarse en elementos de la situación, sus relaciones, patrones y características, teniendo como producto un modelo en algún nivel de sofisticación con relación al propósito. Esto lleva a la idea de “nivel de desarrollo” de la capacidad de modelizar (Lesh y Harel, 2003). Un proceso específico de modelizar es el de generalizar que en este trabajo se vincula a las modelizaciones realizadas en contextos en los que se pide identificar un patrón y poderlo continuar.

Considerando las capacidades de modelizar y generalizar como dimensiones de la competencia matemática el desarrollo de estas capacidades en un estudiante al finalizar la ESO será un indicador del nivel de competencia matemática alcanzado. Así, este estudio pretende responder a las siguientes cuestiones:

- ¿En qué medida se ha desarrollado la capacidad de modelización matemática durante la ESO?
- ¿Qué situaciones son mejor modelizadas por los estudiantes?

METODOLOGÍA

Los participantes:

En el estudio participaron un total de 511 estudiantes pertenecientes a 8 institutos públicos de la provincia de Alicante y que cursaban 4º de ESO. Los estudiantes

resolvieron un cuestionario compuesto por 5 problemas que les fue administrado por sus profesores durante la clase habitual de matemáticas, disponiendo de 50 minutos para completarlo.

Los problemas

El cuestionario fue desarrollado para el proyecto I+D “Aprendizaje y enseñanza: Relaciones en el caso de las Matemáticas y Lengua en Educación Secundaria Obligatoria” (CTIDIB/2002/178) (Penalva, Valls, Torregrosa, Llinares, 2003. Documento interno). El cuestionario está compuesto por cinco problemas cuya resolución requiere la puesta en práctica de la capacidad de Modelizar o Generalizar. En este trabajo presentamos algunos resultados obtenidos en los 3 problemas de modelización de situaciones reales.

PROBLEMA
<p>C1: LA OFERTA DE EMPLEO En un periódico local han aparecido unas ofertas de empleo para repartir pizzas. La pizzería A paga a cada repartidor 0.6€ por pizza entregada y además una cantidad fija de 60€ al mes. La pizzería B pata 0.9€ por pizza entregada y 24€ fijos al mes. ¿Qué oferta te parece mejor? Resuélvelo y explica pro qué tu elección es la mejor.</p>
<p>C2: EL RECINTO FERIAAL La Comisión de fiestas de tu barrio quiere construir un recinto ferial de forma rectangular con una superficie de 400 m² y vallarlo con una verja metálica de 30€ el metro lineal. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones del recinto para que el presupuesto dela verja sea el más económico posible? Resuélvelo y explica por qué las dimensiones que has elegido son las mejores.</p>
<p>C4: LA PISTA DE BAILE Un fabricante de baldosas ha donado a la Comisión de Fiestas cierta cantidad de baldosas de 30 cm de largo y 33 cm de ancho. La Comisión decide hacer una pista de baile cuadrada en el recinto ferial, pero necesita que les digas: a) Cuál es el lado del menor cuadrado que se puede construir con este tipo de baldosas, sin necesidad de cortarlas, y b) Qué otros tamaños podría tener la pista cuadrada para embaldosarla usando solo baldosas enteras de este tamaño ¿por qué? Resuélvelo y explica qué has hecho para responder a la Comisión.</p>

Tabla 1: Problemas cuya resolución requiere la puesta en práctica de la capacidad de modelización de situaciones reales

El esquema de análisis:

La capacidad de Modelizar puede tener para cada individuo un determinado desarrollo por lo que hablaremos de niveles de desarrollo que vendrán determinados por la identificación que el estudiante hace de las características relevantes de la situación, el establecimiento de relaciones identificando un modelo matemático y el uso que hace del modelo para conseguir el objetivo pretendido. El esquema de análisis considera, para la capacidad de Modelizar, cuatro niveles de desarrollo. La caracterización general de estos niveles se recoge en las siguientes tablas:

NIVELES DE DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE MODELIZAR	
Nivel	Características
NIVEL 0	Nada. En este nivel se encuentran aquellas respuestas en las que no hay intento de resolver el problema, se dan explicaciones confusas que ponen de manifiesto que no hay comprensión alguna de la situación, o se establecen relaciones erróneas entre las variables.

