Apellidos:.. **Nombre:**...

D.N.I./ N.I.E.: ....

MATEMÁTICAS II (2º curso)

Instrucciones:

- **_Lee atentamente las preguntas antes de contestar y responde en los folios que se te proporcionarán._**
- **_La puntuación máxima de cada pregunta está indicada en su enunciado._**
- **_Revisa detenidamente la prueba antes de entregarla._**
- **_Al finalizar, se entregarán las pruebas y todas las hojas utilizadas para las respuestas._**

A. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. (50 puntos)

1. **Aplica** la integral al cálculo del área encerrada entre la recta f(x)= 2x+2 y la parábola g(x)=$3x^2$-4x+2 que queda por debajo de la recta, entre los valores x=0 y x=2. (20 puntos)

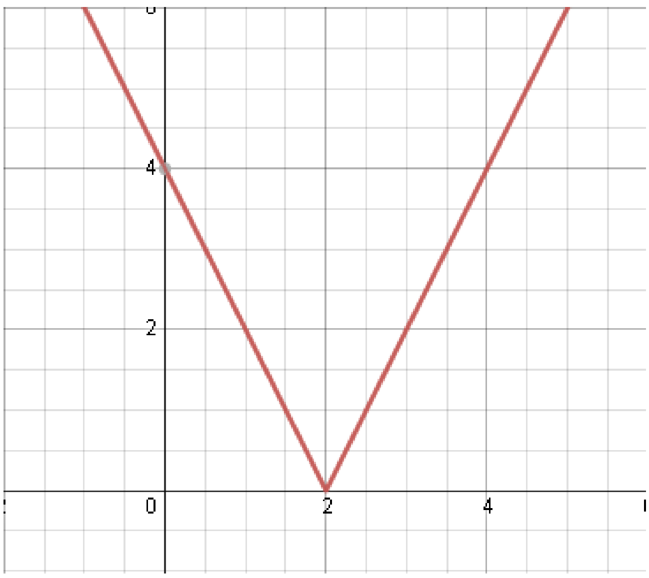
$$\left|\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|\int_0^2 (2x+2-3x^2+4x-2)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (-3x^2+6x)\,dx\right| =$$
$$\left|(-x^3+3x^2)\big|_0^2\right| = |-8+12+0-0| = 4$$

2. Dada la función f(x)=$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4) & \text{si } 2x-4 < 0 \end{cases}$ (30 puntos; 15 por apartado)

A. **Represéntala** y **estudia** su continuidad.

Escribimos f(x)=$|2x-4|$ para visualizarlo de forma más clara.

Es fácil de representar, pues se trata de dos semirrectas:



Cada trozo de recta es una función polinómica, luego está definida en todo $\mathbb{R}$ y además es continua y derivable. El único punto que puede presentar problema es el punto de unión de las dos semirrectas, es decir, x=2. Calculamos los límites laterales y vemos que coinciden (como se intuye ya en la gráfica)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x-4 = 4-4 = 0 = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -2x+4 = -4+4 = f(2)$$

Como ambos límites laterales coinciden entre sí y con el valor de la función en el punto, podemos afirmar que f(x) es continua en todo $\mathbb{R}$.

JUNTA DE ANDALUCIA

B. Calcula su derivada. ¿Es derivable en x=2?

Hallamos ahora f'(x)=$\begin{cases} 2 \text{ si } x \geq 2 \\ -2 \text{ si } x < 2 \end{cases}$. No es continua f'(x) en x=2 porque presenta una discontinuidad de salto finito, por lo que no es derivable.

$f'(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = 2 \neq -2 = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$

B. CUESTIONES. (40 puntos)

3. Calcula el valor de "k" para los que no existe inversa de A=$\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k-1 & 1 \end{pmatrix}$. (10 puntos)

Una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo. Por lo tanto hay que averiguar los valores de k que anulan el determinante de A. Para esos valores, no existirá inversa de A

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ó } k = 1$$

4. Averigua la altura de una torre situada sobre el plano x-2y+3z-20=0 sabiendo que el punto más alto está en P(1,0,-3). (15 puntos)

Si recordamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano la aplicamos directamente:

$$\text{Dist (P, plano)}=\frac{|1-0-9-20|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{28}{\sqrt{14}} \cong 7{,}48u$$

Si no, calculamos r, la perpendicular al plano que pasa por P. Sabemos que el vector director de esa recta es el vector normal del plano $\vec{n} = (1, -2, 3)$.

Sus ecuaciones paramétricas serán: r=$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

Hallamos la intersección de plano y recta sustituyendo los valores de x, y, z en el plano y averiguando el valor de t:

(1+t)-2(-2t)+3(-3+3t)-20=0 1+t+4t-9+9t-20=0 14t=28 t=2

Sustituyendo t=2 en la ecuación de la recta calculamos Q= (3, -4, 3)

La distancia del punto al plano es el módulo de $\overrightarrow{PQ} = (2, -4, 6)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} \cong 7{,}48u$$

Independientemente del camino seguido, llegamos al mismo resultado.

5. Determina de forma razonada, el valor del límite $\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$. (15 puntos)

Es una indeterminación del tipo 0/0 que se resuelve aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \{L'H\} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{1}\right) = \frac{1+1}{1} = 2$$

JUNTA DE ANDALUCIA

C. PREGUNTAS BREVES. (10 puntos)

6. Marca las <u>dos respuestas</u> correctas e **indica** brevemente por qué:

Los vectores $\vec{u} = (-1,2,1)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$ son: (10 puntos)

- ❑ Paralelos.
- ☒ Perpendiculares.
- ☒ Linealmente independientes.
- ❑ Linealmente dependientes.

Las opciones marcadas son las dos correctas.

Son perpendiculares porque su producto escalar es nulo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 2 + 0 = 0$

Y al ser perpendiculares son linealmente independientes. (Se ve también a simple vista ya que la última coordenada del 2º es nula y la del 1º no).