LÓGICA PROPOSICIONAL

1. LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Un lenguaje para el ámbito de la lógica se estructura en tres niveles diferentes: símbolos formales, reglas de formación de fórmulas y reglas de transformación de fórmulas.

1.a. Símbolos formales

En primer lugar se ha de poseer una lista de los símbolos que se estará permitido utilizar en este lenguaje. Se trata de algo así como el alfabeto del lenguaje formal.

Símbolos lógicos:
Negador: '¬'
Conjuntor: '∧' Disyuntor: '∨'
Condicional: '→' Equivaledor: '↔'

Símbolos no lógicos

Letras enunciativas: p, q, r, s, t, etcétera

Símbolos auxiliares

Paréntesis: (...), […], {...}

2. SÍMBOLOS LÓGICOS

Los símbolos lógicos son los operadores por medio de los cuales a partir de letras enunciativas se podrá obtener fórmulas mediante la combinación de las primeras con los símbolos.

Así, a partir del símbolo lógico '∧', denominado conjuntor, y de las letras enunciativas 'p' y 'q' va a ser posible obtener la fórmula 'p ∧ q'.

Teniendo como base el principio de bivalencia (V ó F), el siguiente punto a considerar va a consistir en estudiar qué valor de verdad va a poseer una fórmula en función de los valores de verdad de los enunciados componentes, para lo cual se va a analizar uno por uno cada cual de los signos lógicos considerados.

2.a. Negador

El símbolo ' ¬ ' recibe el nombre de negador, pudiendo ser considerado como la versión lógica de la partícula 'no' u otras de significado parecido propias de los lenguajes naturales.

El negador, en tanto que función proposicional que asigna valores de verdad a la fórmula que afecta dependiendo del valor de verdad de ésta, responde a la siguiente regla:

"Si un enunciado es verdadero (valor de verdad positivo), su negación es falsa (valor de verdad negativo); y si un enunciado es falso (valor de verdad negativo) su negación será verdadero (valor de verdad positivo)”.

El modo de especificar escuetamente esta regla consiste en construir una tabla de verdad para el símbolo lógico en cuestión; una tabla de verdad es un esquema en el que se especifican los valores de verdad (V para el positivo y F para el negativo)* de la fórmula en cuestión a partir de los valores de los enunciados que componen la fórmula y de las reglas de cada símbolo.

Así, la tabla de verdad**, para el negador es la siguiente:

p	¬ p
V	F
F	V

2.b. Conjuntor

El Conjuntor se simboliza con el símbolo ‘ ∧ ’ y básicamente viene a significar lo que la partícula ‘y’ u otras similares en el lenguaje natural.

El Conjuntor, en tanto que función, se atiene a la siguiente regla:

“Una conjunción afirma la verdad de sus componentes, por lo tanto, es verdadera cuando sus componentes son verdaderos; en los demás casos será falsa”.

Al igual que se hacía para el negador (y, en general, para todo conector), las condiciones de verdad de la conjunción se pueden representar mediante tablas de verdad:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2.c. Disyuntor

Este conector se simboliza con el signo ‘ ∨ ’. A la hora de buscar una transcripción al lenguaje natural de esta función proposicional se encuentran ciertos problemas, ya que aunque está en correspondencia con la ‘o’ y partículas similares (bien....bien...; ora....ora), el hecho de que estas partículas en el lenguaje natural puedan ser usadas tanto de forma exclusiva (cuando la disyunción establece que uno de sus miembros es falso y el otro verdadero, sin dejar de que las dos miembros sean verdaderos), como de una forma inclusiva (cuando permita que los dos miembros sean verdaderos simultáneamente), es una fuente de problemas a la hora de realizar la traducción a un lenguaje artificial. Para ilustrar este fenómeno se pueden exponer los siguientes ejemplos:

a) Uso exclusivo del disyuntor en el lenguaje natural: “o aprueba o suspende”. Donde una posibilidad o alternativa elimina o excluye necesariamente a la otra alternativa.

B) Uso inclusivo del disyuntor en el lenguaje natural: “o viene Juan o viene Pedro”. Una alternativa no excluye o elimina necesariamente a la otra alternativa.

Para evitar todo tipo de ambigüedad y en aras de claridad, vamos a adoptar el disyuntor en su uso inclusivo, y a partir de ahí se podrá definir, si hiciese falta, el disyuntor exclusivo.

La tabla de verdad queda como sigue:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

III.2.d. Condicional

Mediante el símbolo '$\rightarrow$' se va a simbolizar el conector denominado condicional, el cual se puede considerar como una traducción más o menos acorde a la construcción "si ...., entonces ..." del lenguaje natural.

Este símbolo, al igual que ocurría para el conjuntor y el disyuntor necesita de dos fórmulas para ser usado adecuadamente (tercera regla de formación de fórmulas); y de estas dos fórmulas, a la que aparece delante del símbolo se le denomina implicante, y a la otra, que aparece detrás del símbolo, implicado.

La regla del condicional, para la construcción de la tabla de verdad, es la que sigue:

"Un condicional es falso sólo en el caso en que el implicante sea verdadero y el implicado falso; en los demás casos, el condicional será verdadero".

La tabla de verdad queda como sigue:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

III.2.e. Equivaledor

Mediante el símbolo '$\leftrightarrow$' se simboliza el conector denominado bicondicional, el cuál puede considerarse como una transcripción al lenguaje formal de la construcción '... si y sólo si ...', propia del lenguaje natural.

La función proposicional se rige, para la construcción de la tabla de verdad, por la siguiente regla:

"Un bicondicional es verdadero si ambos miembros son verdaderos o son falsos; en los demás casos, el bicondicional será falso".

La tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

III.3. CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE VERDAD

A partir de una fórmula cualesquiera en lógica de enunciados se va a poder construir su tabla de verdad siguiendo los cuatro pasos siguientes:

a) En primer lugar habrá que especificar qué letras enunciativas aparecen en la fórmula en cuestión; estas deberán colocarse individualmente al principio de la tabla de verdad y justo debajo de ellas se deberán construir todas las combinaciones posibles de valores de verdad entre estas, por medio de una serie de líneas, cuyo número deberá ser igual a 2 elevado al número de letras enunciativas diferentes*.

b) En segundo lugar, se deben rellenar ese número de líneas especificado asegurándose que están presentes todas las combinaciones entre los

valores de verdad.
c) A partir de estas líneas iniciales y siguiendo las tablas de verdad expuestas en el apartado III (tablas de verdad de los conectores), se deben construir las columnas intermedias.
d) Y, por último, a partir de las columnas intermedias se debe llegar hasta la columna final, siguiendo siempre el mismo procedimiento, es decir, teniendo en cuenta los conectores implicados en cada caso y los valores de verdad y las fórmulas a las que afectan.

Según las características de la columna final de cada fórmula van a aparecer casos especiales. Para diferentes fórmulas van a aparecer diferentes tablas de verdad y estas van a oscilar en un continuo que va desde que la columna final está formada por completo por signos V a que esté formada únicamente por signos F. A las primeras (cuando todos los casos son verdaderos) se les denomina tautologías, dando a entender que siempre son verdaderas independientemente de los valores de verdad de los enunciados componentes. A las fórmulas del segundo tipo (cuando todos los casos son falsos) se les llama contradicciones, ya que para cualquier combinación de los valores de verdad de los enunciados o fórmulas componentes van a ser falsas. Para los casos más habituales (es decir, cuando no son ni tautologías ni contradicciones) se les denomina a las fórmulas, fórmulas indeterminadas, ya que hay combinaciones de los valores de verdad de los enunciados componentes donde el resultado es verdadero y otros donde es falso. Veámoslo mediante el siguiente ejemplo:
Hacer la tabla de la verdad de la siguiente fórmula:
$(p \wedge q) \rightarrow \neg (p \vee \neg q)$
Comencemos, siguiendo los pasos especificados

$(p \wedge q) \rightarrow \neg (p \wedge \neg q)$
V V F V V F F
V F V F V F V
F V F F F V V
F F V F V F V
Se ha seguido el procedimiento especificado, y hemos obtenido una fórmula indeterminada, pues en la última columna tenemos tres casos donde el valor de verdad es V y uno donde es F.
Otro ejemplo, la fórmula es: $p \rightarrow (q \wedge \neg t)$
$p \rightarrow (q \wedge \neg t)$
V V V F V V
V V F V V V
V F V F F F
V F F V V V
F V V F V V
F F V F F V
F V F V V V
F F F V V V

III.4. SIMBOLIZACIÓN EN LÓGICA DE ENUNCIADOS
Como con anterioridad se expuso la lógica de enunciados se caracteriza por llevar a cabo una simbolización de los elementos variables de los argumentos tomando como unidad mínima los enunciados.
Esto hace que el proceso de simbolización se convierta en una tarea bastante poco compleja, antes bien, únicamente habrá que asignar letras enunciativas concretas y

distintas a cada uno de los enunciados que aparezcan en la proposición a formalizar, para posteriormente transcribir mediante signos lógicos convenientes la estructura de ésta.
A continuación se va a ejemplificar este proceso para un caso concreto (también se construirá la tabla de verdad para el enunciado formalizado)

"Es falso que si llueve entonces hace sol"
El primer paso para simbolizar % es concretizar los enunciados simples o no compuestos que en ella aparecen, que no son otros para este caso que "llueve" y "hace sol", para los cuales se puede convenir que sean simbolizados por las letras predicativas "p" y "q" respectivamente.
De acuerdo con lo que se ha expuesto con relación a los símbolos lógicos, la traducción final al lenguaje artificial de la lógica de enunciados sería como sigue:
$\neg (\neg p \vee q)$
Y se lee:
Es falso que (si no llueve entonces hace sol)
Con este enunciado ya simbolizado se puede construir una tabla de verdad siguiendo los criterios expuestos en el apartado anterior. En primer lugar, el número de letras predicativas es dos, con lo cual el número total de líneas de la tabla deberá ser cuatro (22= 4; o sea 2 combinaciones de dos elementos, V y F, tomados de dos en dos, es decir, para p y q).
A continuación se deberán asignar todas las combinaciones posibles de valores de verdad de estos enunciados:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

con lo cual quedan cubiertas todas las posibilidades:
a) que tanto "p" como "q" sean verdaderas
b) Que "p" sea verdadero y "q" falso
c) que "p" sea falso y "q" sea verdadero
d) que "p" y "q" sean falsos
Por último hay que construir sucesivamente las diferentes columnas intermedias, teniendo en cuenta en cada una de ellas el símbolo lógico implicado (ir de menor amplitud, al de mayor) y, los valores de verdad que en cada línea asumen los enunciados en las líneas iniciales y subsiguientes:
$\neg (\neg p \vee q)$
V V F V F
V F F V F
F V V V F
F F V F V
Esta tabla nos viene a decir que la fórmula compleja ¬ (¬ p ı q) es verdadera para el caso en que tanto p como q sean falsos, y será falsa para cualquier otro caso. "Es falso que si no llueve entonces hace sol" es verdadero únicamente para el caso en que es falso tanto que llueve (p) como que hace sol (q), con lo que tenemos que es una fórmula indeterminada.