NIVEL 1	Identifica algunos aspectos relevantes de la situación pero sin comprenderla estructuralmente.
NIVEL 2	Identifica aspectos relevantes de la situación y establece sus relaciones mostrando comprensión estructural de la misma. Construye un modelo eficaz para abordar la búsqueda de la respuesta sin un uso conveniente del mismo.
NIVEL 3	Construye un modelo eficaz que refleje el sentido dado a la situación y usa este modelo para tomar decisiones usándolo de manera adecuada.

Tabla 2: Niveles de desarrollo de la capacidad de modelizar

Codificación de datos

Siguiendo el esquema de análisis, a cada individuo y para cada cuestión se le asigna un número que indica su nivel de desarrollo de la capacidad de Modelizar en función de las evidencias encontradas en su respuesta. Así, se definen las variables recogidas en la siguiente tabla:

	NOMBRE	SIGNIFICADO DE LA VARIABLE	Valor de la variable = nivel de desarrollo
MODELIZAR	MC1	Nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en C1	0, 1, 2, 3
	MC2	Nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en C2	0, 1, 2, 3
	MC4	Nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en C4	0, 1, 2, 3

Tabla 3: Variables y sus valores

Se definió una nueva variable que recogía la puntuación global en el cuestionario tomando valores de 0 a 10:

$$T_n = \frac{10}{15} (MC1 + MC2 + GC3 + MC4 + GC5)$$

[GC3 y GC5 corresponden a las variables vinculadas al nivel de desarrollo de la capacidad de Generalizar]

Una vez codificados los datos se procedió a su estudio para determinar tanto el éxito global alcanzado por los estudiantes en el cuestionario, como el nivel de éxito de cada uno de los problemas. Para ello se realizó un análisis descriptivo de las variables observando medias, percentiles y distribuciones de frecuencias en el caso de MC1, MC2 y MC4, y solo medias y percentiles en el caso de Tn.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en dos secciones. En la primera de ellas se recogen los resultados relativos al éxito global con el objetivo de determinar en qué medida se ha desarrollado la capacidad de modelización matemática durante la ESO y qué problemas fueron mejor modelizados por los estudiantes. En la segunda sección se presentan los resultados de tres de los problemas con el objetivo de dar cuenta del nivel de desarrollo de la capacidad de Modelizar puesto de manifiesto en su resolución.

Éxito Global

Para determinar en qué medida se ha desarrollado la capacidad de modelización matemáticas durante la ESO se analizan la variable Tn considerada como un indicador del nivel de competencia matemática debido a que en su cálculo se tienen en cuenta los niveles de desarrollo de las capacidades de modelizar y generalizar puestos de manifiesto en cada una de las cuestiones. La media de la puntuación global del cuestionario es de 4,098 ($\sigma^2 = 2,118$). Solo el 30,5% de los estudiantes alcanza o supera el 5, siendo este porcentaje significativamente bajo. Considerando Tn como indicador

del nivel de competencia matemática relativa a la modelización, estos resultados indican que el desarrollo de dicha competencia al finalizar la ESO según es medida por el cuestionario es bastante bajo.

Para determinar qué problemas fueron mejor modelizados por los estudiantes se realiza una comparación entre las medias de las variables MC1, MC2, GC3, MC4 y MC5 ya que con ellas se codifica el nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar/generalizar puesto de manifiesto en la respuesta dada y, por tanto, sus medias pueden considerarse como un indicador del nivel éxito de la muestra en cada problema. La capacidad de Generalizar puesta de manifiesto a través de la identificar patrones de una sucesión representar dicho patrón y usarlo para mostrar el comportamiento de dicha sucesión se desarrolló mejor que la capacidad de Modelizar situaciones reales. La modelización de la situación planteada por el problema 1 (“La oferta de empleo”, $\bar{X} = 1,8$, $\sigma^2 = 0,851$) fue la mejor desarrollada de entre las tres, seguida por la situación 2 (“El recinto ferial”, $\bar{X} = 0,71$, $\sigma^2 = 1,114$) y la 4 (“La pista de baile”, $\bar{X} = 0,45$, $\sigma^2 = 0,976$) siendo esta última en el que se obtienen los peores resultados. En los problemas 2 y 4 la media de la capacidad de modelizar quedó por debajo de 1. En ambos problemas están involucradas estructuras multiplicativas, mostrando que la modelización de este tipo de situaciones resultó muy difícil. Las diferencias entre las medias obtenidas en los cinco problemas son estadísticamente significativas en todos los casos, lo que indica que las situaciones planteadas en el cuestionario reflejan aspectos diferentes de la capacidad de modelizar y justifica, por tanto, el análisis más detallado de cada uno de los problemas que se hace en la próxima sección.

Los problemas

Para estudiar el desarrollo de la capacidad de Modelizar diferentes tipos de situaciones, que involucren diferentes modelos matemáticos, puesto de manifiesto en la resolución de los problemas, se analizan los resultados en cada uno de ellos por separado teniendo en cuenta la caracterización de los niveles de desarrollo de la capacidad de modelizar y el modelo matemático subyacente a la situación planteada. Veamos ahora estos resultados

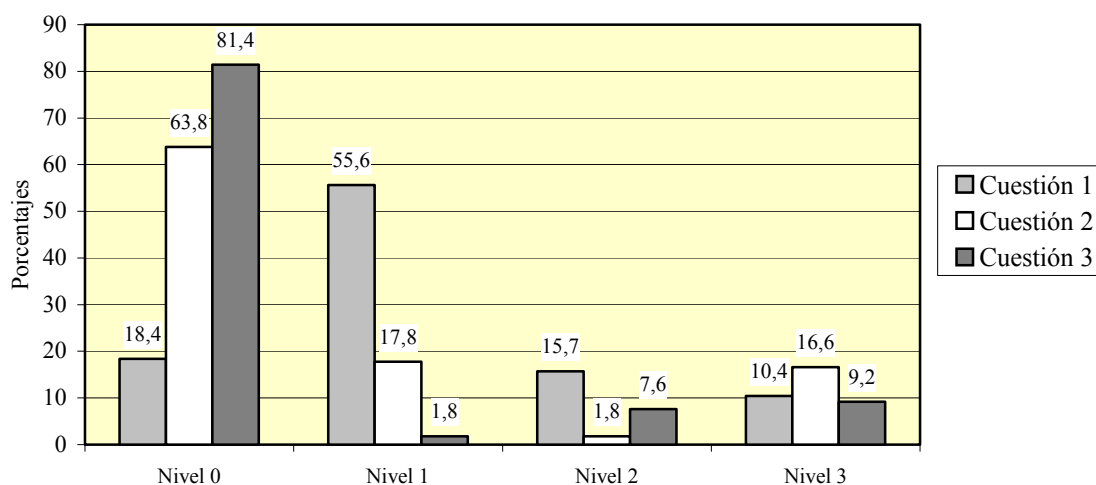


Gráfico 1: Niveles de desarrollo de la capacidad de modelizar

- Cuestión 1: “La oferta de empleo”

Para la capacidad de modelizar, los niveles 2 y 3 venían caracterizados por una comprensión estructural completa de la situación, lo que en este problema consiste en advertir el cambio de tendencia que se produce en el sueldo en función del número de pizzas vendidas. Los niveles 0 y 1 venían caracterizados por una comprensión parcial de la situación lo que para este problema se traduce en no identificar la existencia de dicho cambio. La media del nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en el problema 1 (MC1) es de 1.18 ($\sigma^2 = 0,851$). Una gran parte de los estudiantes no logran alcanzar una comprensión estructural completa de la misma. Hay que destacar que casi las tres cuartas partes de los participantes (74%) no advirtieron la existencia del cambio de tendencia quedando así por debajo del nivel 2. Por lo tanto, se tiene que solo el 26% de la muestra, porcentaje significativamente bajo, consigue alcanzar una comprensión estructural completa (respuesta de nivel 2 o 3) y de éstos, solo el 40.8% (lo que supone un 10,37% de la muestra total) hicieron un uso adecuado de esta comprensión de la estructura de la situación para buscar la solución.

- Cuestión 2: El recinto ferial

Para la capacidad de modelizar, los niveles 2 y 3 venían caracterizados por una comprensión estructural completa de la situación, lo que en este problema consiste en advertir que el perímetro del rectángulo de área constante es menor cuando menor es la diferencia entre sus lados. Los niveles 0 y 1 venían caracterizados por una comprensión parcial de la situación lo que para este problema se traduce en no advertir la relación anterior. La media del nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en el problema 2 (MC2) es de 0,71 ($\sigma^2 = 1,114$) con lo que el desarrollo de la modelización en esta situación es muy bajo. Hay que destacar que casi dos tercios de los estudiantes (63,8%) dan una respuesta de nivel 0, es decir, o bien no hacen nada, o bien parecen no entender el problema haciendo uso de relaciones no adecuadas entre las variables. Solo un 18,4% alcanza una comprensión estructural completa dando respuestas de nivel 2 o 3, siendo este porcentaje significativamente bajo en relación a la muestra total. Un porcentaje elevadísimo de estos estudiantes, el 90,4% (lo que supone un 16,6% de la población total), logra usar su comprensión estructural de la situación para identificar el cuadrado como solución.

- Cuestión 4: La pista de baile

Para la capacidad de modelizar, los niveles 2 y 3 venían caracterizados por una comprensión estructural completa de la situación, lo que en este problema consiste en identificar el mínimo común múltiplo como clave para la resolución del problema, o bien realizar una búsqueda con sentido de la solución a través de casos particulares. En caso de que no se alcance esta comprensión estructural completa se trataría de una respuesta de nivel 0 o 1. La media del nivel de desarrollo de la capacidad de modelizar en el problema 4 (MC4) es de 0,45 ($\sigma^2 = 0,976$) con lo que los resultados obtenidos en el problema son en general muy bajos. Esto muestra que representar mentalmente las variables y relaciones que estructuran esta situación ha resultado ser lo más difícil del cuestionario. Hay que destacar que la gran mayoría de los estudiantes (81,4%) dan una respuesta de nivel 0. Es decir, o bien no hacen nada, o bien parecen no entender el problema. Solo el 16,8% alcanza una comprensión estructural completa de la situación siendo este porcentaje significativamente bajo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La Educación Secundaria Obligatoria es el último periodo de escolarización obligatoria en la vida de un individuo de forma que, en el transcurso de esta etapa, los estudiantes deberían desarrollar los conocimientos y destrezas necesarios para desenvolverse adecuadamente en el mundo extraescolar. Sin embargo, los resultados de este estudio revelan que los estudiantes que participaron en esta investigación, habiendo cursado casi en su totalidad 4º de ESO, en general no fueron capaces de modelizar adecuadamente las situaciones que se les plantearon en el sentido de identificar las variables y relaciones que la estructuran para tomar decisiones y justificarlas.

De las dos capacidades que el cuestionario contempla (modelizar y generalizar), la generalización se manifiesta como la mejor desarrollada por los estudiantes. Los resultados de las cuestiones de generalizar superan a los de cualquiera de los problemas cuya resolución requería la puesta en práctica de la capacidad de modelizar. De estos, los estudiantes parecen modelizar mejor la situación de comparación de funciones lineales ya que los mejores resultados correspondieron al problema 1 (la oferta de empleo). En la estructura matemática de los problemas 2 (El recinto ferial) y 5 (La pista de baile) entran en juego relaciones multiplicativas por lo que se pone de manifiesto que los aspectos relativos a estructuras multiplicativas resultaron muy difíciles de modelizar.

Los conocimientos matemáticos necesarios para resolver las situaciones de modelización presentadas forman parte de los contenidos del currículum de la ESO por lo que se supone que los estudiantes disponían de las herramientas matemáticas necesarias para resolverlos. Sin embargo, no fueron capaces de reconocer la estructura matemática subyacente a cada situación, lo que no les permite el uso de sus recursos matemáticos. Esto contrasta con los resultados de numerosas investigaciones dirigidas a estudiar las consideraciones realistas que efectúan los estudiantes en la resolución de problemas (Greer, B. (1993); Reuser, K. y Stebler, R. (1997); Silver, A. (1992); Verschaffel, L.; Greer, B. y de Corte, E. (2002); Yoshida, H.; Verschaffel, L. y de Corte, E. (1997)) donde los participantes encuentran las operaciones aritméticas necesarias para resolverlos, pero muestran grandes dificultades para dar sentido a la solución numérica teniendo en cuenta el contexto planteado. Reuser, K. y Stebler, R. (1997) al igual que otros autores (Yoshida, H.; Verschaffel, L. y de Corte, E. (1997)) atribuyen las dificultades asociadas a la realización de consideraciones a factores de dos tipos: por un lado, “factores textuales” relativos a la naturaleza estereotipada de los problemas usados en los libros de texto y, por otro lado, “factores contextuales” asociados a la resolución de problemas dentro de la cultura del aula destacando la falta total de atención hacia la modelización matemática. Estos mismos factores parecen ser la causa del bajo desarrollo de la capacidad de modelización matemática mostrado por los participantes de nuestra investigación. Así, podría deberse a:

- Factores textuales: Los problemas con los que se trabaja en clase están enmarcados dentro de una determinada lección lo que proporciona todas las herramientas necesarias para encontrar el modelo matemático que encaja en la situación convirtiéndolos en tareas dirigidas.
- Factores contextuales: En el aula no se plantean problemas abiertos en los que los estudiantes tengan que hacer uso de sus propios recursos, con lo cual, no desarrollan una actitud de búsqueda que les permita encontrar las herramientas necesarias, o bien, elaborar sus propias estrategias de resolución.

Planteamos, siguiendo la propuesta de numerosos investigadores (Greer, B. (1997); Verschaffel, L.; Greer, B. y De Corte, E. (2002)), como solución a este fenómeno una reconceptualización de la resolución de problemas en el aula de manera que estos sean vistos, no como simple aplicación de lo que se acaba de estudiar, sino como verdaderas tareas de modelización. La práctica de la resolución de problemas desde esta nueva perspectiva podrá llevar a los estudiantes enfrentarse con diferentes situaciones problemáticas que puedan encontrarse en el mundo extraescolar.

Referencias

- Godino, J. D. (2002) Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. *Uno Revisa de Didáctica de las matemáticas*, 29, 9-19.
- Greer, B. (1993) The Mathematical modeling Perspective on Wor(l)d Problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 12, 239-250.
- Greer, B. (1997) Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction*, 7 (4), 293-307.
- Lesh, R. y Harel, G. (2003) Problem solving, Modeling and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (2-3), 157-190.
- Lesh, R. y Leher, R. (2003) Models and Modeling Perspective on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (2-3), 109-129.
- Llinares, S. (2003) Matemáticas escolares y competencia matemática. En M.C. Chamorro (Coord), *Didáctica de las Matemáticas* (pp.4-29). Madrid: PEARSON Prentice Hall.
- Reuser, k. y Stebler, R. (1997) Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in School. *Learning and Instruction*, 7 (4), 309-327
- Silver, E. A. (1992) Referential mappings and the solution of division Story problems involving remainders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14 (3), 29-39.
- Verschaffel, L.; Greer, B. y De Corte, E. (2002) Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. En Gravemejeir, K.; Lehrer, R., Oers, B. y Verschaffel, L. (Eds.) *Symbolizing, Modelling and Tool Uses in mathematics Education*. (pp. 257-276) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Yoshida, H.; Verschaffel, L. y de Corte, E. (1997) Realistic considerations in solving problematic word problems: do Japanese and Belgian children have de same difficulties?. *Learning and Instruction*, 7 (4), 329-338.